ПРОГРАММА
курсу «Математический анализ»

Факультет	математический
Специальность	010101 – Математика
Семестр	1 – 4
Лекции	280 час.
Практические занятия	280 час.
Самостоятельная работа	250 час.
Форма проверки	экзамен 1 – 4 семестр зачет 1-4 семестр

Составитель: Цалюк З. Б., доктор физ.-мат. наук, профессор

Содержание лекционного материала

Введение в анализ

Введение: оргвопросы, методика конспектирования и изучения. Структура теорем, необходимые и достаточные условия. Логические символы. Предмет математического анализа. Множества и операции над ними.

Функции: отображения, образ, прообраз, график. Классы функций: последовательность, числовая функция, взаимно однозначное отображение. Операции: сужение, композиция, алгебраические операции.

Множество действительных чисел R: Сумма, произведение, порядок. Аксиомы непрерывности. Принцип вложенных отрезков. Целые, рациональные и иррациональные числа: Бесконечные десятичные дроби. Их равенства, неравенства, n - ое приближение с недостатком и избытком. $\pm\infty$, $\overline{R}$, $|a|$, $\langle \mathrm{a};\mathrm{b}\rangle$, $\sup A$, $\inf A$. Теорема существования $\sup A$. Аксиома Архимеда.

Предел функции: Бесконечно малые последовательности. Свойства бесконечно малых. Предел последовательности. Свойства предела: единственность, алгебраические операции, неравенства. Предельная точка. Бесконечно малые функции при $x \to a$. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Свойства: алгебраические операции, неравенства, композиция. Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне

Критерии существования предела последовательности: предел монотонной последовательности, лемма «о двух милиционерах», $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. Критерии существования $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, аналоги критериев для последовательностей.

Сравнение бесконечно малых, «О», «о». Эквивалентные бесконечно малые. Понятие об асимптотике и асимптотическом разложении.

Простейшие элементарные функции. Определение a^x : существование $\sqrt[n]{a}$, существование $\lim\limits_{r_n \to x} a^{r_n}$. Свойства a^x , множество значений, $\log_a x$, замечательные пределы и асимптотика простейших элементарных функций.

Числовые ряды. Критерий сходимости, признак сравнения. Ряды с положительными членами. Признаки Коши и Даламбера. Условно сходящиеся ряды.

Непрерывные в точке функции: арифметические операции, композиция, локальные свойства; непрерывность элементарных функций.

Теорема о существовании корня. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Теорема об ограниченности и достижении $\sup f(x)$, $\inf f(x)$ для непрерывных функций. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Пространство $C[a;b]$. Равномерная сходимость, $\|\cdot\|$, критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность предела непрерывных функций.

Монотонные функции. Точки разрыва, непрерывность монотонной функции. Непрерывность обратной функции.

Периодические функции. Периодическое продолжение. Свойство периодов.

<u>Дифференцируемые функции</u>

Дифференцируемые функции, определение дифференциала и производной. Геометрический и механический смысл производной дифференцируемой функции.

Теорема о наилучшей локальной аппроксимации. Теоремы о производных: алгебраические операции, композиция, обратная функция.

Производные элементарных функций. Односторонние и бесконечные производные. Производные и дифференциалы высших порядков.

Теорема Ферма, Лагранжа (следствие – теорема Ролля).

Формула Тейлора. Разложение элементарных функций.

<u>Приложения дифференциального исчисления</u>

Монотонность. Локальный экстремум. Выпуклость.

Неравенства. Решение уравнений.

Правило Лопиталя.

<u>Неопределенный интеграл</u>

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Основные методы: линейность, подстановка, по частям. Таблица интегрирования.

Интегрирование элементарных функций (рациональные, тригонометрические, квазиполиномы).

<u>Определенный интеграл</u>

Задачи, приводящие к определенному интегралу. Схема определения интеграла. Ступенчатые функции, простые функции. Простые функции – пределы ступенчатых функций.

Интеграл от ступенчатых и простых функций и его свойства: интеграл – линейный функционал, положительный, ограниченный. Интегрирование сходящихся последовательностей. Интеграл – аддитивная функция отрезка.

Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменных в определенном интеграле.

Приближенное вычисление интегралов. Формула прямоугольников, трапеций, Симпсона. Оценка погрешности.

Понятие площади. Квадрируемые фигуры. Объем.

Кривые. Спрямляемые кривые. Производная длины гладкой кривой.

Приложения интеграла: геометрические, механические, определение функций.

Несобственные интегралы

Интеграл по некомпактному интервалу и конечной сумме некомпактных интервалов. Интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций. Определения. Примеры. Свойства несобственных интегралов.

Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости.

Главное значение несобственного интеграла.

Функции нескольких переменных

Линейное пространство R^n. Скалярное произведение, норма, сходимость. Окрестности. Предельные точки. Открытые и замкнутые множества. Теоремы Кантора, Больцано – Вейерштрасса и Бореля-Лебега, компакты.

Отображения R^n в R^m. Алгебраические операции, композиции, обратное отображение. Пределы функций в R^n. Критерий Коши.

Непрерывные функции. Свойства непрерывных на компакте функций. Пространство непрерывных функций. Непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций.

Дифференцируемость $f : R^n \to R^m$. Случай $m = 1,\ n = 1$. Частные производные. Связь дифференцируемости с частными производными. Свойства дифференцируемости: $f + g,\ cf,\ f \circ g$. Интегрирование $f : R \to R^n$. Формула конечных приращений. Производная по направлению. Градиент.

Производные и дифференциалы высших порядков. Равенство смешанных производных. Формула Тейлора для $f : R^n \to R$ и $f : R \to R^n$.

Неявные функции. Теорема существования (метод последовательных приближений). Теорема о дифференцировании неявной функции. Теорема об обратной функции.

Экстремум $f: R^n \to R$. Необходимые условия. Достаточные условия. Понятие об условном экстремуме. Метод Лагранжа.

Интегралы, зависящие от параметра: непрерывность, дифференцируемость, интегрируемость.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Критерии. Интегрирование и дифференцирование.

Эйлеровы интегралы.

Кратные интегралы

Мера Жордана. Определение и простейшие свойства кратных интегралов.

Сведение кратного интеграла к повторному. Замена переменных в кратном интеграле.

Криволинейные и поверхностные интегралы

Криволинейные интегралы. Определение, примеры. Связь интегралов первого и второго рода. Простейшие свойства.

Понятие поверхности. Касательная и нормаль. Ориентация. Площадь поверхности.

Поверхностные интегралы первого и второго рода. Определения, примеры, свойства.

Элементы теории поля

Скалярные и векторные поля. Основные дифференциальные операторы. Интегральные теоремы Гаусса – Остроградского, Грина, Стокса.

Независимость криволинейного интеграла от кривой.

Мера и интеграл Лебега

Введение. Счетные множества. Кольцо, σ – кольцо. Аддитивные и σ – аддитивные функции множеств. Мера.

Свойства меры. Лебегово продолжение меры.

Примеры построения меры в R, R^2, R^n. Измеримость открытых и замкнутых множеств. Неизмеримые множества.

Измеримые функции. Определение, примеры. Эквивалентность различных определений. Свойства. Измеримость $\lim f_k$. Ступенчатые функции. Эквивалентные функции. Сходимость почти всюду.

Интеграл Лебега суммируемых функций на множестве конечной меры. Определение и свойства: линейность, положительность, ограниченность, абсолютная непрерывность, счетная аддитивность.

Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Интеграл по множеству бесконечной меры. Интеграл Лебега – Стилтьеса. Теорема Родона-Никодима (обзор).

Пространство L_2 (и понятие об L_p). Полнота L_2 и плотность в нем C.

Представление функций рядами

Степенные ряды. Определение. Радиус сходимости и формула Коши-Адамара. Алгебраические операции над рядами. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.

Разложение функций в степенной ряд. Ряд Тейлора. Теорема единственности. Разложение элементарных функций в степенные ряды.

Определение ряда Фурье, основные задачи. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Лемма Римана. Интеграл Дирихле.

Сходимость ряда Фурье в точке. Равномерная сходимость. Гладкость и скорость сходимости. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций.

Сходимость в среднем ряда Фурье. Равенство Парсеваля.

Разложение функций в ряд Фурье. Ряд Фурье для произвольного промежутка. Комплексная форма ряда Фурье.

Преобразование Фурье. Определение и простейшие свойства. Представление функций интегралом Фурье (без доказательства). Приложения.

Литература

Учебники:

1. Зорич В. А. Математический анализ.
2. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ.
3. Никольский С. М. Курс математического анализа.
4. Гребенча А. В., Новоселов С. Б. Курс математического анализа.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.
6. Рудин У. Основы математического анализа.
7. Шилов В. С. Математический анализ.

Задачники:

1. Демидович Б. П. Сборник задач по математическому анализу.
2. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Ч. 1 – 3.
3. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа.
4. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн. 1, 2.
5. Пуляев В.Ф., Цалюк З.Б. Задачи по функциональному анализу.