МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Кубанский государственный университет»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
и инновациям, профессор
__________ М.Г. Барышев
“__” __________ 2015

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

для подготовки аспирантов

Специальность
01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Форма обучения
Очная

Краснодар
2015

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: математический анализ; теория функций комплексного переменного (комплексный анализ); функциональный анализ, а также программы соответствующих курсов лекций, читаемых на механико-математических, математико-механических и физико-математических факультетах университетов.

1. Вещественный анализ

Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Критерий компактности в $\mathbf{R}^n$. Полнота $\mathbf{R}^n$.

Понятие непрерывности функций, их свойства. Равномерная непрерывность. Свойства непрерывных функций на компактах.

Непрерывность и дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости.

Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.

Локальный экстремум функции многих переменных. Достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие. Метод множителей Лагранжа.

Криволинейные интегралы первого и второго рода, формула Грина. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса в трехмерном пространстве.

Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Достаточные условия сходимости рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы в пространстве непрерывных функций, периодических на отрезке $[0, 2\pi]$.

Мера в смысле Лебега. Измеримые функции и их свойства. Интеграл Лебега и его основные свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана.

Функциональные последовательности (ряды). Поточечная и равномерная сходимости, примеры. Свойства предельной функции (суммы ряда), ее интегрируемость и дифференцируемость.

Понятие многообразия. Векторные поля и формы на многообразиях. Внешнее умножение и внешний дифференциал форм. Интегрирование дифференциальных форм. Общая теорема Стокса и следствия из нее.

2. Комплексный анализ

Функции комплексного переменного. Понятие $\mathbf{C}$-дифференцируемости и $\mathbf{R}$-дифференцируемости. Условия Коши-Римана. Эквивалентность понятий аналитичности и голоморфности для функций одного комплексного переменного.

Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования. Стереографическая проекция.

Интегральная теорема Коши (об интеграле по замкнутому контуру) и теорема Мореры. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение.

Область сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда внутри круга сходимости.

Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Теорема Коши о вычетах.

Теоремы Вейерштрасса о рядах голоморфных функций. Аналитическое продолжение. Полная аналитическая функция. Ветви аналитической функции, теорема о монодромии. Точки ветвления. Риманова поверхность полной аналитической функции.

Конформные отображения. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Принцип аргумента и теорема Руше. Принцип симметрии Римана-Шварца. Теорема Римана. Простые концы и строение границы плоской области. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

3. Функциональный анализ

Метрические и топологические пространства. Полнота и пополнение метрических пространств. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. Равностепенная непрерывность семейства функций. Теорема Арцела-Асколи. Сепарабельность.

Банаховы пространства. Три принципа линейного анализа (теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха об обратном операторе).

Нормированные и топологические линейные пространства. Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы.

Слабая сходимость. Теорема о слабой компактности шара в гильбертовом пространстве.

Сопряженные и самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах. Компактные операторы.

Спектр оператора. Простейшие свойства спектра. Теорема Гильберта-Шмидта о компактных самосопряженных операторах.

Основная литература*

- Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2009, *572 стр.* . . ISBN: *978-5-9221-0266-7* *http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206*
- Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. Изд.6, стер.2010. Твердый переплет. 336 с. ISBN 978-5-9221-0133-2 (и другие издания)
- Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Изд.16. 2015. 440 с. Мягкая обложка.. ISBN 978-5-9710-1399-0; Твердый переплет. ISBN 978-5-9710-1423-2. (и другие издания)
- Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. В 2-х ч. Ч.1: Функции одного переменного. Ч.1. Изд.5, 2015. Твердый переплет. 336 с. ISBN 978-5-9710-1358-7 (и другие издания)
- Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. В 2-х ч. Ч.2: Функции нескольких переменных. Ч.2. Изд.5, 2015. Твердый переплет. 464 с. ISBN 978-5-9710-1357-0 (и другие издания)
- Зорич В.А. Математический анализ. Т. 1,2. М.: МЦНМО, 2012. ISBN: 978-5-94057-891-8.
- Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа 1,2,3 том. М.:Юрайт, 2014.
- Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва-Ижевск, РХД, 2009.

Дополнительная литература

- Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: *Физматлит, 2001, 592 стр.* ISBN: *978-5-9221-0160-8.* *http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2270*
- Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1, 2. М.: Наука, 1967—1968.
- Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. СПб.: *Лань*, 2008. 560 стр. ISBN: 978-5-8114-0136-9 http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=284
- Ильин А.М. Уравнения математической физики. М.: *Физматлит. 2009, 162 стр.* ISBN: *978-5-9221-1036-5* *http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2181*
- Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1976.
- Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. V. М.: Физматгиз, 1959.
- Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 5-е изд, М.: Наука, 1985.
- Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
- Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
- Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.:Мир, 1969.
- Белинский П.П. Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука (сиб. отд.), 1974.
- Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения . М.:ИЛ, 1962.
- Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М.: Факториал, 1998.
- Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1991.
- Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.
- Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
- Садовничий В.А. Теория операторов. М.: Высш. школа, 1999.
- Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.
- Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб.: Лань, 2005.