(1) Найти группу обратимых элементов кольца Z_{27}.

Обратимый элемент - элемент кольца с единицей, для которого существует обратный элемент относительно умножения.

I способ.

$\overline{a} \cdot \overline{b} \overset{def}{=} \overline{ab}$ - Z_m - абелева группа

Коммутативная (абелева) группа - группа, в которой оператор обладает четырьмя свойствами (замкнутость, ассоциативность, нейтральный элемент и инверсия) для групп.

$\overline{3} \cdot \overline{9} = (\overline{27}) = \overline{0}$ - делители нуля

$\overline{1}$, True $\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}$

$\overline{2}$, True $\overline{2} \cdot \overline{14} = \overline{1}$

$\overline{3}$, if 3 - обратима, то существует $\overline{x}$, $\overline{x} \cdot \overline{3} = \overline{1}$, т.к $\overline{3} \cdot \overline{9} = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} \cdot \overline{3} \cdot \overline{9} = \overline{x} \cdot \overline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{1} \cdot \overline{9} = \overline{0} \Rightarrow \overline{9} = 0$. False, т.е 3-необратима.

$\overline{4}$ - True, $\overline{4} \cdot \overline{7} = \overline{1} \Rightarrow \overline{4}$ - обратима

$\overline{5}$ - True, $\overline{5} \cdot \overline{11} = \overline{1} \Rightarrow \overline{5}$ - обратима

$\overline{6}$ - False, $\overline{6} \cdot \overline{9} = \overline{0}$

$\overline{7}$ - True, $\overline{7} \cdot \overline{4} = \overline{1}$

$\overline{8}$ - True, $\overline{8} \cdot \overline{17} = \overline{1}$

$\overline{9}$ - False, $\overline{3} \cdot \overline{9} = \overline{0}$

$\overline{10}$ - True, $\overline{10} \cdot \overline{19} = \overline{1}$

$\overline{11}$ - True, $\overline{11} \cdot \overline{5} = \overline{1}$

$\overline{12}$ - False, $\overline{12} \cdot \overline{9} = \overline{0}$

$\overline{13}$ - True, $\overline{13} \cdot \overline{25} = \overline{1}$

$\overline{14}$ - True, $\overline{14} \cdot \overline{2} = \overline{1}$

$\overline{15}$ - False, $\overline{15} \cdot \overline{9} = \overline{0}$

$\overline{16}$ - True, $\overline{16} \cdot \overline{22} = \overline{1}$

$\overline{17}$ - True, $\overline{17} \cdot \overline{8} = \overline{1}$

$\overline{18}$ - False, $\overline{18} \cdot \overline{9} = \overline{0}$

$\overline{19}$ - True, $\overline{19} \cdot \overline{10} = \overline{1}$

$\overline{20}$ - True, $\overline{20} \cdot \overline{23} = \overline{1}$

$\overline{21}$ - False, $\overline{21} \cdot \overline{9} = \overline{0}$

$\overline{22}$ - True, $\overline{22} \cdot \overline{16} = \overline{1}$

$\overline{23}$ - True, $\overline{20} \cdot \overline{23} = \overline{1}$

$\overline{24}$ - False, $\overline{24} \cdot \overline{9} = \overline{0}$

$\overline{25}$ - True, $\overline{25} \cdot \overline{13} = \overline{1}$

$\overline{26}$ - True, $\overline{26} \cdot (-\overline{1}) = \overline{26} \cdot \overline{26} = \overline{1}$

II способ

$|\mathbb{Z}_{27}^{*}| = \varphi(27)$, где φ - функция Эйлера

$\varphi(n) = n \cdot \prod (1 - \frac{1}{p_i})$, где p_i - простые множества n.

$\varphi(27) = 27 \cdot (1 - \frac{1}{3}) = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18$

Ответ: $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19,$
$20, 22, 23, 25, 26\}$

2 В кольце $\mathbb{Z}_{27}$ решить ур-е $9x = 3$

$x = 3 \cdot 9^{-1}$

$\overline{3} \cdot \overline{9} = (\overline{27}) = \overline{0}$ - делители нуля

Делители нуля - ненулевые элементы a и b кольца, если $ab = 0$

Если НОД$(a, n) = 1$, где a - эл-т кольца, n - характеристика кольца, то a обратный элемент, а следовательно и решение.

Обратным эл-т a^{-1} для некоторого a наз. такой эл-т, что

$a^{-1} \cdot a = e$, где e - нейтральный эл-т.

НОД$(9; 27)$

$9 = 3 \cdot 3$

$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\Rightarrow$ НОД$(9; 27) = 3 \cdot 3 = 9$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ решений нет, обратного эл-та нет

3 Сколько коммутативных алгебраических операций можно построить на мн-ве из 6 эл-тов.

	a	b	c	d	e	f
a						
b						
c						
d						
e						
f						

1) в любую клетку ставим любой из 6-ти символов $\{a, в, c, d, e, f\}$
36 позиций в любом из 6 вариантов выбора правило выбора $\underbrace{6\cdot 6\cdot 6 \ldots \cdot 6}_{36\ раз}$

6^{36}

2) Операция коммутативна

	a	b	c	d	e	f
a	*					
b		*				
c			*			
d				*		
e					*	
f						*

а) диагональные
$x \cdot x$ (коммутируют)
6 позиций
б) нижний Δ-к
15 позиций

$6 + 15 = 21$

Ответ: 6^{21}

4) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2i & -1 & 0 \\ i+1 & -1 & i \end{vmatrix}$ над полем комплексных чисел.

Определитель (детерминант) матрицы — это некоторое число, с которым можно сопоставить любую квадратную матрицу.

Обозначение: Δ, $|A|$, $\det A$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2i & -1 & 0 \\ i+1 & -1 & i \end{vmatrix} = -i + 2i\cdot(-1)\cdot 4 + 0\cdot 0\cdot(i+1) - (i+1)(-1)\cdot 4 - 2i\cdot 0\cdot i -$$

$$-(-1)\cdot 0\cdot 1 = -i - 8i + 4i + 4 = -5i + 4$$

5 Найти обратимые элементы кольца $\mathbb{Z}_{18}$

НОД - наибольший общий делитель

$НОД(\bar{1}, \overline{18}) = \bar{1}$ - обратимый (True)

$\bar{1} = 1\cdot 1$

$\overline{18} = 1\cdot 18 = 3\cdot 6 = 3\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$НОД(\bar{2}, \overline{18}) = \bar{2}$, False

$\bar{2} = \underline{2}\cdot 1$

$\overline{18} = 1\cdot 18 = 3\cdot 6 = 3\cdot 3\cdot \underline{2}$

$НОД(3, 18) = 3$, False

$3 = 3\cdot \underline{1}$

$18 = 3\cdot 3\cdot 2\cdot \underline{1}$

$НОД(4; 18) = 2$, False

$4 = 2 \cdot \underline{2}$

$18 = 3 \cdot 3 \cdot \underline{2}$

НОД$(5, 18) = 1$, True

$5 = \underline{1} \cdot 5$

$18 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underline{1}$

НОД$(6, 18) = 6$, False

$6 = 3 \cdot 2$

$18 = 3 \cdot \underline{3} \cdot \underline{2}$

НОД$(7, 18) = 1$, True

$7 = 7 \cdot \underline{1}$

$18 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underline{1}$

НОД$(8, 18) = 2$, False

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $\quad$ $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$

НОД$(9; 18) = 9$, False

$9 = \underline{3} \cdot \underline{3}$ $\quad$ $18 = \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 2$

НОД$(10; 18) = 2$, False

$10 = \underline{2} \cdot 5$ $\quad$ $18 = 3 \cdot 3 \cdot \underline{2}$

НОД$(11, 18) = 1$, True

$11 = 11 \cdot \underline{1}$ $\quad$ $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underline{1}$

НОД(12, 18) = 6, False

$12 = \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot 2$ $\quad 18 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3$

НОД(13, 18) = 1, True

$13 = 13 \cdot \underline{1}$ $\quad 18 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underline{1}$

НОД(14, 18) = 2, False

$14 = \underline{2} \cdot 7$ $\quad 18 = 3 \cdot 3 \cdot \underline{2}$

НОД(15, 18) = 3, False

$15 = \underline{3} \cdot 5$ $\quad 18 = \underline{3} \cdot 3 \cdot 2$

НОД(16, 18) = 2, False

$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{2}$ $\quad 18 = 3 \cdot 3 \cdot \underline{2}$

НОД(17, 18) = 1, True

$17 = 17 \cdot \underline{1}$ $\quad 18 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underline{1}$

Ответ. {1; 5; 7; 11; 13; 17}

6 Решить СЛУ над полем GF(17)

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Используя метод Крамера, решим систему

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10+12 = 22 \equiv 5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20+9 = 29 \equiv 12$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6-16 = -10 \equiv 7$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{12}{5} = 12 \cdot 5^{-1} = 12 \cdot 7 = 84 \equiv 16$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7}{5} = 7 \cdot 5^{-1} = 7 \cdot 7 = 49 \equiv 15$$

Проверка

$2 \cdot 16 - 3 \cdot 15 = 32 - 45 = -13 \equiv 4$ верно

$4 \cdot 16 + 5 \cdot 15 = 64 + 75 = 139 \bmod 17 = 3$ верно

Ответ: $x = 16$
$y = 15$

7) На мн-ве из 6 эл-тов построить алгебраическую операцию, где есть нейтральный эл-т и один элемент имеет 4 правых обратных и ни одного левого.

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	c	e	e	e	e
b	b	c	·	·	·	·
c	c	c	·	·	·	·
d	d	c	·	·	·	·
f	f	f	·	·	·	·

← все что угодно

1) e - нейтральный элемент

$\forall a \in X \quad a \times e = e \times a = a$

$(a, e) = a$

$(e, a) = a$

2) $(a, b) = e$

$(a, c) = e$

$(a, f) = e$

b, c, d, f - правые обратимые для a

$(x, a) \neq e$

8 Решить систему в поле $GF(5)$ $\begin{cases} x+y=3 \\ x+z=5 \\ z+y=7 \end{cases}$

$$GF(5) \begin{cases} x+y=3 & (1) \\ x+z=5 & (2) \\ z+y=7 & (3) \end{cases}$$

выразим из (1) x

$x = 3 - y \equiv x = 3 + 4y$

подставим во (2)

$3 + 4y + z = 5$

$z = 2 - 4y \equiv z = 2 + y$

подставим z в (3)

$2+y+y=7$

$2y=5 \qquad 2^{-1}=3$

$6y=15$

$y=15 \equiv 15 \bmod 5 = 0$

$x=3$

$y=0$

$z=2$

Проверка

$$\begin{cases} 3+0=3 \text{ верно} \\ 3+2=5 \text{ верно} \\ 2+0=2 \equiv 7 \bmod 5 = 2 \text{ верно} \end{cases}$$

Ответ: $x=3,\ y=0,\ z=2$

9 Найти НОД(12345, 654321)

Ищем по методу Евклида

$654321 = 12345 \cdot 53 + 36$

$12345 = 36 \cdot 342 + 33$

$36 = 33 \cdot 1 + 3$

Последний ненулевой остаток равен 3

Ответ: НОД(12345, 654321) = 3

(10) Методом Евклида решить уровнение $5x \equiv 8 \pmod{123}$.

Найдем обратный элемент к 5 по модулю 123.

Применим метод Евклида.

$$\begin{cases} 123 = 24 \cdot 5 + 3 \\ 5 = 3 \cdot 2 + (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 5(-24) + 123 \\ 1 = 3 \cdot 2 - 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = 3 \cdot 2 - 5 = 2(5(-24) + 123) - 5$$

$$1 = 3 \cdot 2 - 5 = 2(5(-24) + 123) - 5 =$$

$$= 5 - (48 - 1) + 123 \cdot 2 = 123 \cdot 2 - 49 \cdot 5$$

Значит $(-49) \cdot 5 = 1 - 2 \cdot 123$

$$5^{-1} = -49 = 74 \pmod{123}$$

Умножим обе части на 74

$$74 \cdot 5 \bmod 123 = 370 \bmod 123 = 1$$

$$74 \cdot 8 \bmod 123 = 444 \bmod 123 = 75$$

Ответ: $x = 75 \pmod{123}$

(11) Найти определитель GF(19) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix} = (1\cdot 3\cdot 3) + (-1\cdot 2\cdot 2) + (11\cdot 0\cdot 3) -$

$- (2\cdot 3\cdot 3) - (11\cdot 2\cdot 9) - (0\cdot(-1)\cdot 1) = 27 - 4 + 0 - 18 - 198 =$

$= 27 \bmod 19 - 4 - 18 - 198 \bmod 19 = 8 - 4 - 18 + 11 =$

$= -3 \equiv -3 \bmod 19 = 16.$

Ответ: 16

(12) НОД(1234, 3211)

Вычитаем из большего числа меньшее, пока они не будут равны

НОД(1234, 3211 − 1234) = НОД(1234, 1977) =

= НОД(1234, 743) = НОД(491, 743) =

= НОД(419, 252) = НОД(239, 252) =

= НОД(239, 13) = НОД(5, 13) = НОД(5, 8) =

= НОД(5; 3) = НОД(2, 3) = НОД(2; 1) =

= НОД(1; 1)

Ответ: НОД(1234, 3211) = 1

13 Решить систему над GF(11)

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \quad (1) \\ x + z = 5 \quad (2) \\ z + y = 7 \quad (3) \end{cases}$$

Выразим из (1) x:

$x = 3 - 2y \equiv x = 3 + 9y$

Подставим во (2):

$3 + 9y + z = 5$

$z = 2 - 9y \equiv z = 2 + 2y$

Подставим в (3)

$2 + 2y + y = 7$

$3y = 5$, где $3^{-1} = 4 \Rightarrow$

$4 \cdot 3y = 5 \cdot 4$

$12y = 20$

$y = 20 \equiv 20 \bmod 11 = 9 \Rightarrow y = 9$

$z = 2 + 2 \cdot 9 = 2 + 18 = 20 \equiv 20 \bmod 11 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 9$

$x = 3 + 9 \cdot 9 = 3 \cdot 81 = 84 \equiv 84 \bmod 11 = 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 7$

Проверка:

$7+2\cdot 9 = 25 \equiv 25 \bmod 11 = 3$ верно

$7+9 = 16 \equiv 16 \bmod 11 = 5$ верно

$9+9 = 18 \equiv 18 \bmod 11 = 7$ верно

Ответ. $x=7,\ y=9,\ z=9$

14 Найти НОД $(x^3+x+1,\ x^4+x+1)$ в кольце $\mathbb{Z}_3[x]$.

Решим алгоритмом Евклида.

НОД многочленов находится с помощью деления наибольшего на наименьший в столбик

в $\mathbb{Z}\,3(x)\ 2^{-1} = 2$

$$
\begin{array}{r|l}
x^4+x+1 & x^3+x+1 \\
\cline{2-2}
-\ x^4+x^2+x & x \\
\hline
-x^2+1 &
\end{array}
$$

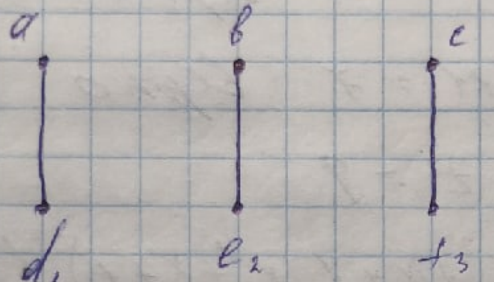
$$
\begin{array}{r|l}
x^3+x+1 & -x^2+1 \\
\cline{2-2}
-\ x^3-x & -x \\
\hline
2x+1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-x^2+1 & 2x+1 \\
\cline{2-2}
-\ -x^2-2x & -2x+1 \\
\hline
2x+1 & \\
-\ 2x+1 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

НОД $(x^3+x+1,\ x^4+x+1) = 2x+1$

Ответ: $2x+1$.

(15) Построить частично упорядоченное мн-во на 6 эл-тах с 3 максимальными и 3-мя минимальными.



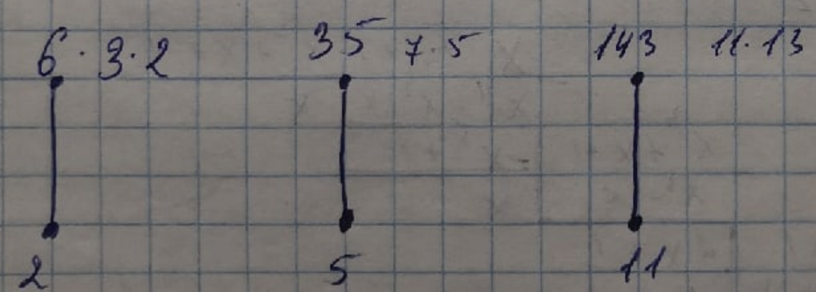
$d < a \qquad e < b \qquad f < c$

a, b, c – максимальные

d, e, f – минимальные

$$X = \overset{3\cdot 2}{6}\ ;\ \overset{5\cdot 7}{35}\ ;\ \overset{11\cdot 13}{143}\ ;\ 2;\ 5;\ 11 \}$$

$d \mid n$



6, 35, 143 – максимальные

2, 5, 11 – минимальные

(16) Найти НОД$(x^4+x^3-3x^2+x-1,\ x^3+x^2-x-1)$ над $Q(x)$

Вычислим НОД$(f(x), g(x))$ используя алгоритм Евклида.

1) Делим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4+x^3-3x^2+x-1 & x^3+x^2-x-1 \\ \underline{x^4+x^3-x^2-x} & x \\ -2x^2+2x-1 & \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r|l} -\,2x^3+2x^2-2x-2 & 2x^2-2x+1 \\ \underline{2x^3-2x^2+x} & x+2 \\ 4x^2-3x-2 & \\ -\,\underline{4x^2-4x+2} & \\ x-4 & \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{r|l} -\,2x^2-2x+1 & x-4 \\ \underline{2x-8x} & 2x+6 \\ 6x+1 & \\ -\,\underline{6x-24} & \\ 25 & \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{r|l} x-4 & 25 \\ -\,\underline{x} & \frac{1}{25}x-\frac{4}{25} \\ -4 & \\ -\,\underline{-4} & \\ 0 & \end{array}$$

НОД$(x^4+x^3-3x^2+x-1,\ x^3+x^2-x-1)=25$

Ответ: 25

17

Вычислить определитель над полем $\mathbb{C}$ $\begin{pmatrix} i & 2 & 3 \\ 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \end{pmatrix}$

Методом Гаусса приведем матрицу к диагональному виду.

$$\begin{pmatrix} i & 2 & 3 \\ 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \end{pmatrix}$$

Вычитаем 1-ю строку из 2-й; затем прибавляем 1-ю строку ко 2-й.

$$\begin{pmatrix} i & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2+i & 4 \end{pmatrix}$$

Зануляем эл-ты в 2-ом столбце под вторым эл-том

$$\begin{pmatrix} i & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 12+4i \end{pmatrix}$$

Перемножим элементы главной диагонали

$$\begin{vmatrix} i & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 12+4i \end{vmatrix}$$

$\Delta = -4+12i$

Ответ: Определитель равен $-4+12i$

18 Найти НОД$(x^5-x^4-4x^3+x^2+12x+4,\ x^4+4x^3+x^2+1)$ над $\mathbb{R}$.

Используем метод Евклида.

Пусть $A = x^5-x^4-4x^3+x^2+12x+4$

$B = x^4+4x^3+x^2+1$

Тогда $A = B(x-5)+15x^3+6x^2+11x+9$

$R = 15x^3+6x^2+11x+9$

$$\begin{array}{r|l} x^5-x^4-4x^3+x^2+12x+4 & x^4+4x^3+x^2+1 \\ \hline -\,x^5+4x^4+x^3+x & x-5 \\ \hline -5x^4-5x^3+x^2+11x+4 & \\ -\,-5x^4-20x^3-5x^2-5 & \\ \hline 15x^3+6x^2+11x+9 & \end{array}$$

1) Разделим B на R.

$$\begin{array}{r|l} -\;x^4+4x^3+1x^2+1 & 15x^3+6x^2+11x+9 \\ x^4+\frac{2}{5}x^3+\frac{11}{15}x^2+\frac{3}{5} & \frac{1}{15}x+\frac{6}{25} \\ \hline \frac{18}{5}x^3+\frac{4}{15}x^2-\frac{3}{5}x+1 & \\ -\;\frac{18}{5}x^3+\frac{36}{25}x^2+\frac{66}{25}x+\frac{54}{25} & \\ \hline -\frac{88}{75}x^2-\frac{81}{25}x-\frac{29}{25} & \end{array}$$

$B=R\left(\frac{1}{15}x+\frac{6}{25}\right)+R_1$ $\quad R_1=-\frac{88}{75}x^2-\frac{81}{25}x-\frac{29}{25}$

2) Делим R на R_1

$R=R_1\left(x-\frac{1125}{88}x+\frac{233775}{7744}\right)+R_2$

$$\begin{array}{r|l} -\;15x^3+6x^2+11x+9 & -\frac{88}{75}x^2-\frac{81}{25}x-\frac{29}{25} \\ 15x^3+\frac{3645}{88}x^2+\frac{1305}{88} & x-\frac{1125}{88}x+\frac{233775}{7744} \\ \hline -\frac{3117}{88}x^2-\frac{337}{88}x+9 & \\ -\;\frac{3117}{88}x^2-\frac{757431}{7744}x-\frac{271179}{7744} & \\ \hline \frac{727775}{7744x}+\frac{340875}{7744}=R_2 & \end{array}$$

3) R_2 умножим на 7744, чтобы избавиться от дроби. Получим $R_2=727775x+$
$+340875$

Т.к. $R_1 = -\frac{88}{75}x^2 - \frac{81}{25}x - \frac{24}{25}$, то если бы он делился на R_2, то он имел бы корень

$x_1 = -\frac{243}{176} + \frac{I}{176}\sqrt{1137}$

$x_2 = \frac{-243}{176} - \frac{I}{176}\sqrt{1137}$

НОД = 1

Ответ: 1

(19) Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} i & 2 & 3 \\ 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \end{pmatrix}$$

Исп. метод Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 1 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. Умножим 2-ю строку на мнимую единицу и прибавим к 3-й строке

2. Умножаем 2-ю строку на $-i$ и прибавляем к 1-й строке

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) c_1 \cdot i \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & -1 & i & 0 & i & 0 \\ i & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ i & 1 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) c_2 - c_1$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & -1 & i & 0 & i & 0 \\ 0 & 3 & 3-i & 1 & -i & 0 \\ i & 1 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) c_3 - c_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3-i & 1 & -i & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -i & 1 \end{array}\right) c_2 : 3$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(3-i)}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-i}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -i & 1 \end{array}\right) c_2 \cdot i = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & \frac{(1+3)}{i} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -i & 1 \end{array}\right)$$

Вычтем 2-ую строку из 1-й строки и восстановим ее

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{(2-3i)}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(3-i)}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-i}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -i & 1 \end{array}\right) c_2 \cdot 2 =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2-3i}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & \frac{(6-2i)}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2i}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -i & 1 \end{array}\right) c_3 - c_2 =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{(2-3i)}{3} & -\frac{i}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(3-i)}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-6+2i)}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} C_1 - C_3 \\ \\ C_3 : (6+2i)/3 \mid C_3 \cdot \frac{2-3i}{3} \end{array} =$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3-i} & \frac{(3-2i)}{(6-2i)} & \frac{2-3i}{6-2i} \\ 0 & 1 & \frac{3-i}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{i}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3-i}{3} & \frac{1}{3} & \frac{i}{6} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) C_2 - C_3 =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{(-3-i)}{10} & \frac{(11-3i)}{20} & \frac{(9-7i)}{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(3+i)}{10} & \frac{(-1+3i)}{20} & \frac{(-9-3i)}{20} \end{array}\right)$$

20 Разложить на множители многочлены x^3+x+1, x^4+x^2+1 в кольце $\mathbb{Z}_3[x]$.

$\mathbb{Z}_3[x]$

$\bar{0} \to 3k$

$\bar{1} \to 3k+1$

$\bar{2} \to 3k+2$

$x^3+x+1 = f$

$x^4+x^2+2 = g$

$f(\bar{1}) = \bar{0}$

$$\begin{array}{l|l} x^3+x+1 & x-1 \\ \hline -\ x^3-x^2 & x^2+x+2 \\ \quad x^2+x & \\ \quad x^2-x & \\ \quad\quad 2x+1 & \\ \quad\quad 2x-2 & \\ \quad\quad\quad 3 & \end{array}$$

$x^3+x+1=(x-1)(x^2+x+2)$

x^2+x+2 - корней нет

$g(\bar{1})=\bar{0}$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+1 & x-1 \\ \hline x^4-x^3 & x^3+x^2+2x+2 \\ \hline x^3+x^2 & \\ x^3-x^2 & \\ \hline 2x^2+1 & \\ 2x^2-2x & \\ \hline 2x+1 & \\ 2x-2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$g(x)=(x-1)(x^3+x^2+2x+2)=(x-1)(x^2(x+1)+$
$+2(x+1))=(x-1)(x+1)(x^2+2)$

$$\begin{array}{l|l} x^2+2 & x+2 \\ \hline x^2+2x & x-1 \\ \hline -2x+2 & \\ -2x-4 & \\ \hline 6 & \end{array}$$

$x^2+2=(x+2)(x-2)$

Ответ: $g(x)=(x-1)(x+1)(x+2)(x-2)$

23 Построить бинарную алгебраическую операцию на 5 элементах, которая будет коммутативной, иметь нейтральн. эл-т и

один из эл-тов будет иметь три обратных.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	d	e	e	c
b	b	e	c	a	b
c	c	e	a	b	a
d	d	e	b	a	a

e - нейтральный элемент

$(a, b) = (b, a) = e$

$(a, b) = (c, a) = e$

$(a, d) = (d, a) = e$

Симметрия относительно главной диагонали - коммутат;

a имеет три обратных.

26. Найти ранг матрицы над Q

Элементарными преобразованиями строк нужно привести матрицу к треугольному виду. За основную примем 1-ю строку.

1) Вычтем из 2-й строки 1-ую, умноженную на 4.

2) Вычтем из 2-й строки 1-ую, умноженную на 7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Делим 2-ю строку на −3

4) Добавим из 3-й строк 2-ю, умноженную на 6

Ответ: Ранг матрицы A над полем рациональных чисел равен 2

28 Решить матричное ур-е над

$GF_{(5)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Вычислим определитель

$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5 = 0$

Т.к. $\Delta A = 0$, то обратной матрицы не существует, поэтому нельзя исп. формулу $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем эл-т матрицы $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Подставляя в уравнение, получаем:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

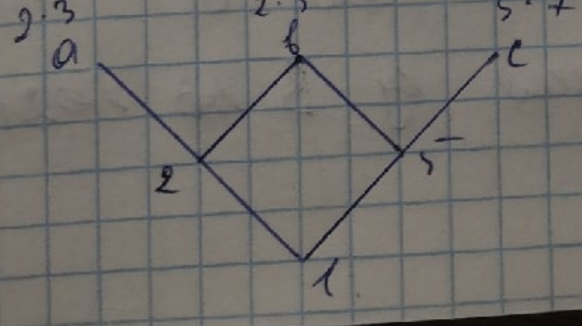
Находим произведение, а затем приравниваем соответствующие эл-ты матриц в левой и правой частях уравнения:

$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=1 \end{cases};$

$\begin{cases} 4a+3c=0 \\ 4b+3d=1 \end{cases};$

Эти системы не имеют решений => данное матричное ур-е не имеет решений

(27) Построить частично упорядоченное мн-во из 6 эл-тов, имеющее наименьший и три макс. эл-та.



$X = \{6, 10, 35, 2, 5, 1\}$

6, 10, 35 - максимальные

1 - наименьший

29 Найти куб матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ над $\mathbb{Z}_8$

$\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, \ldots, 7\}$, то $5 = -3$, $4 = -4$, $6 = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 4+12+3 & -6+6-2 & 2-3+1 \\ -8+8+3 & 12+4-2 & -4-2+1 \\ 6+8+3 & -9+4-2 & 3-2+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-9+1 & -4-18+1 & 0-9+2 \\ -12-6+1 & 8-12+1 & 0-6+2 \\ 9-6+1 & -6-12+1 & 0-6+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

30 Сколько одночленов степени 2021 от 3-х переменных.

Это задача на сочетания с повторениями. Сочетания из 3 по 2021.

Формула числа сочетаний с повторениями из n по m имеет вид:

$$C_{n+m-1}^{m} = \binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!} = \frac{(3+2021-1)!}{2021!\,2!} =$$

$$= \frac{2023!}{2!\,2021!} = \frac{2022 \cdot 2023}{2} = 2045253$$

(31) Какими свойствами обладает операция Q: $a \circ b = ab + a + b$.

1) Коммутативность:

$\forall a, b \in Q,\ a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot b = a \cdot b + a + b = b \cdot a + b + a = b \cdot a$

2) Ассоциативность

$\forall a, b, c \in Q$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(a \cdot b) \cdot c = (ab + a + b) \cdot c = abc + ac + bc +$

$+ ab + a + b + c = abc + ac + ab + bc + b + c + a =$

$= (bc + b + c)a + (bc + b + c)a = a(b \cdot c) + (b \cdot c) + a =$

$= a(b \cdot c)$

(32) Какими св-вами обладает операция, заданная на мн-ве действ. чисел по правилу $a \circ b = \sin(a) + \sin(b)$, где в правой части обычн. сумма синусов.

$a \circ b = \sin(a) + \sin(b)$ над R

1) Коммутативность

$a \circ b = \sin(a) + \sin(b) = \sin(b) + \sin(a) = b \circ a$

2) Ассоциативность

$(a \cdot b)c = (\sin(a) + \sin(b)) + \sin(c) =$

$= \sin(a) + (\sin(b) + \sin(c)) = a(b \cdot c)$

3) Наличие нуля

$\exists b \in R, \forall a \in R, a \cdot b = a$

$b = \pi k, k \in Z$

$a \cdot \pi k = \sin(a) + \sin(\pi k) = \sin(a) + 0 =$

$= \sin(a)$

(33) Возвести матрицу $GF(3)$ в 32 степень $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = E$

$A = (A^2)^{16} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{16} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

34 Вычислить $f(x) = x^3 + 3x + 2$ при $x = \begin{pmatrix}1&3\\2&-3\end{pmatrix}$ над $GF(5)$

$f(x) = x^3 + 3x + 2$

$x^2 = \begin{pmatrix}1&3\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&-6\\-4&15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}$

$x^3 = \begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&9\\1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&-2\end{pmatrix}$

$3x = \begin{pmatrix}3&9\\6&-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix}$

$f(x) = \begin{pmatrix}0&-1\\1&-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2&-1\\1&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-2\\2&1\end{pmatrix}$

35. Какими св-вами обладает операция на мн-ве целых чисел $a \circ b = ab - a - b$, где справа обычные операции сложения и умножения целых чисел?

1) Коммутативность: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \cdot b = b \cdot a$

$a \cdot b = ab - a - b = ba - b - a = b \cdot a$

2) Ассоциативность $\forall a, b, c \in Z$

$(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$

$(a \cdot b)c = (ab - b - a) \cdot c = abc - bc -$

$- ac - ab + \underline{b} + a - \underline{c}$

$a \cdot (b \cdot c) = a(bc - b - c) = abc - ab + ac -$

$- \underline{a} - bc + b + c$

Ассоциативности нет.

21. Решить систему над $GF(31)$ $\begin{cases} x+y=3 & (1) \\ x+z=5 & (2) \\ z+y=7 & (3) \end{cases}$

Выразим x из (1)

(1) $x = 3 - y \equiv 3 + 30y$

Подставим полученное во (2) ур-е

(2) $3 + 30y + z = 5$

$z = 2 - 30y \equiv 2 + y$

Подставим в (3)

(3) $2 + y + y = 7$

$2y = 5$ $\qquad$ $2^{-1} = 16$

$32y = 80$

$y = 80 \equiv 80 \bmod 31 = 18$

$y = 18$

$x = 3 + 30 \cdot 18 = 543 \equiv 543 \bmod 31 = 16$

$x = 16$

$z = 2 + 18 = 20$

Проверка:

$16 + 18 = 34 \equiv 34 \bmod 31 = 3$

$16 + 20 = 36 \equiv 36 \bmod 31 = 5$

$20 + 18 = 38 \equiv 38 \bmod 31 = 7$

24. Найти обратную матрицу над R

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Чтобы определить есть ли у данной матрицы обратная, надо вычислить её определитель.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{(1+1)}(1\cdot1-0\cdot2)+(-3)^{(1+2)}(2\cdot1-3\cdot0)+$$

$$+(-1)^{(1+3)}(2\cdot2-3\cdot1) = 1(1-0)-3(2)+1(4-3) = 1-6+1 =$$

$$= -4$$

Определитель не равен 0 => обратная матрица есть.

2. Найдем матрицу A' транспонированную относительно матрицы A:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисляем эл-ты союзной матрицы.

$$\bar{a}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-0) = 1$$

$$\bar{a}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2$$

$$\bar{a}_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (4-3) = 1$$

$$\bar{a}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1-3) = -2$$

$$\bar{a}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1$$

$$\bar{a}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2-9) = 7$$

$$\bar{a}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0-1) = -1$$

$$\bar{a}_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

$$\bar{a}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1-6) = -5$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

По формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \bar{A}$ найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0{,}5 & -0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & -1{,}75 \\ 0{,}25 & -0{,}5 & 1{,}25 \end{pmatrix}$$

22. Вычислить все значения многочлена $x^2+x+1 \in \mathbb{Z}_{13}[x]$ в поле $GF(13)$

$x=0 \to 1$

$x=1 \to 3$

$x=2 \to 7$

$x=3 \to 13=0$

$x=4 \to 21 \bmod 13=8$

$x=5 \to 31 \bmod 13=5$

$x=6 \to 43 \bmod 13=4$

$x=7 \to 57 \bmod 13=5$

$x=8 \to 73 \bmod 13=8$

$x=9 \to 91 \bmod 13=0$

$x=10 \to 111 \bmod 13=7$

$x=11 \to 133 \bmod 13=3$

$x=12 \to 157 \bmod 13=1$

Ответ: $\{1, 3, 7, 0, 8, 5, 4, 5, 8, 0, 7, 3, 1\}$