АТ-группы, не являющиеся АТ-подгруппами: переход от AT_ω-групп к AT_Ω-группам[1]

Рожков А.В.
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россиия
great.ros.marine2@gmail.com

АТ-группы [2] - это обобщение известного примера С.В.Алешина [1] ф.а. бернсайдовой группы.

Пусть A — последовательность множеств, каждое из которых содержит не менее двух элементов, T (T_A) — слойно однородное дерево, построенное над последовательностью A.

Группа, порожденная корневыми и продольными автоморфизмами дерева T, удовлетворяющими некоторым дополнительным условиям, называется АТ-группой над деревом T.

Если последовательность A состоит из групп, то АТ-группа называется регулярной,

если из циклических групп конечного порядка $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, ...)$, то AT_Ω-группой,

из циклических групп простого порядка $\omega = (\omega_1, \omega_2, ...)$, AT_ω**-группой.**

Если последовательность A состоит из конечных множеств, то АТ-группа ф.а.

Все АТ-группы бесконечны и имеют тривиальный централизатор в группе $Aut(T)$ дерева T.

С помощью АТ-групп решен ряд проблем теории групп, связанных с условиями конечности.

Например, построена 2-порожденная периодическая АТ-группа, в которую вложена любая конечная группа.

AT_ω-группы отличаются от остальных АТ-групп так же сильно, как циклические группы простого порядка отличаются от других простых групп.

Дело в том, что группа $\mathbb{Z}_p$ порождается любым своим неединичным элементом, является полем, поэтому сопровождающие перестановки продольных порождающих AT_ω-группы задаются векторами над полем Галуа и т.д.

В силу этого к AT_ω-группам применимыми методы линейной алгебры. Именно поэтому почти все исследованные к настоящему времени АТ-группы являются AT_ω-группами.

AT_ω-группы не просто один из подклассов АТ-групп, это **Элементарные АТ-группы**, которые не могут быть дальше упрощены или разложены на более простые конструкции.

AT_ω-группы присутствуют, как кирпичики, во всех регулярных АТ-группах над последовательностью периодических групп.

Если же группы из последовательности A не периодические, то еще одной элементарной АТ-группой будет любая $AT_\mathbb{Z}$-группа над последовательностью $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, ...$

Теорема 1. *Вычислены стабилизаторы, костабилизаторы и индексы ряда коммутантов четырех модельных $AT_\mathbb{Z}$-групп $gr(c, d)$, где c — корневой порождающий, а продольный порождающий имеет один из перечисленных ниже видов:*

$$d := (d, c, 1, 1, ...); d := (d, c, c, c, ...); d := (d, c, c^{-1}, 1, 1, ...); d := (d, c, c^2, c^3, ...).$$

Техника вычислений. *На поддереве $T_v, |v| = n$, с начальной вершиной v, АТ-группа G индуцирует АТ-группу G_n — $n-$срезку. У G_n корневыми порождающими будут n-е сопровождающие перестановки продольных порождающих группы G, а продольными порождающими их n-хвостики. Поэтому сужая порождающие элементы на поддеревья мы опять получим элементы того же вида и можно вести индукцию.*

1. Индукция по слоговой длине. Каждый элемент группы G можно записать в виде $C_1 * D_1 * ... * D_n * C_{n+1}$, где C_i — произведение некоторых корневых порождающих, D_i — произведение некоторых продольных порождающих. Слоговой длиной называется число сомножителей вида D, т.е. число n.

2. Костабилизаторы вершин. По определению $cost(v)$ — наибольшая подгруппа группы G нетождественно действующая только на поддереве $T_v, |v| = n$, база $n = 1$.

[1]Проект реализуется победителем Конкурса на предоставление грантов благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина

3. Главные костабилизаторы — прямое произведение костабилизаторов вершин n-го слоя. База $n = 1$.

$$cost(n) = gr(cost(v)||v| = n) \cong \prod_{|v|=n} cost(v).$$

Фундаментальное значение имеет первый главный костабилизатор $cost(1)$ — он наибольшее прямое произведение подгрупп, содержащееся в группе G.

В [3] глава 2 посвящена исчерпывающему описанию этой важнейшей подгруппы для случая AT_ω-групп.

Теорема 2. *Пусть G — AT_ω-группа, где последовательность ω состоит только из нечетных простых чисел, тогда фактор группа $st(1)/cost(1)$ — это подпрямое произведение или коммутативных, или нильпотентных ступени 2, или метабелевых групп.*

То есть в AT_ω-группе G конечный индекс имеет прямая степень или коммутанта, или второго централа, или второго коммутанта ее 1-срезки G_1.

Определение. *Подгрупа AT-группы G называется* **AT-подгруппой**, *если она AT-группа над тем же деревом T, что и группа G.*

Важность этого понятия стала очевидна в процессе решения следующей задачи.

Вопрос 16.79. *Верно ли, что в любой конечно порожденной AT-группе над последовательностью циклических групп, порядки которых ограничены, все силовские подгруппы локально конечны?*

Теорема 3. *Если у ограниченной последовательности Ω, (не являющейся ω) все члены, начиная с некоторого номера, делятся на простое число p, то существует AT_Ω-группа с нелокально конечной силовской p-подгруппой, которая будет AT-группой, но не AT-подгруппой. Если ни один "хвост"последовательности Ω не имеет такого простого числа p, то все силовские подгруппы любой такой AT_Ω-группы локально конечны.*

Следует отметить, что для AT_ω-группы, если она не является почти p—группой, ответ на вопрос 16.79 утвердительный.

Для краткости подгруппу AT-группы, которая является AT-группой, но не AT-подгруппой будем называть **внутренней AT-группой**.

Теорема 4. *Если регулярная AT-група G над последовательностью переодических групп не имеет внутренних AT-груп, то G — AT_ω-группа.*

Определение. *Пусть $A = (A_1, A_2, ...)$ — последовательность периодических групп, $B = (B_1, B_2, ...)$ — последовательность их подгрупп, тогда слойно однородное дерево T_B называется* **внутренним поддеревом** *слойно однородного дерева T_A и обозначается $T_B \leq T_A$.*

Пусть $\pi(G)$ множество тех простых чисел p, для которых группа G содержит элемент порядка p.

Утверждение 1. *Пусть $A = (A_1, A_2, ...)$ — последовательность периодических групп, $\pi(A) = (\pi(A_1), \pi(A_2), ...)$ — последовательность множеств, $W(A) = \{\omega | \omega = (\omega_1, \omega_2, ...), \omega_i \in \pi(A_i), i \in \mathbb{N}\}$ — всевозможные ω последовательности. (Отметим в скобках, что если $A = \omega$, то $W(\omega) = \{\omega\}$ и именно в этом состоит элементарность AT_ω-групп.) Тогда для любого $\omega \in W$ имеем $T_\omega \leq T_A$.*

Подгруппами AT-группы G над последовательностью A могут быть AT_ω-группы для некоторых (а может и для всех) $\omega \in W(A)$. Какие именно — вопрос зависящий от конкретной AT-группы G. Изучение внутренних AT_ω-групп вполне реальный путь изучения произвольной AT-группы G над последовательностью периодических групп.

Пример. *Пусть $A = (A_1, A_2, ...)$ — последовательность периодических групп, T — слойно однородное дерево над последовательностью A. Группа, порожденная всеми корневыми и продольными автоморфизмами дерева T называется общей AT-группой и обозначается $GAT(T)$. Нетрудно проверить, что для любого $\omega \in W$ имеет место включение $GAT(\omega) \leq GAT(T)$.*

В случае, если AT-группа G не является регулярной, т.е. последовательность A состоит из множеств без групповой структуры, для изучения группы G также можно применить внутренние AT_ω-группы.

Пусть $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, ...)$ — сопровождающие группы перестановок AT-группы G. Пусть все сопровождающие группы периодические. По аналогии с Утверждением 1 находим последовательность множеств $\pi(\Pi) = (\pi(\Pi_1), \pi(\Pi_2), ...)$ и множество омега-последовательностей $W(\Pi) = \{\omega | \omega = (\omega_1, \omega_2, ...), \omega_i \in \pi(\Pi_i), i \in \mathbb{N}\}$.

Отличие от регулярного случая состоит в следующем.

При построении внутреннего поддерева дерева T_A мы будем использовать сопровождающие перестановки простого порядка p. Эти перестановки будут произведением одного или нескольких циклов длины p. Выбрать мы можем любой из этих циклов и элементы именно этого цикла взять в качестве вершин данного слоя слойно однородного дерева.

Поэтому по одной ω последовательности простых чисел может быть построено несколько, а может быть даже и бесконечно много, разных внутренних поддеревьев.

Конечно, они будут изоморфны, но задействованы будут разные ребра и разные вершины исходного дерева.

Это универсальный план исследования AT-групп.

Остается понять, какую AT_ω-группу на ω-поддереве индуцирует исходная AT-группа G.

Возможно существует универсальный механизм нахождения этих проекций.

В данной работе начато изучение AT_Ω-групп.

Пока только для случая, когда все группы последовательности Ω состоят из циклических p-групп.

Получен аналог теоремы 2. Ее формулировка весьма громоздка, как и исходная теорема 2.

Нетривиален даже случай, когда простое число p фиксировано и порядки всех групп последовательности A ограничены в совокупности.

Список литературы

[1] С. В. Алешин, Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах. *Матем. заметки*, **11**: 3 (1972), 319–328.

[2] А. В. Рожков, К теории групп алешинского типа, it Мат. заметки, **40**: 5 (1986), 572–589.

[3] А. В. Рожков, Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев. Дисс. на соиск. уч. степени доктора физ.-мат. наук, Красноярск, 1997.