## МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

**«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**(ФГБОУ ВО «КубГУ»)**

**Кафедра математических и компьютерных методов**

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

**«математические методы**

**исследования систем управления производственным предприятием»**

Работу выполнила Сухова. Е. В.

(подпись, дата)

Факультет Экономический

Направление 27.03.03 Системный анализ и управление

Научный руководитель:

канд. экон. наук,

доцент Библя Г.Н.

(подпись, дата)

Нормоконтролер:

канд. экон. наук,

доцент Руденко С. Ю.

(подпись, дата)

Краснодар 2017

**Кафедра математических и компьютерных методов**

**ЗАДАНИЕ**

на курсовую работу

Студентке \_\_\_\_\_\_\_\_Суховой Екатерине Викторовне\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ группы 113 направления подготовки 27.03.03 Системный анализ

**Тема: «Математические методы исследования систем управления производственным предприятием»**

**Цель**: Изучить предметную область. Рассмотреть возможности применения методики системного анализа для предмета исследования. Построить модель системы согласно технологии SADT.

**Основные вопросы, подлежащие разработке (исследованию)**:

1) Теоретический обзор современных подходов, методов и алгоритмов исследования проблемы;

2) Анализ предметной области, обоснование *спецификации* исследуемой системы;

3) Проектирование и реализация разработки.

**Основная литература**:

1. Фрейдина, Е.В. Исследование систем управления организации. Учебное пособие [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.В Фрейдина — Электрон. текстовые дан. — М. : Омега-Л, 2013. 368 с.
2. Силич, М.П. Теория систем и системный анализ [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.П. Силич, В.А. Силич. — Электрон. текстовые дан. — М. : ТУСУР (Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники), 2011. — 276 с.
3. Архипова, Н.И Теория системного анализа и управления: учеб. пособие для вузов / Н.И Архипова, В.В. Кульба, С.А. Косяченко. – М.: «Издательство ПРИОР», 2008. – 384с.
4. Игнатьева, А.В. Теория системного анализа и управления: Учебное пособие для вузов / А.В. Игнатьева, М.М. Максимцов. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 2009. – 157с.

Срок представления законченной работы 22 мая 2017 г.

Дата выдачи задания 01 февраля 2017 г.

Руководитель \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ /Г.Н. Библя /

Задание получила 01 февраля 2017 г.

РЕФЕРАТ

Курсовая работа 37 с., 6 рис, 6 табл.

МАТЕМАТИЧЕССКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ; МАТЕМАТИЧЕССКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ; ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ; ГРАФИЧЕССКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ; СИМПЛЕКС-МЕТОД; ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ; РЕШЕНИЕ ЗЛП В MS EXCEL.

Объект исследования – математические модели оптимизации распределения ресурсов.

Предмет исследования – процессы распределения ресурсов.

Целью курсовой работы является изучение математических методов исследования применительно к экономическим задачам предприятия и реализация задач распределения.

Метод исследования – методы системного анализа, методы математического моделирования.

Основными результатами является оптимальное распределение ресурсов.

Актуальность исследования заключается в необходимости решения задач оптимизации производственной деятельности предприятия с применением математических методов в современном мире.

### **СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 5](#_Toc483682755)

[1 Использование методов математического программирования при принятии управленческих решений 7](#_Toc483682756)

[1.1 Основные понятия 7](#_Toc483682757)

[1.2 Классификация методов математического программирования 9](#_Toc483682758)

[2 Метод линейного программирования в решении управленческих задач 12](#_Toc483682759)

[2.1 Постановка задачи линейного программирования и свойства ее решения 12](#_Toc483682760)

[2.2 Геометрическая интерпретация задач линейного программирования 17](#_Toc483682761)

[2.3 Симплексный метод решения ЗЛП 20](#_Toc483682762)

[2.4 Теория двойственности 24](#_Toc483682763)

[2.5 Основные виды экономических задач, сводящихся к ЗЛП 27](#_Toc483682764)

[3 Реализация экономических задач в среде MS Excel 30](#_Toc483682765)

[3.1 Решение задачи о диете минимальной стоимости в MS Excel 31](#_Toc483682766)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 37](#_Toc483682767)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 38](#_Toc483682768)

### ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы заключается в том, что в ней рассматриваются способы и методы решения управленческих задач, задач оптимального распределения ресурсов. Успешность выполнения подавляющего большинства управленческих задач зависит от наилучшего, выгодного способа использования ресурсов, таких как деньги, товары, сырье, оборудование, рабочая сила и т.д. Задачи оптимального распределения ресурсов возникают в различных областях науки, техники и социальных сферах. Характер распределяемых ресурсов и смысл оптимальности может быть различным в зависимости от рассматриваемой прикладной области и конкретной задачи.

Целью данной работы является развития навыков применения математических методов и моделей при выработке управленческих решений. В работе приведены алгоритмы построения математических моделей и примеры решения задач распределения. В целях более эффективного усвоения материала работа разбита на три раздела.

Первый раздел содержит основные понятия и классификация методов математического моделирования. Особое внимание в первом разделе уделяется этапам построения математических моделей.

Второй раздел посвящен постановке задачи линейного программирования и методам ее решения. В частности, рассмотрены графический и симплекс-метод решения задач линейного программирования. Каждый метод иллюстрируется примером. Также приведены примеры основных экономических задач, которые водятся к решению в математическом моделировании.

В третьем разделе приводится пример экономической задачи с последующим ее решением в MS Excel.

# Использование методов математического программирования при принятии управленческих решений

## Основные понятия

Изучение различных процессов обычно начинается с их моделирования, т. е. отражения реального процесса через математические отношения. В данном случае составляются уравнения и неравенства, которые связывают разные показатели (переменные) исследуемого процесса, образуя систему ограничений.

В этих отношениях есть такие переменные, изменяя которые можно получить оптимальное соотношение основного показателя данной системы (прибыль, доход, затраты и т. п.)

Математическое программирование (оптимальное программирование) - это область прикладной математики, которая комбинирует различные математические методы - линейное программирование, нелинейное программирование, динамическое программирование и т. д.

Математическое программирование - это раздел высшей математики, посвященный решению задач поиска экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений на эти переменные.

Методы математического программирования решают проблему распределения ресурсов, планирования выпуска продукции, ценообразования, транспортных задач и т. д.

Математическое программирование возникло в 30-е годы ХХ века. Венгерский математик Б. Эгервари в 1931 г. решил проблему, названную проблемой выбора. Американский ученый Г.У. Кун обобщил этот метод, после чего стал известен как «венгерский метод».

В 1947 году американский ученый Дж. Данциг описал один из основных методов решения задач линейного программирования, известный как «симплексный» метод.

Построение математической модели процесса включает в себя следующие этапы:

1. Выбор переменных задачи.
2. Составление системы ограничений.
3. Выбор целевой функции.

Переменными задачи называются величины х1, х2,…хn, которые полностью характеризуют процесс. Их обычно записывают в виде вектора Х= (х1, х2,…хn).

Система ограничений включает в себя систему уравнений и неравенств, которые удовлетворяются переменными задач и которые являются результатом ограниченных ресурсов или других экономических или физических условий, например, положительности переменных и т. Д.

Целевой функцией называют функцию переменных задачи, которая характеризует качество выполнения задачи, и экстремум которой требуется найти.

Общая задача математического программирования - найти оптимальное (максимальное или минимальное) значение целевой функции, а значения переменных должны принадлежать определенному диапазону допустимых значений.

В самом общем виде эта задача формулируется следующим образом: найти экстремум целевой функции

(1)

и соответствующие ему переменные при условии, что эти переменных удовлетворяют системе ограничений:



φi (х1, х2,…хn) = 0,     i =1, 2, …,*l*

φi (х1, х2,…хn) ≤ (≥) 0,     i =*l*+1, *l*+2, …, m (2)

Если целевая функция (1) и система ограничений (2) линейны, то задача математического программирования называется задачей линейного программирования. Если нелинейный – нелинейного программирования. Если ставится дополнительное условие, чтобы переменные были целочисленны – задача целочисленного программирования и т.п.

Допустимым решением задачи математического программирования называется любой n-мерный вектор Х = (х1, х2,…хn), удовлетворяющий системе ограничений.

Множество допустимых решений задачи образует область допустимых решений (ОДР).

Оптимальным решением задачи математического программирования называется такое допустимое решение задачи, при котором целевая функция достигает экстремума.

## Классификация методов математического программирования

Методы математического программирования используются в экономических, организационных, военных и других системах для решения так называемых проблем распределения. Задачи этого класса возникают, когда имеющихся в наличии ресурсов не хватает для выполнения каждой работы наиболее эффективным образом. Целью решения задач данного типа является отыскание такого распределения ресурсов по работам, при котором либо минимизируются общие затраты, либо максимизируется получаемый в результате общий доход.

К математическому программированию относится:

1. Линейное программирование: суть этого метода заключается в нахождении экстремального значения линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, связывающих эти переменные;
2. Нелинейное программирование: в этом случае целевая функция и ограничения могут быть нелинейными функциями;
3. Особым случаем в задачах линейного и нелинейного программирования является такой случай, когда на оптимальные решения накладывается условие целочисленности. Такие задачи относятся к целочисленному программированию;
4. Динамическое программирование: для отыскания оптимального решения планируемая операция должна быть разбита на ряд шагов (этапов) и планирование осуществляется последовательно от этапа к этапу. Однако, выбор метода решения на каждом этапе производится с учетом интересов операции в целом;
5. Теория графов: с помощью теории графов решаются многие сетевые задачи, связанные с минимальным протяжением сети, построение кольцевого маршрута и т.д.
6. Геометрическое программирование: Под задачами геометрического программирования понимаются задачи о наиболее плотном расположении определенных объектов в заданной двумерной или трехмерной области.. Это все еще неразвитая область математического программирования, и имеющиеся здесь алгоритмы в основном сосредоточены на сокращении поиска вариантов с поиском локальных минимумов.
7. Задачами теории массового обслуживания является анализ и исследование явлений, возникающих в системах обслуживания. Одной из основных задач теории является определение таких характеристик системы, которые обеспечивают заданное качество функционирования, например, минимум времени ожидания, минимум средней длины очереди.
8. Теория игр пытается математически объяснить явления, возникающие в конфликтных ситуациях, в условиях столкновения сторон. Такие ситуации изучаются психологией, политологией, социологией, экономикой.

Вывод:

Мы определили моделирование как эксперимент с моделью реальной системы. Необходимость решения проблемы путем моделирования становится очевидной, когда необходимо получать информацию о конкретной системе, конкретную информацию, которая не может быть найдена в известных источниках.

Таким образом, методы математического моделирования являются одними из наиболее широко распространенных количественных методов, используемых для решения проблем управления. Они служат способом решения проблем распространения ресурсов, планирования выпусков продукции, ценообразования.

# Метод линейного программирования в решении управленческих задач

## Постановка задачи линейного программирования и свойства ее решения

Линейное программирование является неотъемлемой частью раздела математики, в котором изучаются методы нахождения условного экстремума функции нескольких переменных. В классическом математическом анализе рассматривается задача нахождения условного экстремума функции. Однако время показало, что для многих задач, возникающих под влиянием требований практики, классических методов недостаточно. В связи с развитием технологий, ростом промышленного производства и появлением компьютеров все более важную роль стали играть задачи поиска оптимальных решений в различных сферах человеческой деятельности. Основным инструментом решения этих проблем было математическое моделирование - формальное описание изучаемого явления и исследование с использованием математического аппарата.

Особенностью математического моделирования является учет как можно большего количества факторов простыми средствами. Именно из-за этого процесс моделирования часто имеет множественный характер. На первом этапе строится относительно простая модель и проводится ее исследование, позволяющее понять, какие из существенных свойств исследуемого объекта не рассматриваются этой формальной схемой. Тогда есть уточнение, усложнение модели.

В большинстве случаев первая степень приближения к реальности представляет собой модель, в которой все зависимости между переменными, характеризующими состояние объекта, считаются линейными. Здесь имеется полная аналогия с тем, как очень важная и часто исчерпывающая информация о поведении произвольной функции получается на основе изучения ее производной - происходит замена этой функции в окрестности каждой точки линейной зависимостью. Значительное число экономических, технических и других процессов описываются достаточно полно и полностью линейными моделями.

*Общей (стандартной) задачей линейного программирования* называется задача нахождения минимума линейной целевой функции (линейной формы)

{\displaystyle f(x)=\sum \_{j=1}^{n}c\_{j}x\_{j}=c\_{1}x\_{1}+c\_{2}x\_{2}+\ldots +c\_{n}x\_{n}}  Формулировка задачи.

Даны линейная функция

Z = С 1х 1+С 2х 2+… +С Nx N (3)

и система линейных ограничений:

a 11x 1+ a 22x 2+ … + a 1NХ N= b 1

a 21x 1+ a 22x 2+ … + a 2NХ N= b 2

. . . . . . . . . . .

a i1x 1+ a i2x 2+ … + a iNХ N= b i  (4)

x j = 0 , (j = 1, 2, … ,n), (5)

где а ij, b j- заданные постоянные величины

Найти: такие неотрицательные значения х 1, х 2, …, х n, которые удовлетворяют системе ограничений (4) и доставляют линейной функции (5)минимальное значение

Общая задача имеет несколько форм записи

1. Векторная форма записи.

Минимизировать линейную функцию Z = СХ при ограничениях

А 1х 1+ А 2x 2+ … + А Nx N= А о , X 0 (6)

где С = (с 1 , с 2, …, с N); Х = (х 1, х 2, …, х N); СХ – скалярное произведение; векторы A 1, A 2,…, A N, A 0 состоят соответственно из коэффициентов при неизвестных и свободных членах

1. Матричная форма записи.

Минимизировать линейную функцию, Z = СХ при ограничениях АХ = А 0, Х 0, где С = (с 1, с 2, …, с N) – матрица-строка; А = (а ij) – матрица системы;

Х – матрица-столбец, А 0- матрица-столбец.

*0пределение 1.* Планом или допустимым решением задачи линейного программирования называется Х = (х 1, х 2, …, х N), удовлетворяющий условиям (4) и (5).

*0пределение 2.* План Х = (х 1, х 2, …, х N) называется опорным, если векторы А (i = 1, 2, …, N), входящие в разложение (6) с положительными коэффициентами х , являются линейно независимыми.

*0пределение 3.* Опорный план называется невырожденным, если он содержит М положительных компонент, в противном случае опорный план называется вырожденным.

*0пределение 4.* Оптимальным планом или оптимальным решением задачи линейного программирования называется план, доставляющий наименьшее (наибольшее) значение линейной функции.

*Определение 5.* Основной задачей линейного программирования (ОЗЛП) называется задача, в которой фигурируют ограничения в форме неравенств

{\displaystyle \sum \_{j=1}^{n}a\_{ij}x\_{j}\geqslant b\_{i}\quad (i=1,\;2,\;\ldots ,\;m)}{\displaystyle x\_{j}\geqslant 0\quad (j=1,\;2,\;\ldots ,\;n)}

Задача линейного программирования будет иметь канонический вид, если в основной задаче вместо системы неравенств имеет место система уравнений с ограничениями в форме равенства.

{\displaystyle \sum \_{j=1}^{n}a\_{ij}x\_{j}=b\_{i}\quad (i=1,\;2,\;\ldots ,\;m)}Основную задачу можно свести к канонической путём введения дополнительных переменных.

Задачи линейного программирования наиболее общего вида (задачи со смешанными ограничениями: равенствами и неравенствами, наличием переменных, свободных от ограничений) могут быть приведены к эквивалентным (имеющим то же множество решений) заменами переменных и заменой равенств на пару неравенств.

Легко заметить, что задачу нахождения максимума можно заменить задачей нахождения минимума, взяв коэффициенты {\displaystyle c}с обратным знаком.

Свойства основной задачи линейного программирования тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств. Для обоснования методов решения задач линейного программирования существует ряд важных теорем. Вначале необходимо ввести некоторые определения.

*Определение 6.* Выпуклым называется такое множество, если вместе с его любыми двумя точками ему принадлежит и весь отрезок, соединяющий их.

А

А В

В

Рис 2.1 – Выпуклое множество Рис 2.2 – Невыпуклое множество (выпуклый многоугольник)

*Определение 7.*Пересечение конечного числа выпуклых множеств также выпуклое множество.

*Определение 8.*Точка выпуклого множества называется угловой (или крайней), если через неё нельзя провести ни одного отрезка, состоящего только из точек данного множества и для которого она была бы внутренней.   
Для выпуклого многоугольника угловыми точками являются все его вершины. В пространстве выпуклое множество с конечным числом угловых точек называется выпуклым многогранником.

*Утверждение 1.*Множеством решений системы m линейных неравенств с n переменными является выпуклый многогранник в n-мерном пространстве (исключая случай, когда система несовместна).

Справедливы следующие теоремы:

*Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.*Ранее говорилось, что ограничениями любой задачи линейного программирования являются либо система линейных уравнений, либо система линейных неравенств. Совокупность решений таких систем при условии их совместности, образует выпуклые множества с конечным числом угловых точек. В частном случае, когда в систему ограничений - неравенств входят только две переменные Х1 и Х2 это множество можно изобразить на плоскости.

*Теорема 2. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно совпадает с одной (двумя) из угловых точек множества допустимых решений.*

*Теорема 3. Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования соответствует угловая точка области допустимых решений системы ограничений, и наоборот.*

## Геометрическая интерпретация задач линейного программирования

Графический метод достаточно прост и очевиден для решения задач линейного программирования с двумя переменными. Он основан на геометрическом представлении допустимых решений и целевой функции задачи. Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме записи на плоскости. Пусть система неравенств непротиворечива или совместна (имеет хотя бы одно решение). Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной линией, i = 1,2. Условия неотрицательности определяются полуплоскостями, соответственно, с граничными линиями. Система совместна, поэтому полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаются и образуют общую часть, являющуюся выпуклым множеством и представляющую собой множество точек, координаты каждой из которых являются решением данной системы.

Набор таких точек называется многоугольником из 10 решений. Это может быть точка, отрезок, луч, многоугольник, неограниченный многоугольник. Таким образом, геометрической интерпретацией задачи линейного программирования является поиск точки многоугольника решений, координаты которой доставляют максимальное (минимальное) значение линейной функции цели, а все точки многоугольника решения являются допустимыми решениями. Линейное уравнение описывает множество точек, которые расположены на одной прямой. Линейное неравенство описывает некоторую область на плоскости. Чтобы определить, какая полуплоскость удовлетворяет неравенству, необходимо выбрать любую точку на графике, которая не принадлежит прямой, и подставить ее координаты в неравенство. Если неравенство выполнимо, то данная точка является допустимым решением, а полуплоскость, содержащая точку, удовлетворяет неравенству. Удобным для использования при подстановке в неравенство является начало координат. Чтобы найти экстремальное значение целевой функции, при графическом решении задач линейного программирования используется вектор градиента, координаты которого являются частными производными целевой функции.

При поиске оптимального решения задач линейного программирования возможны следующие ситуации: существует единственное решение задачи; существует бесконечное множество решений; целевая функция не ограничена; область допустимых решений – единственная точка; задача не имеет решений.

*Пример 1.* На большом предприятии необходимо сформировать 2 отдела, первый руководит вторым. Причем директор кампании поручил создать 3 команды в первом отделе и 5 команд во втором отделе, из которых получается одна большая проектная команда. Минимум 8 рабочих нужно перевести в эти отделы, с условием: чтобы на одного человека в первом отделе приходилось не больше трех из второго отдела. Это обосновывается необходимостью каждого из первого отдела контролировать троих человек из второго (если будет больше-не продуктивно). Разница в количестве людей при данных количествах команд не превышало 10. Какое количество людей будет разумнее всего набрать в отделы, чтобы проектная команда была

А) многочисленной;

Б) малочисленной?

Решение: Найти наибольшее и наименьшее значения функции

при ограничениях:

*х*1 >0, *х*2 >0

Построим область допустимых решений (ОДР).

|  |
| --- |
|  |
|  |  |

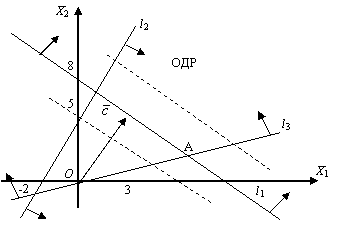


Рисунок 2.3 – Область допустимых решений

Областью допустимых решений системы ограничений является выпуклая многоугольная неограниченная область. Наименьшее значение целевой функции достигается в угловой точке *А*, а наибольшее значение функции найти нельзя, так как функция не ограничена сверху, т.е. на количество сотрудников, которое вообще возможно перевести, т.е. *max L = ¥*. (По условию, наша компания – большая, поэтому внесем коррективы что у нас есть неограниченное количество сотрудников, которые могут перейти в отделы)

Найдем координаты точки А, для этого решим систему из уравнений первой и третьей прямой:

*х*1 = 6, х2= 2.

т.е.

Ответ: Оптимальное количество работников первого отдела-6 человек, второго-2. При этом проектная команда составила 28 человек.

## Симплексный метод решения ЗЛП

Симплекс-метод решения задач линейного программирования был разработан американским математиком Джорджем Данцигом. Также большой вклад в его развитие внесли ученые Кун и Таккер, более известные своими разработками в области нелинейного программирования.

Суть симплексногометода заключается в следующем: необходимо максимизировать (или минимизировать) определенный критерий при реализации наложенных линейных ограничениях. Этот критерий может быть валовым доходом от реализации продукции, совокупными операционными расходами на производство товаров и так далее. В этом случае линейные ограничения в форме уравнений или неравенств накладываются на переменные, которые влияют на величину критерия. По существу, симплекс-метод – это улучшенный [графический метод решения задач ЛП](http://www.matburo.ru/ex_mp.php?p1=mpgr) в многомерном пространстве.

Подобно тому, как графический метод ищет оптимум в вершинах многоугольника, в симплексном методе оптимум ищется в вершинах n-мерного многогранника, называемого симплексом.

То есть, смысл симплексного метода, следующий: все линейные неравенства, которым в многомерном пространстве соответствуют полуплоскости, ограничивают некий симплекс. При этом гиперплоскость соответствует уравнению, описывающему оптимизируемый критерий. Теперь нам нужно просто найти ту вершину симплекса, одновременно принадлежащую этой гиперплоскости, координаты которой максимизируют (минимизируют) критерий. Поэтому выбирается базисная вершина и по ней мы двигаемся от одной вершины к другой, пока не найдем точку оптимума.

Симплексный метод, или метод последовательного усовершенствования решения, универсален, им можно решить любую ЗЛП.

Симплекс-метод реализуется в три этапа:

* 1 этап – запись задачи в таблицу;
* 2 этап – определение допустимого решения;
* 3 этап – определение оптимального решения.

Для решения задачи с помощью симплексного метода система ограничений и целевая функция сначала записываются в таблицу определённым образом, а затем способом преобразования таблиц с разрешающим элементом неизвестные выражаются через свободные члены. Такой способ позволяет значительно оптимизировать вычисления, формализовать процесс решения и значительно сократить количество записей. На третьем этапе нахождения оптимального решения проводятся заключительные преобразования таблицы и результат готов (крайний правый столбец таблицы).

*Пример 2*: Пусть необходимо найти оптимальный план производства двух видов продукции (х1 и х2).

Таблица 2.1 - Исходные данные

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Вид продукции | Норма расхода ресурса на единицу прибыли | | Прибыль на единицу изделия |
| А | В |
| 1 | 5 | 8 | 7 |
| 2 | 2 | 4 | 3 |
| Объем ресурса | 20 | 36 |  |

Построим оптимизационную модель

F (x) = 7x1 + 3x2 → max

5x1 + 2x2 ≤ 20 – ограничение по ресурсу А;

8x1 + 4x2 ≤ 36 – ограничение по ресурсу В.

Приведем задачу к приведенной канонической форме. Для этого достаточно ввести дополнительные переменные Х3 и Х4. В результате неравенства преобразуются в строгие равенства.

5x1 + 2x2 + x3 = 20

8x1 + 4x2 + x4 = 36

Построим исходную симплексную таблицу и найдем начальное базисное решение. Им будут дополнительные переменные, т. к. им соответствует единичная подматрица.

x3=20 и x4=36

Таблица 2.2- 1-я итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные  переменные | Свободные члены (план) | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x3 | 20 | 5 | 2 | 1 | 0 |
| x4 | 36 | 8 | 4 | 0 | 1 |
| Fj – Cj | 7 | 3 | 0 | 0 |  |

Находим генеральный столбец и генеральную строку:

max (7,3) = 7

Генеральный элемент равняется 5.

Таблица 2.3 – 2-я итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные переменные | Свободные члены (план) | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x1 | 4 | 1 | 0.4 | 0.2 | 0 |
| x4 | 4 | 0 | 0.8 | -1.6 | 1 |
| Fj – Cj | 28 | 0 | 0.2 | -1.4 | 0 |

Найденное базисное решение не является оптимальным, т.к. cтрока оценок (Fj-Cj) содержит один положительный элемент. Находим генеральный столбец и генеральную строку:

max (0,2,-1,4) = 0.2

Таблица 2.4 – 3-я итерация

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисные  переменные | Свободные члены (план) | x1 | x2 | x3 | x4 |
| x1 | 2 | 1 | 0 | 1 | -0.5 |
| x2 | 5 | 0 | 1 | -2 | 1.25 |
| Fj – Cj | 29 | 0 | 0 | -1 | -0.25 |

Найденное решение оптимально, так как все специальные оценки целевой функции Fj – Cj равны нулю или отрицательны. F(x)=29 x1=2; x2=5.

## Теория двойственности

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую задачу линейного программирования. При решении одной из них автоматически решается и другая задача. Такие задачи называют взаимодвойственными.

Таблица 2.5 - Общие условия составления двойственной задачи

|  |  |
| --- | --- |
| ***Прямая*** | ***Двойственная*** |
| Целевая функция (min) | Правая часть ограничений |
| Правая часть ограничений | Целевая функция (max) |
| A – матрица ограничений | AT – матрица ограничений |
| i–ое ограничение: ≥ 0, (≤ 0) | Переменная yi ≥ 0, (≤ 0) |
| i–ое ограничение: = 0 | Переменная yi≠ 0 |
| Переменная xj ≥ 0 | j–ое ограничение: ≤ 0 |
| Переменная xj ≠ 0 | j–ое ограничение: = 0 |

Двойственность является фундаментальным понятием в теории линейного программирования. Основные результаты теории двойственности заключены в двух теоремах, называемых теоремами двойственности.

*Лемма.* Если для некоторых планов X\* и Y\* задач I и II, то X\* – оптимальный план исходной задачи, а Y\* – оптимальный план двойственной задачи

*Первая теорема двойственности: Если одна из пары двойственных задач I или II имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т. е.*

Если же целевая функция одной задачи из двойственной пары не ограничена (для исходной - I - сверху, для двойственной - II - снизу), то другая задача вообще не имеет планов.

Из этой теоремы вытекают необходимые и достаточные условия:

a) разрешимости задач – существование хотя бы одного допустимого плана у каждой задачи;

б) оптимальности допустимых планов X и Y – выполнение равенства

*Вторая теорема двойственности: Планы X\* и Y\* оптимальны в задачах I и II тогда и только тогда, когда при подстановке их в систему ограничений задач I и II соответственно хотя бы одно из любой пары сопряженных неравенств обращается в равенство.*

Другими словами, для того, чтобы два допустимых решения и пары двойcтвенных задач были их оптимальными решениями, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

Решая ЗЛП симплексным методом, мы одновременно решаем двойственную ЗЛП. Значения переменных двойственной задачи yi, в оптимальном плане называют объективно обусловленными, или двойственными оценками. В прикладных задачах двойственные оценки yi часто называются скрытыми, теневыми ценами или оценками предельных ресурсов.

Свойства взаимнодвойственных задач.

1. В одной задаче ищется максимум линейной функции, в другой — минимум.
2. Коэффициенты при переменных в линейной функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.
3. Каждая из задач приводится в стандартной форме, причем в задаче максимизации - все неравенства вида ≤, а в задаче минимизации - все неравенства вида ≥.
4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач транспонированы друг к другу:
5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.
6. Условия неотрицательности переменных существуют в обеих задачах.

## Основные виды экономических задач, сводящихся к ЗЛП

1. Задача о наилучшем использовании ресурсов

Пусть некоторая производительная единица может выпускать n-разных видов продукции ( j=1,..,n ). Пj – виды. Предприятия при производстве этих видов продукции должно ограничиваться имеющимися видами ресурсов, технологий и др. производственных факторов.

Ингредиенты–Ri, где i=1,..,m.,где m– это количество ингредиентов. b1,b2…,bm–количество условных единиц, ограничивающих фактор или ресурс. b=(b1,b2,..,bm) –это вектор ресурса. Пусть известна экономическая выгода производства продукции каждого вида (цена реализации c=c1,c2,..,cn) – это вектор c. Известны технологические коэффициенты, обозначившие за aij, которые указывают сколько единиц i–ресурса потребуется для производства единиц продукции j-вида

Введем вектор х - это план производства. Х = (x1...xn). Показывает какие виды товаров p1, p2, pn необходимо производить предприятию и в каких количествах, чтобы обеспечить максимальный объем реализации при имеющихся ресурсов.

Математическая модель данной задачи имеет вид:

.

(7)

1. Транспортная задача

Линейные транспортные задачи составляют особый класс задач линейного программирования. Задача состоит в том, чтобы найти такой план перевозок продукции с *m* складов в пункт назначения *n*, который потребовал бы минимальных затрат. Если потребитель *j* получает единицу продукции (по прямой дороге) со склада *i,* то возникают издержки *Сij*. Предполагается, что транспортные расходы пропорциональны перевозимому количеству продукции, т.е. перевозка *k* единиц продукции вызывает расходы *kСij*.   
Далее, предполагается, что ,

где *ai* есть количество продукции, находящееся на складе *i*, и *bj* – потребность потребителя *>j*. Такая транспортная задача называется закрытой.

Математическая модель транспортной задачи имеет вид:

   
   
   (8)  
где *xij* количество продукции, поставляемое со склада *i* потребителю *j*, а *Сij* издержки (стоимость перевозок со склада *i* потребителю *j*).

1. Задача о смесях

В различных отраслях народного хозяйства возникает проблема составления таких рабочих смесей на основе исходных материалов, которые обеспечивали бы получение конечного продукта с определенными свойствами. К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т. д. Высокий уровень затрат на исходные сырьевые материалы и необходимость повышения эффективности производства выдвигает на первый план следующую задачу: получить продукцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы.

1. Задача о раскрое материалов

Сущность задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму. Рассматривается простейшая модель раскроя по одному измерению. Более сложные постановки ведут к задачам целочисленного программирования.

1. Задача о назначениях

Речь идет о задаче распределения заказа между предприятиями с различными производственными и технологическими характеристиками, но взаимозаменяемыми в смысле выполнения заказа. Требуется составить план размещения заказа (загрузки оборудования), при котором с имеющимися производственными возможностями заказ был бы выполнен, а показатель эффективности достигал экстремального значения.

Таким образом, линейное программирование является незаменимым помощником в проблеме реализации экономических задач, так как с его помощью возможно решение вопросов оптимального распределения ресурсов, которыми владеет предприятие с целью минимизации затрат и увеличения прибыли. Методы линейного программирования на основе построения простой модели позволяют подробно изучить поставленную задачу, с целью ее последующего решения.

# Реализация экономических задач в среде MS Excel

Возможности табличного процессора Excel широко применяются в экономике. С помощью офисной программы можно обрабатывать и анализировать данные, составлять отчеты, бизнес-модели, прогнозировать, определять ценность клиентов и т.д.

Microsoft Excel ‑ это средство для работы с электронными таблицами. Табличные процессоры позволяют создавать динамические таблицы, которые содержат вычисляемые поля (т.е. значения которых автоматически пересчитываются по заданным формулам при изменении значений исходных данных, содержащихся в других полях).

Excel является очень мощным инструментом для решения задач, имеющих дело с массивами разнообразных данных, поэтому область его применения обширна, начиная от бухгалтерских и складских задач и заканчивая расчетами энергетики спутниковых линий. В Excel удобно решать задачи линейной алгебры, такие как работа с матрицами и др. Так же есть все возможности по полноценной работе (сортировка, выборка, сводные таблицы, анализ) с базами данных. Благодаря наличию языка программирования в Excel возможно создание различных пользовательских программ, которые автоматизируют нестандартные задачи.

В учебном пособии «Технология экономических расчетов средствами MS EXCEL» авторов Я.Л. Гобарева, О.Ю. Городецкая и А.В. Золотарюк, отмечаются следующие достоинства и недостатки Microsoft Excel:

* Эффективный анализ и обработка данных;
* Богатые средства форматирования и отображения данных;
* Наглядная печать;
* Совместное использование данных и работа над документами;
* Обмен данными и информацией через Internet и внутренние Intranet-сети.

Недостатки Microsoft Excel:

* Большие требования к аппаратным и программным средствам.

Программа Excel имеет две отличительные особенности — эффективные вычисли­тельные возможности и мощные визуальные средства для передачи цифровой инфор­мации. Именно такая комбинация открывает Excel особенно широкие перспективы для исполь­зования в деловой сфере.

Существует довольно много литературы, как иностранной, так и отечественной, описывающей использование MS Excel в экономических задачах с использованием математических методов программирования.

Так, часто встречается расчет оптимального плана выпуска продукции. Здесь задачи линейного программирования решаются симплекс-методами целочисленного и не целочисленного программирования. Для решения такого рода задач в Excel в меню «Сервис» имеются пункты подменю «Поиск решения», «Сценарии» и «Подбор параметра» (необходима установка надстройки «Пакет анализа», входящего в базовый комплект MS Excel).

## Решение задачи о диете минимальной стоимости в MS Excel

Пусть имеется четыре вида продуктов P1, P2, P3, P4 (Мясо, рыба, овощи и фрукты), в которые входят четыре вида питательных веществ, например белки, жиры, углеводы, витамины и микроэлементы (S1,S2,S3,S4,S5). Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида продукта, норма содержания питательных веществ в дневном рационе и стоимость 1 кг продукта представлены в таблице:

Таблица 3.1 – Данные задачи

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Питательные вещества | Норма содержания питательных веществ | Содержание питательных веществ  в 1 кг продукта | | | |
| P1 | P2 | P3 | P4 |
| Белки S1 | 89 | 18,9 | 15,1 | 5 | 1,3 |
| Жиры S2 | 90 | 12,4 | 0,1 | 0,15 | 0,14 |
| Углеводы S3 | 360 | 0 | 0 | 5,4 | 20 |
| Витамины S4 | 30 | 1,6 | 1,2 | 6 | 12 |
| Микроэлементы S5 | 10 | 4 | 5 | 8 | 7 |
| Стоимость, усл. ед. | | 350 | 200 | 40 | 60 |

Указано, что суточное потребление мяса в два раза меньше, чем рыбы, и равно суточной норме потребления овощей и фруктов.

Причем мяса необходимо употреблять не меньше 0,20 кг, рыбы – не меньше 0,10 кг, овощей – не меньше 0,50 кг, а фруктов - не меньше 0,30 кг.

Требуется составить такой рацион питания, при котором затраты на приобретение продуктов будут минимальными.

Построим математическую модель: обозначим х1, х2 , x3 , x4  - суточное потребление продуктов Р1, Р2, P3, P4 тогда стоимость рациона определяется из следующих условий:

Задача свелась к нахождению неотрицательных чисел х1, х2 , x3 , x4 , удовлетворяющих линейным ограничениям и доставляющих минимум линейной целевой функции , т. е. F (х1, х2 , x3 , x4) → min.

Перенесем данные в Лист Excel, введем целевую функцию, ограничения.

В MS Excel Команда «Сервис» → «Поиск решения...» позволяет решать более сложные задачи: находить значения нескольких параметров или комбинации параметров, определяющих оптимальное (наибольшее или наименьшее) или фиксированное значение исследуемой функции. При этом для изменяемых параметров можно задавать ограничения, в пределах которых будет осуществляться поиск их значений.

Построение математической модели задачи включает в себя:

задание целевой функции (ее надо максимизировать или минимизировать); задание системы ограничений в форме линейных уравнений и неравенств; требование неотрицательности переменных.

Внесем данные задачи в лист Excel. Пусть переменные будут равны нулям. В строку «Целевая функция» запишем уравнение стоимости рациона, внося ссылки на ячейки переменных; под строкой «Ограничения» запишем систему ограничений, вводя ограничение по определенным питательным веществам в отдельной строке.

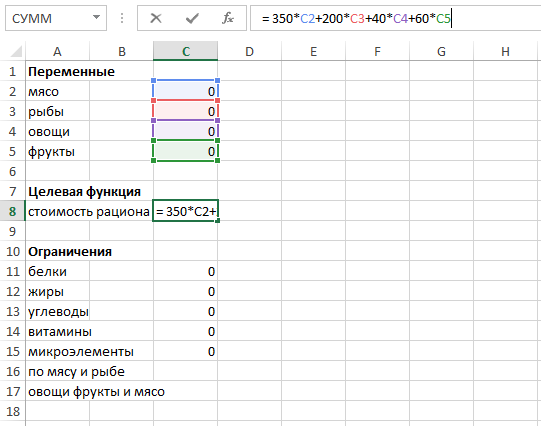


Рисунок 3.1 – Запись данных задачи в Excel, включая ограничения

Далее следует вызвать параметр «Поиск решения» и заполнить ячейки следующим образом: выделить ячейку целевой функции, выделить изменяемые ячейки (переменные), ввести ограничения. Установить флажки «минимуму» и «сделать переменные без переменных неотрицательными».

После этого нажать окно «Найти решение». В ячейках изменяются цифры и появляется диалоговое окно «Результаты поиска решения». В нем необходимо отметить пункт «Сохранить найденное решение» и нажать «ОК».

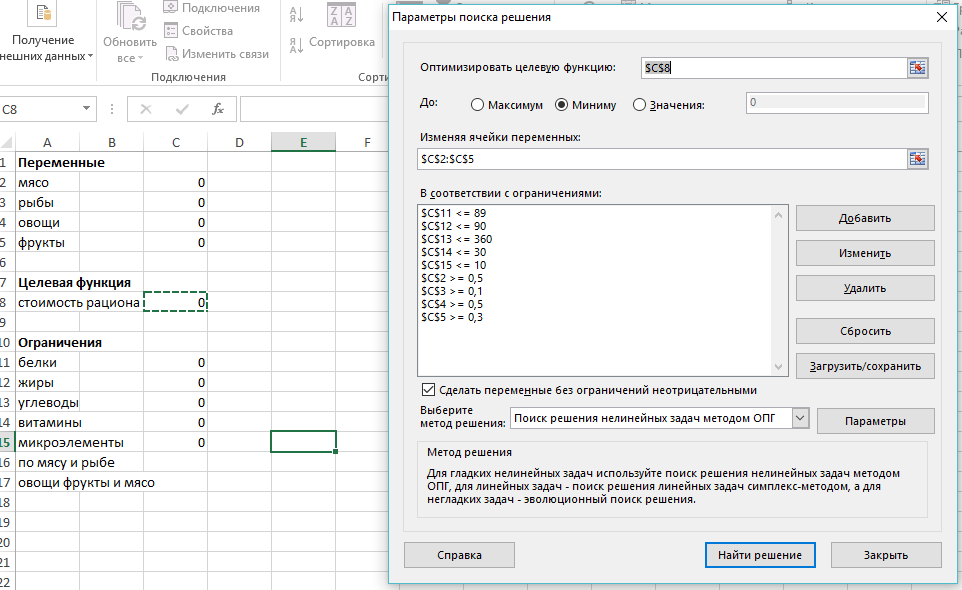


Рисунок 3.2 – Вызов параметра «Поиск решения» и ввод необходимых данных и ограничений.

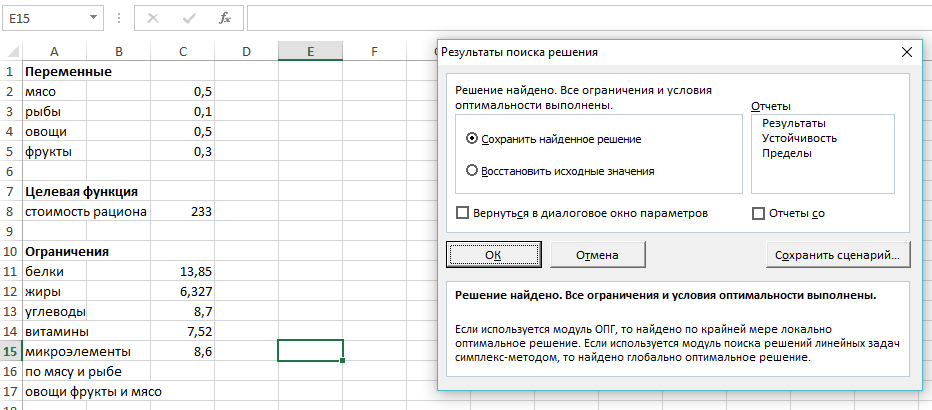


Рисунок 3.3 – Результаты поиска решений

Оптимальное решение найдено: в ячейке С2 значение х1=0,5 кг , в ячейке С3 значение х2=0,1 кг , в ячейке С4 значение х3=0,5 кг , в ячейке С5 значение х4=0,3 кг. Составлен такой рацион питания, при котором затраты на приобретение продуктов будут минимальными, а именно составлять 233 условные единицы.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе курсовой работы была изучена область математического программирования, описана подробная классификация его методов. Рассмотрены основы линейного программирования как метода реализации экономических задач. В процессе изучения была поставлена задача линейного программирования и освещены свойства ее решения. Подробно разобраны графический и симплексный метод решения. Представлена теория двойственности.

Освещены основные виды экономических задач, сводящиеся к задачам линейного программирования. Также изучены математические модели оптимизации и найден оптимальный вариант распределения ресурсов с помощью среды MS Excel.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алесинская, Т. В. [Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели"](http://www.aup.ru/books/m84/) - Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. - 153 с.
2. Алесинская Т.В., [Учебно-методическое пособие по курсу "Экономико-математические методы и модели. Линейное программирование"](http://www.aup.ru/books/m85/) / Сербин В.Д., Катаев А.В. - Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. - 79 с.
3. Попова Н.В. Математические методы финансового анализа. Учебное пособие для бакалавров. - М.: ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова», 2016. – 152с.
4. Фрейдина, Е.В. Исследование систем управления организации. Учебное пособие [Электронный ресурс]: учебное пособие / Е.В Фрейдина — Электрон. текстовые дан. — М. : Омега-Л, 2013. 368 с.
5. Гобарева Я.Л. Технология экономических расчетов средствами Excel / Городецкая О.Ю., Золотарюк А.В. -М.: Вузовский учебник, ИНФРА-М, 2013. — 336 с.
6. Юдин Д. Б. Линейное программирование. Теория, методы и приложения / Д. Б. Юдин, Гольштейн Е. Г. - Изд-во Красанд, 2012. - 424 с.
7. Коробов П. Н. Математическое программирование и моделирование экономических процессов Изд-во: ДНК, 2010. 376 с.