УДК 519.68: 681.51 512.573

ТРАССИРОВАНИЕ КОНФИГУРАЦИЙ АБСТРАКТНОГО ПРОСТРАНСТВА ЗНАНИЙ[1]

Костенко К. И.[2]

TRACINGS OF CONFIGURATIONS OF ABSTRACT KNOWLEDGE SPACE

Kostenko K. I.

Relations of tracing are defined on structures of configurations of abstract knowledge space. Properties of different types of tracing mappings and a problem of extraction of semantically correct fragments of configurations by means of such mappings are considered.

Введение

Абстрактным пространством знаний называется алгебраическая категория, множество объектов которой разбивается на классы пространств конфигураций, семантических пространств и пространств эволюций знаний [1, 2]. Элементы пространств конфигураций образуют формальные представления отдельных знаний. Семантические пространства — это объекты, представляющие множества зависимостей, используемых для семантического связывания знаний и их фрагментов. Пространства эволюций знаний составляют семейства вычислимых последовательностей конфигураций, реализующих жизненные циклы знаний.

1. Семантическое пространство

Пусть $\mathbf{M}$ — бесконечно-нумерованное множество конфигураций, содержащее пустую конфигурацию Λ.

Семантическая зависимость — это бинарный предикат на множестве конфигураций. Истинность такого предиката для некоторой пары конфигураций интерпретируется как выполнимость семантической зависимости между данными конфигурациями. В последнем случае две конфигурации и выполняющаяся для них семантическая зависимость позволяют составить из них новую конфигурацию.

Интерпретацией каждой семантической зависимости r является бинарное отношение $\mathbf{r}$, образованное всеми такими парами конфигураций из $\mathbf{M}$, между которыми выполняется r.

Определение 1. Семантическим пространством называется тройка $\mathbf{R} = (\Re, \mathbf{O}, \mathbf{C})$, где:

- $\Re$ — бесконечное нумерованное множество семантических зависимостей, для которого выполнены условия:
  1) $\Re$ включает семантические зависимости, представляемые максимальным и всеми одноэлементными отношениями на множестве конфигураций.
  2) Для сопоставляемых элементам $\Re$ бинарных отношений на $\mathbf{M}$ является алгоритмически разрешимой проблема принадлежности.
  3) Для произвольных пар бинарных отношений на $\mathbf{M}$, сопоставляемых семантическим зависимостям из $\Re$, алгоритмически разрешима проблема включения.
- $\mathbf{O}$ — это множество алгебраических операций на $\Re$, включающее объединение, пересечение, обращение, произведение и композицию семантических зависимостей, обозначаемые как $\cup$, $\cup$, $^{-1}$, $\circ$ и c.
- C — это множество логических операций (сравнений) на множестве $\Re$, включающее предикаты ρ_1 и ρ_2 — предшествова-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ р2006_юг (06-07-96618).

[2]Костенко Константин Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий, начальник отдела разработки информационных систем Центра интернет Кубанского государственного университета.

ния и совместимости элементов $\Re$, для которых

$$\forall r_1, r_2 \in \Re(r_1\rho_1 r_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_1 \subseteq \mathbf{r}_2),$$

$$\forall r_1, r_2 \in \Re(r_1\rho_2 r_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_2 \neq \emptyset).$$

2. Пространство конфигураций

Определение 2. Разложением конфигураций называется всякое всюду определенное вычислимое отображение $\varepsilon : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \times \mathbf{M}$, для которого:

1) $\varepsilon(\Lambda) = (\Lambda, \Lambda)$;

2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{M} \exists z \in \mathbf{M}(\varepsilon(z) = (z_1, z_2))$.

Разложению конфигураций ε сопоставим вычислимое отображение $d_\varepsilon : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$, задаваемое соотношениями:

1) $d_\varepsilon(z) = 0 \leftrightarrow z = \Lambda$;

2) $d_\varepsilon(z) = \max(d_\varepsilon(z_1), d_\varepsilon(z_2)) + 1$, если $\varepsilon(z) = (z_1, z_2)$.

Конфигурация z называется элементарной для разложения ε, если $\varepsilon(z) = (\Lambda, \Lambda)$.

Определение 3. Вычислимое отображение $\psi : \mathbf{M} \to \Re$ называется семантическим связыванием для отображения разложения конфигураций ε, если:

$$\forall z', z'' \in \mathbf{M}(\varepsilon(z') = \varepsilon(z'') \to \psi(z')\rho_2\psi(z''));$$

Определение 4. Декомпозицией конфигураций называется всякая пара $\mathbf{d} = (\varepsilon, \psi)$, где ε — разложение, а ψ — семантическое связывание конфигураций для ε.

Определение 5. Пространством конфигураций называется пара $(\mathbf{M}, \mathbf{d})$, в которой $\mathbf{M}$ — множество конфигураций, а $\mathbf{d}$ — декомпозиция элементов $\mathbf{M}$.

Декомпозиция $\mathbf{d}$ определяет объект категории абстрактного пространства знаний, реализующий конкретный уровень формального представления знаний.

Декомпозиция конфигураций $\mathbf{d} = (\varepsilon, \psi)$, для которой функция d_ε является всюду определенной, порождает представление элементов $\mathbf{M}$ конечными нагруженными бинарными деревьями.

Корню дерева, представляющего непустую конфигурацию z, сопоставлено отношение $\psi(z)$, а его левое и правое поддерево соответствуют представлениям первой и второй конфигураций из $\varepsilon(z)$. Внутренним вершинам и листьям такого дерева приписываются соответственно элементы $\Re$ и элементарные конфигурации.

Пусть $\mathbf{I}$ — множество всех конечных слов в алфавите $\{0, 1\}$, включающее пустое слово λ. Определим отображение элементов $\mathbf{I}$ в вершины бесконечного бинарного дерева, задаваемое соотношениями:

1. Слову λ соответствует корневая вершина дерева;

2. Если слову $\alpha \in \mathbf{I}$ соответствует вершина v, то словам $\alpha 0$ и $\alpha 1$ соответствуют вершины, являющиеся левым и правым потомками v.

Обозначим как $\mathbf{D}$ бесконечное нагруженное бинарное дерево, вершинами которого являются элементы множества $\mathbf{I}$, корню соответствует λ, а левым и правым потомками всякой вершины $\alpha \in \mathbf{I}$ являются вершины $\alpha 0$ и $\alpha 1$.

Пусть $z \in \mathbf{M}$ и $\alpha \in \mathbf{D}(z)$. Обозначим как $(z)_\alpha$ конфигурацию определяемую соотношениями:

1) $(z)_\lambda = z$;

2) $(z)_0 = z_0$ и $(z)_1 = z_1$, если $\varepsilon(z) = (z_0, z_1)$;

3) $(z)_\alpha = ((z)_\beta)_\sigma$, если $\alpha = \beta\sigma$, где $\beta \in \mathbf{I}$, $\sigma \in \{0, 1\}$.

Если $z \in \mathbf{M}$, то множество

$$\mathbf{D}(z) = (\{\alpha | (\alpha = \lambda) \vee ((\alpha = \beta\sigma) \ \& \\ \& \ (\sigma \in \{0, 1\}) \ \& \ \varepsilon((z)_\beta) \neq (\Lambda, \Lambda)))\}$$

называется множеством вершин полного структурного представления (ПСП) конфигурации z в разложении ε. Множество висячих вершин ПСП z обозначим как $\mathbf{O}(z)$.

Введем обозначение

$$[z]_\alpha = \begin{cases} \psi((z)_\alpha), \alpha \in \mathbf{D}(z) \backslash \mathbf{O}(z), \\ (z)_\alpha, \alpha \in \mathbf{O}(z). \end{cases}$$

Бинарное дерево с вершинами из $\mathbf{D}(z)$, помеченными значениями $[z]_\alpha$, где $\alpha \in \mathbf{D}(z)$, называется полным структурным представлением конфигурации z.

3. Трассирования конфигураций

Пусть $\mathbf{d} = (\varepsilon, \psi)$ — декомпозиция конфигураций, для которой отображение d_ε является всюду определенным.

Для пар слов из множества $\mathbf{I}$, одно из которых является началом другого, определим отношение нестрогого включения:

$$\forall \alpha, \beta \in I(\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha \text{ является началом } \beta).$$

Отображение $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ называется изотонным, если:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{I}(\alpha \subseteq \beta \to \xi(\alpha) \subseteq \xi(\beta)).$$

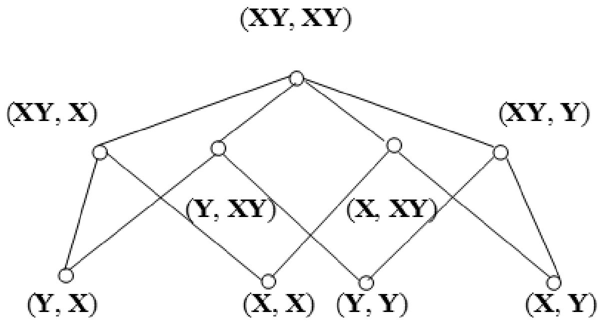

Рис. 1. Диаграмма классов отображений трассирования

Определение 6. Изотонное отображение $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ называется трассированием конфигурации z_1 в конфигурацию z_2, если:

$$(\xi(\mathbf{D}(z_1)) \subseteq \xi(\mathbf{D}(z_2)) \ \& \ \forall$$
$$\forall\alpha \in \mathbf{D}(z_1)(\alpha \in \mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2)\backslash\mathbf{O}(z_2));$$

$$\forall\alpha, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z_1), \sigma \in \{0,1\}\exists\beta, \gamma \in \mathbf{I}$$
$$((\xi(\alpha) \subset (\xi(\alpha\sigma)) \to \xi(\alpha\sigma) = \xi(\alpha)\beta\sigma\gamma)).$$

Трассирования конфигураций образуют специальные семейства изотонных отображений множества $\mathbf{D}(z_1)$ в $\mathbf{D}(z_2)$, сохраняющих свойство элементов $\mathbf{D}(z_1)$ соответствовать внутренней (висячей) вершине бинарного дерева для ПСП конфигурации z_1. Такие отображения также сохраняют значения $\sigma \in \{0,1\}$, если $\alpha\sigma \in \mathbf{D}(z_1)$, $\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma)$ и $\xi(\alpha\sigma) = \xi(\alpha)\beta$, в составе последовательностей β.

Частными случаями трассирований являются отображения множества $\mathbf{I}$ во множество $\mathbf{I}$, для которых сохраняемое отображением значение σ всегда размещается в начале, середине или в конце изменения значения ξ при переходе от $\xi(\alpha)$ к $\xi(\alpha\sigma)$.

Рассмотрим условия на значения двоичных последовательностей: пустая (обозначается как $\mathbf{X}$), непустая ($\mathbf{Y}$) и любая ($\mathbf{XY}$). Возможны девять разных комбинаций этих условий на значения β и γ в определении 6, которые определяют диаграмму классов трассирований z_1 в конфигурацию z_2, изображенную на рис. 1. Вершинам диаграммы приписаны пары условий на значения β и γ.

Связи вершин диаграммы указывают на существование включения соответствующих множеств в направлении снизу-вверх. В зависимости от конфигураций z_1 и z_2 некоторые из классов трассирований могут оказаться пустыми.

Определение 7. Изотонное отображение $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ называется *о*-трассированием конфигурации z_1 в конфигурацию z_2 [2], если выполнены условия:

$$(\xi(\mathbf{D}(z_1)) \subseteq \xi(\mathbf{D}(z_2))) \ \&$$
$$\& \ \forall\alpha \in \mathbf{D}(z_1)(\alpha \in \mathbf{D}(z1)\backslash\mathbf{O}(z_1) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2)\backslash\mathbf{O}(z_2));$$

$$\forall\alpha, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0,1\}((\xi(\alpha) \subset (\xi(\alpha\sigma)) \to$$
$$\to \xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\alpha\sigma))).$$

Класс таких трассирований обозначен на рис. 1 как $(\mathbf{X}, \mathbf{XY})$.

Специальными подклассами множества о-трассирований являются p и с-трассирования

Определение 8. Изотонное отображение $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ образует р-трассирование конфигурации z_1 в конфигурацию z_2 если:

$$(\xi(\mathbf{D}(z_1)) \subseteq \xi(\mathbf{D}(z_2))) \ \&$$
$$\& \ \forall\alpha \in \mathbf{D}(z_1)(\alpha \in \mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2)\backslash\mathbf{O}(z_2));$$

$$\forall\alpha, \alpha\sigma\beta \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0,1\}((\xi(\alpha) \subset (\xi(\alpha\sigma\beta)) \to$$
$$\to \xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\alpha\sigma\beta))).$$

Определение 9. Изотонное отображение $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ называется с-трассированием конфигурации z_1 в конфигурацию z_2, если выполнены условия:

$$(\xi(\mathbf{D}(z_1)) \subseteq \xi(\mathbf{D}(z_2))) \ \&$$
$$\& \ \forall\alpha \in$$
$$\in \mathbf{D}(z_1)(\alpha \in \mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2)\backslash\mathbf{O}(z_2));$$

$$\forall\alpha, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0,1\}((\xi(\alpha) \subset (\xi(\alpha\sigma)) \to$$
$$\to \xi(\alpha)\sigma = \xi(\alpha\sigma))).$$

На рис. 1 класс с-трассирований обозначен как $(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.

Определение 10. Изотонное отображение $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ называется k-трассированием конфигурации z_1 в конфигурацию z_2, если выполнены условия:

$$(\xi(\mathbf{D}(z_1)) \subseteq \xi(\mathbf{D}(z_2))) \ \& \\ \& \ \forall \alpha \in \\ \in \mathbf{D}(z_1)(\alpha \in \mathbf{D}(z_1) \backslash \mathbf{O}(z_1) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2) \backslash \mathbf{O}(z_2));$$

$$\forall \alpha, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0,1\}((\xi(\alpha) \subset (\xi(\alpha\sigma)) \to \\ \to \exists \gamma \in I(\xi(\alpha\sigma) = \xi(\alpha)\gamma\sigma))$$

Класс k-трассирований изображен на рис. 1 как $(\mathbf{XY}, \mathbf{X})$.

Если для некоторых α, $\alpha\sigma \in \mathbf{D}(z_1)$, где $\sigma \in \{0,1\}$, справедливо равенство $|\xi(\alpha)| + 1 \geqslant |\xi(\alpha\sigma)|$, то в этих вершинах трассирование ξ порождает локальное сжатие z_1 в z_2. Трассирование ξ конфигурации z_1 в конфигурацию z_2 называется сжатием, если $\forall \sigma \in \{0,1\} \forall \alpha, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z_1)$ $(|\xi(\alpha)|+1 \geqslant |\xi(\alpha\sigma)|)$.

Если же $|\xi(\alpha)|+1 \leqslant |\xi(\alpha\sigma)|$, то для вершин α и $\alpha\sigma$ трассирование ξ порождает локальное растяжение z_1 в z_2.

Трассирование ξ конфигурации z_1 в z_2 называется растяжением, если $\forall \sigma \in \{0,1\} \forall \alpha, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z_1)$ $(|\xi(\alpha)| + 1 \leqslant |\xi(\alpha\sigma)|)$.

Если ξ является р-трассированием z_1 в z_2, то $\forall \alpha \in \mathbf{D}(z_1) \backslash \mathbf{O}(z_1), \sigma \in \{0,1\}(\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma))$.

Поэтому всякое р-трассирование конфигурации в конфигурацию инъективно и является растяжением.

Следовательно, для отображений р-трассирования возможности локальных сжатий при отображении структуры ПСП одной конфигурации в ПСП другой конфигурации ограничены условием $|\xi(\alpha)| + 1 = |\xi(\alpha\sigma)|$. Для локальных сжатий, если $\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma)$, то справедливо равенство $|\xi(\alpha)| + 1 = |\xi(\alpha\sigma)|$. Поэтому пересечение классов р-трассирований и с-трассирований конфигурации z_1 в конфигурацию z_2 либо пустое, либо состоит из тождественного отображения.

Множество р-трассирований не представлено среди классов трассирований, изображенных на рис. 1.

Обозначим множества трассирований о, р, с, k-трассирований конфигурации z_1 в конфигурацию z_2 как $(\mathbf{XY}, \mathbf{XY})(z_1, z_2)$, $(\mathbf{X}, \mathbf{XY})(z_1, z_2)$, $\mathbf{P}(z_1, \ z_2)$, $(\mathbf{X}, \mathbf{X})(z_1, z_2)$, $(\mathbf{XY}, \mathbf{X})(z_1, z_2)$. Пусть $\mathbf{E}(z_1, \ z_2)$ — пустое множество, если $\mathbf{D}(z_1) \neq \mathbf{D}(z_2)$ или множество, состоящее из тождественной функции id, если $\mathbf{D}(z_1) = \mathbf{D}(z_2)$. Несложно проверить, что $\mathbf{P}(z_1, z_2) \cap (\mathbf{X}, \mathbf{X})(z_1, \ z_2) = \mathbf{E}(z_1, z_2)$. Поэтому для неэлементарных конфигураций справедлива диаграмма вложений перечисленных множеств, изображенная на рис. 2.

Если $z_1, z_2 \in \mathbf{M}$ и ξ это р-трассирование z_1 в z_2, то ξ является инъективным и, как следствие, сохраняет порядок вершин из $\mathbf{O}(z_1)$ при обходе $\mathbf{D}(z_1)$ в глубину сверху вниз и слева направо, отображаемых в вершины из $\mathbf{O}(z_2)$. Если ξ является о-трассированием z_1 в z_2, то приведённые соотношения в общем случае неверны поскольку ξ может оказаться неинъективным и последовательно проходимые вершины множества $\mathbf{O}(z_1)$ отображаются в такие вершины из $\mathbf{O}(z_2)$, последовательность которых не соответствует выбранному порядку прохождения висячих вершин бинарных деревьев. Последнее возможно, если несколько последовательно идущих вершин некоторого пути в $\mathbf{D}(z_1)$отображаются в одну и ту же вершину из $\mathbf{D}(z_2)$. Это позволяет изменять порядок прохождения поддеревьев в $\mathbf{D}(z_2)$ относительно прохождения в глубину отображаемых в них поддеревьев $\mathbf{D}(z_1)$.

Пусть $\xi(\alpha) = \xi(\alpha\sigma) = \xi(\alpha\bar{\sigma}) = \xi(\alpha\bar{\sigma}\bar{\sigma}) = \beta$ и $\xi(\alpha\bar{\sigma}\bar{\sigma}\sigma) = \beta\sigma$, $\xi(\alpha\sigma\overline{\sigma}) = \beta\overline{\sigma}$. Предположим, что наборы, для которых заданными соотношениями определены значения ξ, соответствуют внутренним вершинам дерева $\mathbf{D}(z_1)$.

Тогда вершины поддеревьев $\mathbf{D}(z_1)$, имеющих корни $\alpha\bar{\sigma}\bar{\sigma}\sigma$ и $\alpha\sigma\overline{\sigma}$, отображаются в вершины поддеревьев дерева $\mathbf{D}(z_2)$, корневыми вершинами которых являются $\beta\sigma$ и $\beta\overline{\sigma}$ соответственно. При этом порядки прохождения указанных поддеревьев в $\mathbf{D}(z_1)$ и соответствующих им поддеревьев $\mathbf{D}(z_)$противоположные.

Определение 11. Конфигурация z_1 трассируется (o, p, c, k-трассируется) в конфигурации z_2 ($z_1 \leqslant z_2$ и $z_1 \leqslant_{o,p,c,k} z_2$), если существует такое трассирование (o-трассирование, p-трассирование, c-трассирование, k-трассирование) $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$, z_1 в z_2, что:

3. $\forall \alpha \in \mathbf{O}(z_1)((z_1)_\alpha \rho_0 (z_2)_{\xi(\alpha)})$;

4. $\forall \alpha \in \mathbf{D}(z_1) \ \mathbf{O}(z_1)([z_1]_\alpha \rho_1 [z_2]_{\xi(\alpha)})$.

Отношения p-трассирования и c-трассирования конфигураций являются транзитивными. Отношение o-трассирования конфигураций не транзитивно.

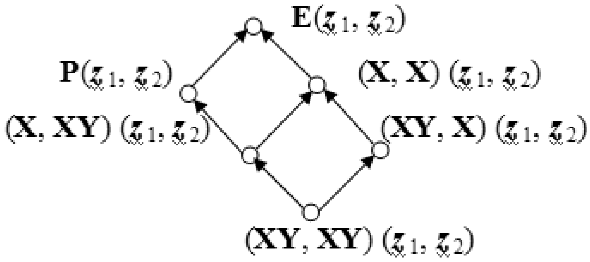

Рис. 2. Диаграмма вложения классов отображений трассирований (**XY**, **XY**) (z_1, z_2), (**X**, **XY**) (z_1, z_2), **P**(z_1, z_2), (**X**, **X**) (z_1, z_2), (**XY**, **X**) (z_1, z_2), **E**(z_1, z_2)

4. Эпиморфизмы конфигураций

В определении понятия **I**-трассирования конфигураций, $\mathbf{I} \in \{O, P, K, C\}$, предполагается, что должны быть заданы пары конфигурации: исходная (трассируемая) конфигурация z_1 и конфигурация z_2, в которую осуществляется трассирование. Поэтому проблема корректности фрагментов z_2, образуемых теми элементами ПСП этой конфигурации, в которые отображаются при трассировании элементы ПСП z_1, частично решается через существование конфигурации z_1, элементы которой прослеживаются в некотором фрагменте z_2.

Если $z \in \mathbf{M}$, то всякое изотонное отображение $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ определяет множество $Val(\xi) \cap \mathbf{D}(z)$, таких компонент ПСП z, из которых может быть составлен информационный объект, являющийся знанием в случае, когда он образует ПСП некоторой конфигурации.

Последовательность $\mathbf{W} = \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots$ элементов **I** образует ветвь в **I**, если $\alpha_1 = \Lambda$ и

$$\forall i(\alpha_i \subset \alpha_{i+1} \ \& \ |\alpha_{i+1}| = |\alpha_i| + 1).$$

Для фиксированной конфигурации $z \in \mathbf{M}$ обозначим как $\mathbf{T}_{\mathrm{p}}(z)$ множество всех таких изотонных отображений $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$, что выполняются соотношения, согласованные с условиями определения p-трассирования

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{I} \forall \sigma \in \{0,1\}((\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma\beta) \to \\ \to (\xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\alpha\sigma\beta)));$$

$$\forall \alpha \in \mathbf{I}(\xi(\alpha) \notin \mathbf{D}(z) \backslash \mathbf{O}(z)) \to \xi(\alpha) \in \mathbf{O}(z)).$$

Удовлетворяющее данным условиям отображение ξ инъективно и является растяжением для всех $\alpha \in \mathbf{I}$, для которых $\xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z) \backslash \mathbf{O}(z)$.

Поэтому $\forall \beta \in \mathbf{D}(z)(\{\alpha \,|\xi(\alpha) = \beta\})$ — конечное множество);

Кроме того, если $\mathbf{W} = \{\alpha_i | i = 1, 2, \ldots\}$ — бесконечная ветвь в **I**, то существует $\beta \in \mathbf{W}$, для которого $\xi(\beta) \notin \mathbf{D}(z) \backslash \mathbf{O}(z)$.

Если $\xi \in \mathbf{T}_{\mathrm{p}}(z)$, то обозначим как $\mathbf{D}_\xi(z)$ множество

$$\{\beta | \forall \alpha \subset \beta(\xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z) \backslash \mathbf{O}(z))\}.$$

Поскольку ξ это растяжение на $\mathbf{D}_\xi(z)$, то $\mathbf{D}_\xi(z)$ непустое и образовано вершинами бесконечного насыщенного бинарного дерева, образующими минимальное поддерево этого дерева, отображаемое с помощью ξ в $\mathbf{D}(z)$.

Поскольку ξ инъективно, на множестве $\mathbf{D}_\xi(z)$, то оно является биективным отображением множества $\mathbf{D}_\xi(z)$ на $\xi(\mathbf{D}_\xi(z))$.

Для бинарного дерева, задаваемого множеством вершин $\mathbf{D}_\xi(z)$, определим нагруженное бинарное дерево $\mathbf{R}_\xi(z)$, внутренним и висячим вершинам $\alpha \in \mathbf{D}_\xi(z)$, которого сопоставлены семантические зависимости и элементарные конфигурации, обозначаемые как $[\mathbf{R}_\xi(z)]_\alpha$, значения которых определяются по правилу:

$$\forall \alpha \in \mathbf{D}_\xi(z)([\mathbf{R}_\xi(z)]_\alpha = [z]_{\xi(\alpha)}).$$

Дерево $\mathbf{R}_\xi(z)$ может не соответствовать никакой конфигурации, если в него включена семантическая зависимость $[z]_{\xi(\alpha)}$, которая не имеет места для фрагментов конфигураций $(z)_{\xi(\alpha)0}$ и $(z)_{\xi(\alpha)1}$, размещаемых в левом и правом поддеревьях $\mathbf{R}_\xi(z)$.

Пусть z — конфигурация, корневая вершина ПСП которой приписана семантическая связь *«эквивалентны»*.

Для z определим изотонное отображение ξ так, чтобы $\xi(\lambda) = \lambda$, а из $(z)_0$ и $(z)_1$ с помощью ξ в дерево $\mathbf{R}_\xi(z)$ включались их семантически неэквивалентные фрагменты. Тогда $\mathbf{R}_\xi(z)$ не является конфигурацией, поскольку семантическая связь, приписанная корневой вершине $\mathbf{D}_\xi(z)$ не связывает объекты, представленные левым и правым поддеревьями $\mathbf{R}_\xi(z)$.

Рассмотрим условия, при которых $\mathbf{R}_\xi(z)$ является ПСП конфигурации пространства конфигураций.

Пусть $z \in \mathbf{M}$, $\alpha \in \mathbf{D}(z)\backslash\mathbf{O}(z)$, $\beta \in \mathbf{D}(z)$ и $\alpha \subseteq \beta$. Обозначим как $C(z, \alpha, \beta)$ результат преобразования ПСП конфигурации z, которое заменяет фрагмент, соответствующий $(z)_\alpha$ на $(z)_\beta$.

Определение 12. Последовательность семантических зависимостей $r_1, \ldots, r_k$ называется транзитивной, для слова $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1} \in \mathbf{I}$, если:

$$\begin{aligned}&\forall \alpha \in \mathbf{I} \forall z \in \\ &\quad \in M(\forall i = 1, \ldots, k([z]_{\alpha\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}} = r_i) \to \\ &\qquad \to C(z, \alpha\sigma_1, \alpha\sigma_1 \ldots \sigma_{k-1}) \in \mathbf{M}).\end{aligned}$$

Примерами транзитивных последовательностей семантических зависимостей являются последовательности, составленные из повторяющихся зависимостей «*являться*» или «*имеет частью*».

Обозначим как $\mathbf{O}_\xi(z)$ — подмножество множества $\mathbf{D}_\xi(z)$, образованное висячими вершинами дерева, соответствующего элементам $\mathbf{D}_\xi(z)$.

Определение 13. Последовательность семантических зависимостей $r_1, \ldots, r_{k-1}$ дополненная элементарной конфигурацией $\mathbf{a}$, называется транзитивной для слова $\sigma_1 \ldots \sigma_{k-1} \in \mathbf{I}$, если

$$\begin{aligned}&\forall \alpha \in \mathbf{I} \forall z \in \\ &\quad \in \mathbf{M}((\alpha\sigma_1 \ldots \sigma_{k-1} \in \mathbf{D}_\xi(z)\backslash\mathbf{O}_\xi(z) \ \& \\ &\qquad \& \ [z]_{\alpha\sigma_1\ldots\sigma_k} = \mathbf{a}) \ \& \\ &\quad \& \ \forall i = 1, \ldots, k-1([z]_{\alpha\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}} = r_i)) \to \\ &\qquad \to C(z, \alpha\sigma_1, \alpha\sigma_1 \ldots \sigma_{k-1}) \in \mathbf{M}).\end{aligned}$$

Определение 14. Отображение $\xi \in \mathbf{T}_p(z)$ называется транзитивным, если

$$\begin{aligned}&\forall z \in \mathbf{M} \forall \alpha \in \mathbf{D}_\xi(z)\backslash\mathbf{O}_\xi(z) \forall \sigma \in \\ &\quad \in \{0,1\}(\xi(\alpha\sigma) = \xi(\alpha)\sigma_1 \ldots \sigma_k \to \\ &\quad \to \text{ последовательность } \{[z]_{\alpha\sigma_1\ldots\sigma_i}\}, \\ &\quad i = 1, \ldots, k, \text{ является транзитивной} \\ &\qquad \text{для } \sigma_1 \ldots \sigma_k.\end{aligned}$$

Теорема 1. Если $\xi \in \mathbf{T}_p(z)$ транзитивное отображение, то $\mathbf{R}_\xi(z)$ образует ПСП некоторой конфигурации.

Доказательство.

Если z является элементарной конфигурацией, то справедливость утверждения теоремы следует из того, что $\mathbf{R}_\xi(z) = z$.

Пусть z — неэлементарная конфигурация. Рассмотрим значения

$$\xi(\lambda), \xi(0) = \xi(\lambda)\sigma_1 \ldots \sigma_k \text{ и } \xi(1) = \xi(\lambda)\delta_1 \ldots \delta_t.$$

По условиям теоремы, последовательности семантических зависимостей

$$[z]_{\xi(\lambda)\sigma_1\ldots\sigma_i}, i = 1, \ldots, k \text{ и } [z]_{\xi(\lambda)\delta_1\ldots\delta_i}, \quad i = 1, \ldots, t$$

являются транзитивными для слов $\xi(\lambda)\sigma_1 \ldots \sigma_k$ и $\xi(\lambda)\delta_1 \ldots \delta_t$.

Поэтому иерархическая структура $C(C(z, \alpha\sigma_1, \alpha\sigma_1 \ldots \sigma_k), \alpha\delta_1, \alpha\delta_1 \ldots \delta_t)$, корень которой размечен значением $[z]_{\xi(\lambda)}$, а его левое и правое поддеревья образованы ПСП конфигураций $(z)_{\xi(\lambda)\sigma_1\ldots\sigma_k}$ и $(z)_{\xi(\lambda)\delta_1\ldots\delta_t}$ является ПСП конфигурации z^1.

Каждую из неэлементарных конфигураций $(z^1)_0 = (z)_{\xi(\lambda)\sigma_1\sigma_k}$ и $(z^1)_1 = (z)_{\xi(\lambda)\delta_1\ldots\delta_t}$ с помощью отображения ξ можно преобразовать в новую конфигурацию, подобно преобразованию конфигурации z в z^1. При этом замена в z^1 подконфигураций $(z^1)_0$ и $(z^1)_1$ на результаты их преобразования преобразует z^1 в конфигурацию z^2.

Если в последовательности $(z^2)_{00}$, $(z^2)_{01}$, $(z^2)_{10}$, и $(z^2)_{11}$ имеются неэлементарные конфигурации, то заменим каждую из них на новую конфигурацию, получаемую с помощью ξ. Итоговую конфигурацию обозначим как z^3.

Продолжим процесс до тех пор, пока все рассматриваемые на очередном шаге подконфигурации, полученной на предыдущем шаге конфигурации z^k, не станут элементарными. Справедливо соотношение $\mathbf{R}_\xi(z) = z^k$.

Доказательство окончено.

Транзитивность последовательности семантических зависимостей $r_1, \ldots, r_k$ имеет место, если с помощью $r_2, \ldots, r_k$ в конфигурацию, корню которой приписана r_1, встраиваются сведения, включение которых в конфигурацию с помощью $r_2, \ldots, r_k$ не влияет на выполнимость зависимости r_1.

Определение 15. p-эпиморфизмом конфигураций называется всякое вычислимое отображение $\mu : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, для которого

$$\forall z \in \mathbf{M}(\mu(z) = z' \leftrightarrow \exists \xi \in \mathbf{T}_p(z)(z' = \mathbf{R}_\xi(z))).$$

Теорема 2. Множество p-эпиморфизмов конфигураций замкнуто относительно суперпозиции.

Доказательство.

Пусть $\mu_1 : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ и $\mu_2 : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ — р-эпиморфизмы конфигураций.

Поскольку μ_2 и μ_1 являются вычислимыми, то для конфигураций z и $\mu_1(z)$ существуют такие $\xi_1 \in \mathbf{T}_p(z)$ и $\xi_2 \in \mathbf{T}_p(\mu_1(z))$, которые являются р-трассированиями $\mu_1(z)$ в z и $\mu_2\mu_1(z)$ в $\mu_1(z)$ соответственно, для которых выполнены условия определения 8.

Определим функцию $\xi' : Val(\xi_1(\mathbf{D}(z))) \to \mathbf{I}$ соотношениями

$$\xi'(\xi_1(\lambda)) = \lambda,$$

$\forall\sigma \in \{0,1\}, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z)(\xi'(\xi_1(\alpha\sigma)) = \xi'(\xi_1(\alpha))\sigma)$,

Суперпозиция $\xi = \xi_2\xi'\xi_1$ является р-трассированием z в $z' = \mu_2\mu_1(z)$ поскольку:

$$\begin{gathered}(\xi(\mathbf{D}(z)) \subseteq \mathbf{D}(\mu_2\mu_1(z))) \text{ и} \\ \forall\alpha \in \mathbf{D}(z)(\alpha \in \mathbf{D}(z)\backslash\mathbf{O}(z) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z')\backslash\mathbf{O}(z')) \text{ и} \\ \forall\alpha, \alpha\sigma \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0,1\}(\xi(\alpha\sigma) = \xi(\alpha)\sigma\beta)).\end{gathered}$$

Следовательно, $z' = R_{\xi_2\xi'\xi_1}(z)$.

Суперпозиция $\mu_2\mu_1$ является р-морфизмом. Поэтому

$$\forall z \in \mathbf{M}(\mu_2\mu_1(z) = z' \leftrightarrow \exists\xi \in \mathbf{T}_p(z)(z' = \mathbf{R}_\xi(z))).$$

Доказательство окончено.

Пусть $\mathbf{T}_o(z)$ — множество таких изотонных отображений $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$, для которых выполняются условия:

$$\begin{gathered}\forall\alpha \in \mathbf{I}, \sigma \in \{0,1\}(\xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z) \ \& \ \xi(\alpha\sigma) \in \\ \in \mathbf{D}(z) \ \& \ (\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma)) \to \\ \to \xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\alpha\sigma));\end{gathered}$$

$$\forall\alpha \in \mathbf{I}(\xi(\alpha) \notin \mathbf{D}(z)\backslash\mathbf{O}(z)) \to \xi(\alpha) \in \mathbf{O}(z)).$$

Если $\xi \in \mathbf{T}_o(z)$, то обозначим как $\mathbf{\Gamma}_\xi(z)$ множество элементов $\mathbf{I}$, состоящее из λ, а также наименьшего поддерева в $\mathbf{I}$, для которого

$$Val(\xi) = \xi(\mathbf{\Gamma}_\xi(z)).$$

Определим множество

$$\mathbf{\Phi}_\xi(z) = \xi(\mathbf{\Gamma}_\xi(z)) = \{\xi(\beta) | \beta \in \mathbf{\Gamma}_\xi(z)\}.$$

Пересечением элементов $\mathbf{I}$ называется операция $\cap$, сопоставляющая произвольным $\alpha, \beta \in \mathbf{I}$ их наибольшее общее начало.

Всякому отображению $\xi \in \mathbf{T}_o(z)$ сопоставим нагруженное дерево $\mathbf{R}_\xi(z)$, конструируемое из элементов ПСП z с помощью следующей процедуры.

Пусть $\mathbf{L}$ — первоначально пустой список конечных подмножеств множества $\mathbf{I}$, а η — последовательно формируемое о-трассирование объекта $\mathbf{R}_\xi(z)$ в z.

1) положим

$$[\mathbf{R}_\xi(z)]_\lambda = (z)_{\xi(\lambda)} \ \& \ \eta(\lambda) = \xi(\lambda);$$

2) добавим к $\mathbf{L}$ те из множеств

$$P_\sigma = \{\eta(\lambda)\sigma\beta \,|\eta(\alpha)\sigma\beta \in \mathbf{\Phi}_\xi(z)\}, \sigma \in \{0,1\} ,$$

которые являются непустыми;

3) пока список $\mathbf{L}$ непустой повторно выполняются действия:

а) для первого по порядку множества

$$P_{\alpha\sigma}, \alpha \in \mathbf{I}, \sigma \in \{0,1\} \text{ из } \mathbf{L}$$

положим $\gamma = \bigcap\limits_{\beta \in P\alpha\sigma} (\beta)$;

б) положим $[\mathbf{R}_\xi(z)]_{\alpha\sigma} = [z]_\gamma$ и $\eta(\alpha\sigma) = \gamma$;

в) добавим к $\mathbf{L}$ те из двух множеств

$$\begin{aligned}P_{\alpha\sigma\delta} = \{\eta(\lambda)\sigma\delta\beta \,|\beta \in \mathbf{I} \ \& \ \delta \in \{0,1\} \ \& \\ \& \ \eta(\alpha)\sigma\delta\beta \in \mathbf{\Phi}_\xi(z)\}, \sigma \in \{0,1\},\end{aligned}$$

которые являются непустыми.

Последовательное выполнение правил 1–3 за конечное число шагов формирует множество вершин нагруженного бинарного дерева $\mathbf{R}_\xi(z)$.

Определение 14. Эпиморфизмом конфигураций называется всякое вычислимое отображение $\mu : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, для которого

$$\forall z \in \mathbf{M}(\mu(z) = z' \leftrightarrow \exists\xi \in \mathbf{T}_o(z)(z' = \mathbf{R}_\xi(z))).$$

Теорема 3. Множество эпиморфизмов конфигураций не замкнуто относительно суперпозиции.

Доказательство.

Определим конфигурацию z и такие о-трассирования ξ_1 и ξ_2, что $z' = \mathbf{R}_{\xi_1}(z)$ и $z'' = \mathbf{R}_{\xi_2}(z')$ являются конфигурациями и не существует о-трассирования ξ, для которого $z'' = \mathbf{R}_\xi(z)$.

Пусть z, z' и z'' — конфигурации, ПСП которых приведены на рис. 3 и 4.

Определим ξ_1 с помощью соотношений $\xi_1(\lambda) = \xi_1(0) = \xi_1(1) = \lambda$ и $\xi_1(00) = 01, \xi_1(01) = 11, \xi_1(10) = 00, \xi_1(11) = 10$.

Значения ξ_1 на множестве $\mathbf{O}(z)$ доопределяются однозначно. Преобразование ПСП конфигураций z в $z' = \mathbf{R}_{\xi_1}(z)$ изображено на рис. 3. Числами 1–4 обозначены вершины из $\mathbf{D}(z)$, изменяющие своё положение при

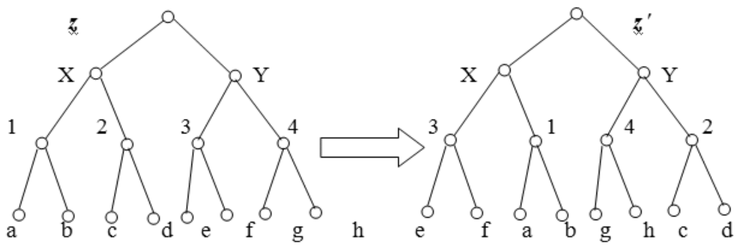

Рис. 3. Преобразование ПСП конфигураций z в $z' = \mathbf{R}_{\xi_1}(z)$

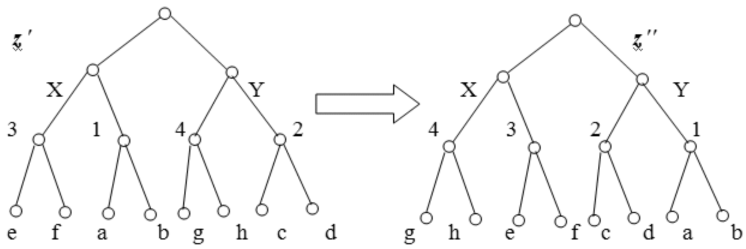

Рис. 4. Преобразование ПСП конфигураций z' в $z'' = \mathbf{R}_{\xi_2}(z')$

трассировании ξ_1. Символы a–h обозначают несравнимые элементарные конфигурации.

Положим $\xi_2 = \xi_1$. Тогда ξ_2 определяет преобразование конфигурации z' в конфигурацию $\mathbf{R}_{\xi_2}(z')$ приведённое на рис. 4.

Пусть μ_1 и μ_2 — эпиморфизмы конфигураций, для которых выполняются соотношения $\mu_1(z) = z'$ и $\mu_2(z') = z''$. Справедливо свойство

$$\forall \xi \in \mathbf{T}_o(\xi(\mathbf{O}(z)) = \mathbf{O}(z) \to \xi(111) \neq 001).$$

Если суперпозиция μ_1 и μ_2 является эпиморфизмом, то должно существовать такое отображение $\xi \in \mathbf{T}_{\mathrm{o}}(z)$, что $z'' = \mathbf{R}_\xi(z)$.

Следовательно,

$$\forall \xi \in \mathbf{T}_o(\mu_2\mu_1(z)(z' \neq \mathbf{R}_\xi(z))).$$

Поэтому $\mu_2\mu_1$ не является эпиморфизмом конфигураций.

Доказательство окончено.

5. Заключение

Эпиморфизмы конфигураций представляют методы извлечения знаний из знаний, реализуемые с помощью подходящих отображений трассирования. Изучение таких отображений связано задачами интеграции систем знаний в новые знания, анализа структуры знаний, отысканием сложных знаний, имеющих минимальную комбинаторную сложность.

Литература

1. Общая алгебра. Т. 2 / Под общ. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. 480 с.
2. *Костенко К. И.* Биморфизмы конфигураций абстрактных пространств знаний // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 2. С. 6–14.

Статья поступила 24 января 2007 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар

На множествах структурных представлений конфигураций абстрактного пространства знаний определяются отображения трассирования. Рассмотрены свойства разных видов трассирования и задача извлечения семантически корректных фрагментов конфигураций с помощью таких отображений.