



ПРОГРАММА-МИНИМУМ

кандидатского экзамена по специальности

1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: теория функций действительной переменной (действительный анализ), теория функций комплексной переменной (комплексный анализ), функциональный анализ, а также программы соответствующих курсов лекций, читаемых на механико-математических, математико-механических и физико-математических факультетах университетов.

Перечень тем для подготовки к кандидатскому экзамену

Тема 1. Действительный анализ

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стильтьеса

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства L_p , их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в L_2 и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса.

Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа.

Тема 2. Комплексный анализ

Теорема Римана об отображениях плоских областей. Функция Вейерштрасса и её свойства, поле эллиптических функций. Теорема



1920

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет».

сложения для P – функции Вейрштрасса, геометрическая и аналитические формы. Эллиптические интегралы.

Описание модулярной группы $SL(2, Z)$. Модулярные формы. Теорема об изоморфизме кольца полиномов от двух переменных и алгебры модулярных форм.

Универсальные накрытия многообразий. Глобальное многообразие ростков аналитических функций. Теорема об аналитическом продолжении ростка аналитической функции. Теорема об алгебраических функциях, определяемых полиномом над полем мероморфных функций, заданных на римановой поверхности. Теорема о классификации римановых поверхностей. Группы накрывающих преобразований. Структура компактной римановой поверхности.

Компактные римановы поверхности и алгебраические кривые. Билинейные соотношения Римана для периодов голоморфных функционалов. Теорема Римана-Роха. Θ – функции, решение задачи обращения Якоби. Функции Бейкера – Ахиезера и уравнения КдФ и КП.

Собственно разрывные группы, их предельные точки. Классификация граничных точек фундаментальной области группы, порождающие преобразования группы.

Фуксовы и клейновы группы. Квазиконформные деформации группы. Вариационные формулы для квазиконформных отображений. Вариации отмеченной римановой поверхности. Теорема Тейхмюллера. Пространство Тейхмюллера. Теорема о вложении пространств Тейхмюллера.

Интегральные операторы И.И. Векуа, их свойства. Теоремы существования K – квазиконформных отображений.

Теоремы П.Н. Белинского об искажениях.

Вариационные формулы Голузина для K – квазиконформных отображений и их приложения.

Квадратичные дифференциалы Грётча – Тейхмюллера и их траектории. Теоремы о структуре решений вариационных задач для функционалов Грётча – Тейхмюллера.

Понятие конденсатора. Потенциальная функция. Ёмкость конденсатора. Функции Грина, Робэна, Неймана. Внутренний радиус области, логарифмическая емкость замкнутого ограниченного множества. Радиус Робэна и Неймана.

Симметризации Шварца, Поля, Штейнера, эллиптическая симметризация множеств. Симметризация Маркуса, радиально-усредняющая симметризация. Поляризация, кусочно-разделяющая симметризация. Диссимметризация Дубинина. Симметризация функций. Симметризация конденсаторов. Принципы симметризации.

Теорема покрытия в классе регулярных функций. Теоремы искажения в классе регулярных функций. Задачи об экстремальном разбиении.



Тема 3. Функциональный анализ

Теорема о пополнении метрического пространства. Обобщённые производные функций и их свойства. Пространства С.Л. Соболева, О.В. Бесова, С.Н. Никольского, теоремы вложения в них.

Операторы потенциального типа Рисса, их свойства. Оценки Мозера – Ниренберга, теоремы о компактности семейств функций.

Нелинейные функциональные пространства. Теоремы вложения для предельного показателя. Нелинейные компактные операторы. Теорема Шаудера о неподвижной точке.

Расширение ограниченных операторов по Фридрихсу. Слабая сходимость в банаховых пространствах, необходимые и достаточные условия слабой сходимости.

Теорема Банаха – Алаоглу о слабой компактности шара в рефлексивном банаховом пространстве.

Вопросы для подготовки к сдаче кандидатского экзамена

1. Меры и измеримые функции. Теоремы Лузина и Егорова.
2. Интегралы и предельные теоремы. Дифференцирование мер Радона, теорема Лебега о разложении мер. Теорема Рисса о представлении линейных функционалов.
3. Мера Хаусдорфа и её свойства. Размерность Хаусдорфа. Фракталы, их локальная структура, операции над ними. Теорема о дифференцируемости липшицевых функций. Теорема Степанова. Формулы площади и коплощади. Спряжляемые потоки. Теорема о разрешимости задачи Плато.
4. Теорема Римана об отображениях плоских областей.
5. Функция Вейерштрасса и её свойства, поле эллиптических функций. Теорема сложения для P – функции Вейрштрасса, геометрическая и аналитические формы. Эллиптические интегралы.
6. Описание модулярной группы $SL(2, Z)$. Модулярные формы. Теорема об изоморфизме кольца полиномов от двух переменных и алгебры модулярных форм.
7. Универсальные накрытия многообразий. Глобальное многообразие ростков аналитических функций. Теорема об аналитическом продолжении ростка аналитической функции. Теорема об алгебраических функциях, определяемых полиномом над полем мероморфных функций, заданных на римановой поверхности. Теорема о классификации римановых поверхностей. Группы накрывающих преобразований. Структура компактной римановой поверхности.
8. Компактные римановы поверхности и алгебраические кривые. Билинейные соотношения Римана для периодов голоморфных



1920

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет».

функционалов. Теорема Римана-Роха. Θ – функции, решение задачи обращения Якоби. Функции Бейкера–Ахиезера и уравнения КдФ и КП.

9. Собственно разрывные группы, их предельные точки. Классификация граничных точек фундаментальной области группы, порождающие преобразования группы.

10. Фуксовы и клейновы группы. Квазиконформные деформации группы. Вариационные формулы для квазиконформных отображений. Вариации отмеченной римановой поверхности.

11. Теорема Тейхмюллера. Пространство Тейхмюллера. Теорема о вложении пространств Тейхмюллера.

12. Интегральные операторы И.И. Векуа, их свойства. Теоремы существования K – квазиконформных отображений.

13. Теоремы П.Н. Белинского об искажениях.

14. Вариационные формулы Голузина для K – квазиконформных отображений и их приложения.

15. Квадратичные дифференциалы Грётча – Тейхмюллера и их траектории. Теоремы о структуре решений вариационных задач для функционалов Грётча – Тейхмюллера.

16. Понятие конденсатора. Потенциальная функция. Ёмкость конденсатора. Функции Грина, Робэна, Неймана. Внутренний радиус области, логарифмическая емкость замкнутого ограниченного множества. Радиус Робэна и Неймана.

17. Симметризации Шварца, По-лиа, Штейнера, эллиптическая симметризация множеств. Симметризация Маркуса, радиально-усредняющая симметризация.

Поляризация, кусочно-разделяющая симметризация. Диссимметризация Дубинина. Симметризация функций. Симметризация конденсаторов. Принципы симметризации.

18. Теорема покрытия в классе регулярных функций. Теоремы искажения в классе регулярных функций. Задачи об экстремальном разбиении.

19. Теорема о пополнении метрического пространства.

20. Обобщённые производные функций и их свойства.

21. Пространства С.Л. Соболева, О.В. Бесова, С.Н. Никольского, теоремы вложения в них.

22. Операторы потенциального типа Рисса, их свойства. Оценки Мозера – Ниренберга, теоремы о компактности семейств функций.

23. Нелинейные функциональные пространства. Теоремы вложения для предельного показателя. Нелинейные компактные операторы. Теорема Шаудера о неподвижной точке.

24. Расширение ограниченных операторов по Фридрихсу. Слабая сходимость в банаховых пространствах, необходимые и достаточные условия слабой сходимости.



25. Теорема Банаха – Алаоглу о слабой компактности шара в рефлексивном банаховом пространстве.

Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная литература:

1) Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - 7-е изд. - Москва: Физматлит, 2012. - 573 с. - (Классический университетский учебник). - ISBN 978-5-9221-0266-7; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563>

2) Свешников, А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа [Электронный ресурс] / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — Электрон. дан. — Москва: Физматлит, 2007. — 736 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59457>

3) Власова, Е.А. Элементы функционального анализа [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.А. Власова, И.К. Марчевский. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2015. — 400 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/67481>

4) Арутюнов, А.В. Лекции по выпуклому и многозначному анализу [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.В. Арутюнов. — Электрон. дан. — Москва: Физматлит, 2014. — 184 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59691>

5) Кудрявцев, Л.Д. Предел функции. Формулы Ньютона-Лейбница и Тейлора [Электронный ресурс]: учебник / Л.Д. Кудрявцев. — Электрон. дан. — Москва: Физматлит, 2004. — 32 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/59365>

6) Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного [Текст] / В. Н. Дубинин; Рос. акад. наук, Дальневосточ. отд-ние, Ин-т прикладной математики. - Владивосток: Дальнаука, 2009. - 390 с.: ил. - Библиогр.: с. 383-385. - ISBN 9785804410385

Дополнительная литература:

1) Применение симметризационных методов в геометрической теории функций [Текст]: учебное пособие / И. П. Митюк; Кубанский гос. ун-т. - Краснодар: [б. и.], 1985. - 94 с. - Библиогр.: с. 92-93.

2) Плоские квазиконформные отображения [Текст]: учебное пособие / И. П. Митюк, В. Г. Шеретов, Е. А. Щербаков; Кубанский гос. ун-т. - Краснодар: [б. и.], 1979. - 82 с. - Библиогр.: с. 78-81.

3) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва: Советская энциклопедия, 1977. - Т. 1. А - Г. - 576 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454588>



4) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва: Советская энциклопедия, 1979. - Т. 2. Д - Коо. - 552 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники).; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454589>

5) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва: Советская энциклопедия, 1982. - Т. 3. Коо - Од. - 592 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники).; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454590>

6) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва: Советская энциклопедия, 1984. - Т. 4. Ок - Сло. - 608 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники).; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454591>

7) Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. - Москва: Советская энциклопедия, 1985. - Т. 5. Слу - Я. - 624 с. - (Энциклопедии. Словари. Справочники).; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=454592>

8) Колмогоров А.Н. Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Физматлит, 2012 <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563&sr=1>

9) Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007. <http://e.lanbook.com/view/book/59457/page4/>

Перечень ресурсов сети «Интернет»

1. Сайты справочных правовых систем: www.garant.ru; www.consultant.ru
2. Электронная библиотечная система "Юрайт" – <http://www.biblio-online.ru/>
3. Scopus – база данных рефератов и цитирования – <http://www.scopus.com/>
4. Научная электронная библиотека (НЭБ) – <http://www.elibrary.ru/>
5. Архив научных журналов – <http://archive.neicon.ru/>
6. Электронная Библиотека Диссертаций – <https://dvs.rsl.ru/>
7. Национальная электронная библиотека – <http://нэб.рф/>