А. В. Рожков, Централизаторы элементов в одной группе автоморфизмов деревьев, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1993, том 57, выпуск 6, 82–105

УДК 512

 А.В. РОЖКОВ

ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ ЭЛЕМЕНТОВ В ОДНОЙ ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ ДЕРЕВЬЕВ

В 2-группе Григорчука описываются конечно порожденные централизаторы элементов (ответ на вопрос Леннокса). Изучаются повторные централизаторы элементов, централизаторы инволюций. Положительно решен аналог конгруэнц-проблемы. Вычислены индексы конгруэнц-подгрупп и членов ряда коммутантов.

Введение

В данной работе детально изучаются централизаторы элементов в группе Григорчука [1]. Группа Григорчука H – бесконечная 3-порожденная 2-группа. Из многочисленных ее реализаций мы выбираем наиболее универсальную – в виде автоморфизмов 2-дерева. "Дискретный" характер задания группы H не должен затушевывать ее "непрерывные" свойства: в силу промежуточности роста [2] на группе Григорчука существует инвариантное интегрирование.

Эта группа является частным случаем одной общей конструкции [3] групп, называемых нами АТ-*группами*, включающей в себя примеры С.В. Алешина [4]. Различные реализации этой и других групп и их обобщений появлялись [5, 6] и продолжают появляться до сих пор. Недавний пример — работа [7, 8], в которой определена операция обобщенного сплетения.

О группе Григорчука уже многое известно: описаны ее соотношения [9], нормальные подгруппы [2], абелевы и конечные подгруппы и некоторые другие подгруппы. Однако централизаторы элементов отдельно не изучались.

Основной результат статьи – ответ на вопрос Леннокса Д. [11]: конечно порожден ли централизатор порождающего f группы H? Ответ отрицателен. Более того, описаны все элементы, имеющие конечно порожденный централизатор. Как оказалось, все они сопряжены с порождающим c группы H.

Доказано также, что централизатор каждого неединичного элемента имеет бесконечный индекс в централизаторе своего квадрата. В то же время повторный централизатор любого элемента конечен. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы повторный централизатор инволюции был тривиален, т.е. имел порядок 2.

Инволюции оказались интересны во многих отношениях. Прежде всего, различные инволюции имеют различные централизаторы. Однако централизаторы любых двух инволюций имеют бесконечное пересечение. Далее, централизаторы инволюций – самонормализующиеся подгруппы. Централизатор элемента тогда и только тогда не содержится в централизаторе другого элемента, когда он – централизатор инволюции с тривиальным повторным централизатором.

Приводится пример двух сопряженных инволюций, централизаторы которых пересекаются по бесконечно порожденной подгруппе, в то время как сами конечно порождены. В частности, получаем, что группа H не обладает свойством Хаусона.

Доказано, что данную подгруппу в качестве централизатора может иметь только конечное число элементов, причем все они сопряжены в некоторой группе, содержащей H, а возможно, и в самой H. (Вопрос открыт.)

Техника, развитая для вычислений в централизаторах, применяется и для решения других задач. Например, в статье положительно решен аналог конгруэнц-проблемы, вычислены индексы конгруэнц-подгрупп, стабилизаторов и костабилизаторов конечных вершин (кортежей), индексы ряда коммутантов группы H.

Отметим, что в группе H примерами самонормализующихся подгрупп, наряду с централизаторами инволюций, являются и централизаторы бесконечных кортежей [12]. (Формально группа H в [12] не рассматривается, однако все рассуждения проходят и для нее.) Более того, централизаторы бесконечных кортежей максимальны среди подгрупп бесконечного индекса. К сожалению, этим свойством не обладает ни один из централизаторов инволюций, поэтому утверждение в) теоремы 2 из [13] не верно.

Формулировки большинства теорем без изменений переносятся на произвольные конечно порожденные периодические AT_ω-группы, ω – последовательность нечетных простых чисел. Однако возникающие при перенесении доказательств сложности весьма значительны.

Изложение статьи замкнуто и не использует других источников. Формально мы пользуемся в первых параграфах периодичностью группы H и отсутствием в ней нееденичных нормальных подгрупп бесконечного индекса. Однако оба этих факта доказываются (попутно) и в § 4 и § 7 соответственно, причем порочного круга при этом не возникает.

§ 1. Основные определения

Рассмотрим бесконечное однородное 2-дерево D (рис. 1), у которого начальная вершина помечена символом ϕ, а остальные вершины конечными последовательностями (кортежами) из 0 и 1. В дальнейшем мы не будем различать вершины и помечающие их кортежи. Пусть u и υ – вершины дерева D, будем писать $u \leqslant \upsilon$, если кортеж u является началом кортежа υ. Автоморфизм дерева D однозначно задается набором подстановок ребер, помещенных в вершинах дерева.

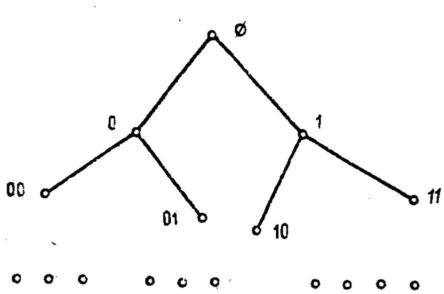

Рис. 1

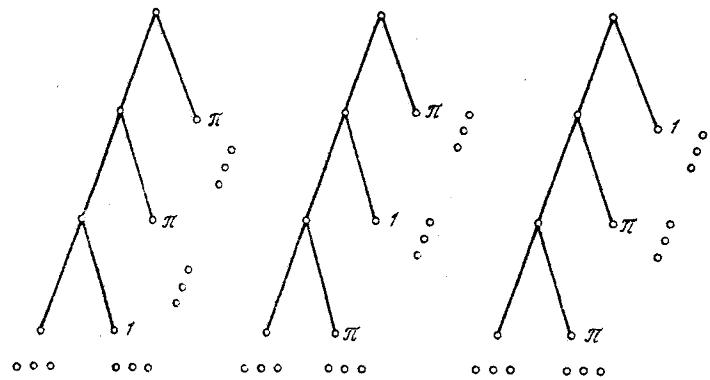

Рис. 2

Группа Григорчука H порождается четырьмя, фактически тремя, автоморфизмами c, f, g, h дерева D. Автоморфизм c имеет единственную нетождественную подстановку $\pi = (0, 1)$, помещенную в начальную вершину дерева D. Автоморфизмы f, g, h задаются согласно рис. 2, где последовательности $\pi, \pi, 1, \ldots, \pi, 1, \pi, \ldots, 1, \pi, \pi, \ldots$ циклически повторяются, а во всех остальных вершинах стоят тождественные подстановки. Из этих определений следует, что

$$c^2 = f^2 = g^2 = h^2 = 1, \quad fg = h, \quad gh = f, \quad hf = g.$$

Мы будем использовать следующие обозначения. Если υ – вершина, то D_υ – поддерево с начальной вершиной υ. Деревья D и D_υ естественным образом изоморфны. Пусть

$$\mathrm{id}^{(\upsilon)}: D \to D_\upsilon$$

– указанный изоморфизм, который мы будем обозначать $\mathrm{id}^{(\upsilon)}$, если важна только длина n кортежа υ. Указанный изоморфизм естественным образом задает изоморфизм

$$\mathrm{Aut}\, D \to \mathrm{Aut}\, D_\upsilon$$

групп автоморфизмов деревьев, который мы будем обозначать теми же символами $\mathrm{id}^{(\upsilon)}$ и $\mathrm{id}^{(n)}$.

Если $G \leqslant \mathrm{Aut}\, D$, V – некоторое подмножество вершин дерева D, то по определению

$$\mathrm{st}_G(V) = \bigcap \mathrm{st}_G(\upsilon), \ \mathrm{cost}_G(\upsilon) = \mathrm{гр}(\mathrm{st}_G(D \backslash D_\upsilon) \mid \upsilon \in V)$$

– стабилизатор и костабилизатор множества V соответственно. Нетрудно видеть, что $\mathrm{cost}_G(\upsilon) \lhd \mathrm{st}_G(\upsilon)$ и при $u \leqslant \upsilon$

$$\mathrm{st}_G(\upsilon) \leqslant \mathrm{st}_G(u), \quad \mathrm{cost}_G(\upsilon) \leqslant \mathrm{cost}_G(u).$$

Кроме того, при несравнимых u и υ костабилизаторы $\mathrm{cost}(u)$ и $\mathrm{cost}(\upsilon)$ поэлементно перестановочны.

Пусть $\| \upsilon \|$ – длина кортежа υ; тогда по определению

$$\mathrm{st}_G(n) = \bigcap \mathrm{st}_G(\upsilon), \quad \mathrm{cost}_G(n) = \mathrm{гр}(\mathrm{cost}_G(\upsilon) \mid \| \upsilon \| = n).$$

Если $x \in \mathrm{st}(\upsilon)$, то сужение автоморфизма x на поддерево D_υ будем обозначать $x_{[\upsilon]}$ и называть υ-*срезкой*. Если $x \in \mathrm{st}(n)$, то автоморфизм x однозначно определяется своими υ-срезками, $\|\upsilon\| = n$, и естественно отождествление

$$x = (\ldots, x_{[\upsilon]}, \ldots) \circ \mathrm{id}^{(n)}, \qquad \|\upsilon\| = n.$$

Чаще всего мы будем пользоваться им при $n = 1$, опуская в обозначении $\mathrm{id}^{(1)}$ индекс (1).

В указанных обозначениях имеем

$$f = (g, c) \circ \mathrm{id}, \quad \text{или} \quad f = (g \circ \mathrm{id}, c \circ \mathrm{id}).$$

Таким образом,

$$g = (h, c) \circ \mathrm{id}, \qquad chc = (1, f) \circ \mathrm{id}, \ldots$$

Очевидно, $\mathrm{st}(1) = \text{гр}(f, g, cfc, cgc)$, и, значит, $\mathrm{st}(1)_{[\upsilon]} = H \circ \mathrm{id}$ при $\upsilon = 0, 1$. Следовательно, $\mathrm{st}(\upsilon)_{[\upsilon]} = H \circ \mathrm{id}^{(\upsilon)}$, для любой вершины υ.

Произведем некоторые вычисления:

$$(ch)^2 = (1, f) \circ \mathrm{id} \cdot (f, 1) \circ \mathrm{id} = (f, f) \circ \mathrm{id},$$

следовательно, $(c \cdot h)^{2 \cdot 2} = 1$. Аналогично, $(cg)^8 = (cf)^{16} = 1$. Таким образом, $\text{гр}(c, h) \cong D_4$, $\text{гр}(c, g) \cong D_8$, $\text{гр}(c, f) \cong D_{16}$.

Подгруппы $\mathrm{st}(\upsilon)$ и $\mathrm{cost}(\upsilon)$ при $\upsilon = 1$ будем обозначать соответственно $\mathrm{st}((1))$ и $\mathrm{cost}((1))$. Условимся также, что в обозначениях стабилизаторов, костабилизаторов, централизаторов и нормализаторов, если они рассматриваются во всей группе H или во всей группе $H \circ \mathrm{id}^{(n)}$, мы будем опускать для краткости индексы H и $H \circ \mathrm{id}^{(n)}$.

§ 2. Основные леммы

Если X – подмножество группы G, то $\overline{X}^G$ – нормальное замыкание множества X в группе G.

Ниже мы подробно изучим подгруппы K, L, M группы H:

$$K = \overline{(cf)^2}^H, \quad L = \bar{f}^H, \quad M = \text{гр}((ch)^2, L).$$

ЛЕММА 1. *Подгруппа L нормальна в группе H,*

$$L = \text{гр}(f, f^c, (fh^c)^2, (f^ch)^2) \quad \textit{и} \quad H / L \cong D_4.$$

Доказательство. а) Правую часть первого равенства обозначим L_1. Так как h – инволюция, то, очевидно, $L_1 \leqslant L$, и для доказательства равенства достаточно показать, что $L_1 \triangleleft H$. Поскольку группа H порождается элементами c, f, h и $f \in L_1$, то для проверки нормальности достаточно сопрягать порождающие элементы группы L_1 только элементами c и h. Имеем

$$hf^ch = f^c(f^ch)^2, \quad h(fh^c)^2h = (1, (cf)^2) \circ \mathrm{id} = (fh^c)^2,$$

$$h(f^ch)^2h = (hf^c)^2 = ((fc)^2, 1) \circ \mathrm{id} = ((cf)^{14}, 1) \circ \mathrm{id} = (f^ch)^{14}.$$

Результат сопряжений при помощи c очевиден.

б) Докажем утверждение о факторгруппе. Так как $H = \text{гр}(c, h) \cdot L$, то достаточно показать, что $|H : L| \geqslant 8$. Для этого рассмотрим факторгруппу $\overline{H} = H/\mathrm{st}(3)$ и в ней подгруппу $\overline{L}$ – образ подгруппы L. Обозначим вершины 000, 001, 010, 011,..., 111 символами 1, 2,..., 8 соответственно. Тогда образы порождающих c, f, g, h, как подстановки на 8 символах, имеют вид

$$\bar{c} = (15)(26)(37)(48), \quad \bar{f} = (34)(57)(68), \quad \bar{g} = (57)(68), \quad \bar{h} = (34).$$

Нетрудно видеть, что

$$\overline{H} = \text{гр}(\overline{c}, \overline{g}, \overline{h}) \cong \text{гр}(\overline{h}) \wr \text{гр}(\overline{g})) \wr (\overline{c}) \cong (\mathbf{Z}_2 \wr \mathbf{Z}_2) \wr \mathbf{Z}_2 ,$$

где $\overline{c}$ – самый активный порождающий сплетения, $\overline{g}$ – менее активный, $\overline{h}$ – пассивный. Следовательно, $|\overline{H}| = 128$.

Образы порождающих элементов подгруппы L в факторгруппе $\overline{H}$ обозначим a, b, x, y соответственно. Тогда

$$a = (34)(57)(68), \quad b = (13)(24)(78), \quad x = (12)(34), \quad y = (56)(78).$$

Очевидно, подгруппа гр(x, y) лежит в центре группы $\overline{L}$ и имеет порядок 4. Кроме того, $(ab)^2 = xy$. Следовательно, $|\overline{L}| = 16$, и, значит, $|\overline{H} : \overline{L}| = 8$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Подгруппа K нормальна в группе H,*

$$K = \text{гр}((cf)^2, (fh^c)^2, (f^c h)^2), \quad H/K \cong D_4 \times \mathbf{Z}_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Естественность порождающих подгруппы K станет более очевидной, если выписать их координаты:

$$(fh^c)^2 = (1, (cf)^2) \circ \text{id}, \quad (f^c h)^2 = ((cf)^2, 1) \circ \text{id}.$$

а) Правую часть первого равенства обозначим K_1. Так как второй и третий порождающие подгруппы K_1 сопряжены:

$$(f^c h)^2 = ((cf)^2 fh)^2 = (cf)^2 g (cf)^2 g,$$

то $K_1 \leqslant K$. Осталось показать, что $K_1 \lhd H$. С этой целью сопряжем порождающие подгруппы K_1 элементами c, f, g:

$$c \cdot (cf)^2 \cdot c = f \cdot (cf)^2 \cdot f = (fc)^2 = (cf)^{14},$$

$$f \cdot (fh^c)^2 \cdot f = c \cdot (hf^c)^2 \cdot c = (1, (fc)^2) \circ \text{id} = (fh^c)^{14},$$

$$h \cdot (f^c h)^2 \cdot h = (hf^c)^2 = ((fc)^2, 1) \circ \text{id} = (f^c h)^{14},$$

$$h \cdot (cf)^2 \cdot h = (hf^c)^2 \cdot (fc)^2, \quad h \cdot (fh^c)^2 \cdot h = (fh^c)^2,$$

$$f \cdot (f^c h)^2 \cdot f = (fc)^2 \cdot (hf^c)^2 \cdot (fc)^2,$$

остальные сопряжения очевидны.

б) Докажем утверждение о факторгруппе. Прежде всего покажем, что $|L : K| = 2$. В самом деле, $L = \text{гр}(f, K) = \text{гр}(f) \cdot K$, и поэтому $|L : K| \leqslant 2$. С другой стороны в факторгруппе $\overline{H} = H/\text{st}(3)$ (см. доказательство леммы 1) подгруппа $\overline{K}$ порождается подстановками

$$x = (12)(34), \quad y = (56)(78), \quad a \cdot b = (1324)(5867)$$

и имеет порядок 8. Следовательно, $\overline{L} \neq \overline{K}$. Значит, $K \neq L$, и поэтому $f \notin K$.

Если же $f \in \text{гр}(c, h) \cdot K$, то $\text{гр}(c, h) \cap \text{гр}(f, K) \neq 1$, что противоречит лемме 1. Учитывая также, что $fc \equiv cf (\text{mod } K)$, получаем

$$H/K \cong \text{гр}(c, h) \times \text{гр}(f) \cong D_4 \times \mathbf{Z}_2.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. *Подгруппа M нормальна в группе H,*

$$M = \text{гр}(f, f^c, (ch)^2), \quad H/M \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, \quad M/M' \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Покажем, что $M = \text{гр}(f, f^c, (hc)^2)$. Для этого выразим порождающие подгруппы L через $f, f^c, (ch)^2$:

$(fh^c)^2 = f(ch)^2 f(hc)^2 = (f(ch)^2)^2, \quad (f^c h)^2 = (f^c(ch)^2)^2.$

б) Докажем утверждение о факторгруппе. Учитывая лемму 1, получаем

$H/M \cong (H/L)/(M/L) \cong \text{гр}(c, h)/\text{гр}((ch)^2) \cong \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2.$

в) В факторгруппе $\overline{H}$ (см. доказательство леммы 1), подгруппа $\overline{M}$ порождается подстановками

$a = (34)(56)(78), \quad b = (13)(24)(78), \quad z = (34)(78).$

Поэтому ее порядок равен 32, а порядок ее коммутанта – 4. Отсюда все и следует. В частности, подгруппа M не может иметь менее трех порождающих. Лемма доказана.

В качестве небольшого итога получаем цепочку вложенных нормальных подгрупп, с отмеченными снизу индексами:

$K \underset{2}{\Delta} L \underset{2}{\Delta} M \underset{4}{\Delta} H.$

ЛЕММА 4. *Пусть* υ *– вершина, помеченная* 0 *или* 1; *тогда*

1) $\text{cost}(\upsilon)_{[\upsilon]} = L \circ \text{id}$,

2) $\text{cost}_L(\upsilon)_{[\upsilon]} = \text{cost}_K(\upsilon)_{[\upsilon]} = K \circ \text{id}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Так как $h = (f, 1) \circ \text{id}$, то

$\text{cost}(\upsilon)_{[\upsilon]} \geqslant (\overline{h}^{\text{st}(1)})_{[\upsilon]} = (\bar{f}^H) \circ \text{id} = L \circ \text{id}.$

Пусть $L(2) = \overline{\{h, h^c\}}^H \cong L \times L$. Так как $h, h^c \in L(2)$, то факторгруппа $\text{st}(1)/L(2)$ порождается элементами $gL(2)$, $g^cL(2)$ и изоморфна группе $\text{гр}((c, h), (h, c)) \cong D_4$. Поскольку $x(c, h) = 1 \Leftrightarrow x(h, c) = 1$, где x – некоторое слово от двух символов, то утверждение 1) очевидно.

б) В силу 1) и равенства $(f^c h)^2 = ((cf)^2, 1) \circ \text{id}$ имеем цепочку вложений

$L \circ \text{id} \geqslant \text{cost}_L(\upsilon)_{[\upsilon]} \geqslant \text{cost}_K(\upsilon)_{[\upsilon]} \geqslant K \circ \text{id}.$

Поскольку $L = \text{гр}(f, K)$, то для доказательства равенства 2) достаточно показать, что $f \circ \text{id} \notin \text{cost}_L(\upsilon)_{[\upsilon]}$, т.е.

$(f, 1) \circ \text{id} = h \notin \text{cost}_L(\upsilon).$

Однако $h \notin L$ и, тем более $h \notin \text{cost}_L(1)$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Подгруппа* $L(2)$ *совпадает с костабилизатором* $\text{cost}(1)$. *Имеет место равенство* $\text{cost}_L(1) = \text{cost}_K(1) \cong K \times K$. *Для любого кортежа* υ *имеет место равенство*

$\text{cost}(\upsilon)_{[\upsilon]} K \circ \text{id}^{(\upsilon)}, \qquad \| \upsilon \| > 1.$

§ 3. Централизаторы элементов

Пусть G – подпрямой квадрат группы H, т.е. каждый элемент $g \in G$ имеет вид (g_1, g_2), $g_1, g_2 \in H$. Подгруппу элементов группы G с одинаковыми координатами назовем *диагональю* группы G и обозначим $\text{diag}\, G$.

ЛЕММА 5. *Пусть* G *– подпрямой квадрат группы* H,

$\text{пр}_1(G \cap H \times 1) = \text{пр}_2(G \cap 1 \times H) = L \lhd H,$

где пр_i *– проекция на* i*-й множитель,* $i = 1, 2$. *Тогда*

$\text{diag}\, G = \text{гр}(\text{diag}(L \times L), \overline{\text{diag}}(G/(L \times L))),$

где черта означает, что из каждого смежного класса $g \cdot L \times L$ выбирается один представитель, имеющий равные координаты.

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 6. *Централизатор порождающего с группы H в самой группе H и ее подгруппах L и K имеет вид*

$$C(c) = \text{гр}(c, (cg)^4, \text{diag cost}(1)),$$

$$C_L(c) = C_K(c) = \text{гр}((cg)^4, \text{diag cost}_K(1)).$$

Доказательство. а) Покажем, что верно первое равенство. Очевидно, $C(c) = \text{гр}(c, \text{diag st}(1))$. В силу леммы 5

$$\text{diag st}(1) = \text{гр}(\text{diag cost}(1), \overline{\text{diag}}(\text{st}(1) / \text{cost}(1))).$$

Так как $\text{st}(1)/\text{cost}(1) = \text{гр}((h, c), (c, h))$ (см. п. а) доказательства леммы 4) и $\text{гр}(c, h) \cong D_4$, то $(ch)^2 = (hc)^2$ и, значит,

$$\overline{\text{diag}}(\text{st}(1) / \text{cost}(1)) = \{(cg)^4\}$$

(поскольку $(cg)^4 = ((ch)^2, (hc)^2) \circ \text{id}$).

б) Докажем равенство для централизатора $C_L(c)$. Так как $L < \text{st}(1)$, то $C_L(c) = \text{diag}\, L = \text{гр}(\text{diag cost}_L(1), \overline{\text{diag}}(L / \text{cost}_L(1)))$. Поскольку проекции подгруппы L на первую и вторую координаты изоморфны подгруппе $L_0 \circ \text{id}$, где $L_0 = \text{гр}(c, g, (cf)^2)$, то $L/\text{cost}_L(1)$ – подпрямой квадрат группы $(L_0/K) \circ \text{id}$. Поскольку

$$L_0 = \text{гр}(c, g) \cdot K, \qquad (cg)^2 = (ch)^2 \cdot h \cdot (cf)^2 \cdot h,$$

то $(cg)^4 \in K$ и, значит, $L_0/K \cong D_4$. Так как факторгруппа $L/\text{cost}_L(1)$ порождается смежными классами, содержащими элементы $f = (g, c) \circ \text{id}$, $f^c = (c, g) \circ \text{id}$, то она изоморфна D_4. Очевидно, в ней есть только один неединичный элемент с равными координатами. В качестве представителя этого смежного класса можно взять элемент $(cg)^4$. Далее, в силу леммы 4 $\text{cost}_L(1) = \text{cost}_K(1)$, чем и завершается доказательство.

в) Так как $K < L$ и $(cg)^4 \in K$, то $C_K(c) = C_L(c)$. Лемма полностью доказана.

Следствие. *Централизатор $C(c)$ 4-порожден и*

$$C(c) = \text{гр}(c, \text{diag}(M \times M) \circ \text{id}).$$

Доказательство следует из того, что порождающий c централизует правую часть и подгруппа M 3-порождена (лемма 3).

ЛЕММА 7. *Имеет место включение $C(f) \cdot C(g) \cdot C(h) \leqslant \text{st}(1)$.*

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2) \cdot c$ и $x^{-1}fx = f$; тогда

$$f = (g, c) \circ \text{id} = (x_2^{-1} \cdot c \circ \text{id} \cdot x_2, x_1^{-1} \cdot g \circ \text{id} \cdot x_1).$$

Следовательно, элементы c и g должны быть сопряжены в группе H, что невозможно, так как в факторгруппе $H/\text{st}(1)$ образ элемента f равен 1, а образ элемента c не равен 1. Для порождающих g и h рассуждения аналогичны. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. *Пусть G – группа, $H \triangleleft G$, $x \notin H$. Тогда*

$$C_G(x) = \text{гр}(C_H(x), \overline{C}_{G/H}(xH)),$$

где черта означает, что из каждого смежного класса $y \cdot H$, централизующего смежный класс $x \cdot H$, выбирается единственный представитель (если он существует), централизующий элемент x.

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 9. *Имеет место равенство* $C(f) = \text{гр}(f) \times C_{\text{cost}(1)}(f)$.

Доказательство. В силу лемм 7 и 8

$$C(f) = \text{гр}(C_{\text{cost}(1)}(f), \overline{C}_{\text{st}(1)/\text{cost}(1)}(f \cdot \text{cost}(1))).$$

Покажем, что множество $\overline{C}\ldots$ исчерпывается элементом f. Так как $\text{st}(1)/\text{cost}(1) = \text{гр}(g, g^c)$ и смежному классу $f \cdot \text{cost}(1)$ $g \cdot h \cdot \text{cost}(1) = g \cdot \text{cost}(1)$ в этой факторгруппе соответствует элемент g, то можем считать, что мы находимся в группе $\text{гр}(g, cgc)$. В ней централизатором элемента g является подгруппа $\text{гр}(c, (cg)^4)$. Поскольку $g = fh$ и $h \in \text{cost}(1)$, то в качестве представителя смежного класса $g \cdot \text{cost}(1)$ можно взять элемент f.

Осталось показать, что в смежном классе $(cg)^4 \cdot \text{cost}(1)$ нет элементов, централизующих порождающий f. Очевидно, всякий элемент из этого смежного класса имеет вид

$$((ch)^2 \cdot l, \ (hc)^2 \cdot l') \circ \text{id}, \quad \text{где} \quad l, l' \in L.$$

Поэтому если такой элемент перестановочен с $f = (g, c) \circ \text{id}$, то $[(ch)^2 \cdot l, g] = [(hc)^2 \cdot l', c] = 1$. Покажем, что левый коммутатор отличен от 1 при любом l из L.

Полагая $l = (l_1, l_2)$ и учитывая равенство $g \cdot (ch)^2 \cdot g = (hc)^2 \cdot (h^c f)^2$, из соотношения $[(ch)^2, l, g] = 1$ получаем

$$(l_1, l_2) = (h^c f)^2 \cdot glg = (h \circ \text{id} \cdot l_1 \cdot h \circ \text{id}, (fcf) \circ \text{id} \cdot l_2 \cdot c \circ \text{id}).$$

Следовательно, $l_2 = (fc)^2 \cdot cl_2c$, и поэтому

$$[l_2^{-1}, c] = [f, c]. \tag{1}$$

Так как $l_2 \in L_0 = \text{гр}(c, g, (cf)^2)$, то осталось показать, что равенство (1) не возможно ни для какого $l_2 \in L_0$.

Очевидно, $[l_2^{-1}, c] \in L_0' = [L_0, L_0]$. Покажем, что $[c, f] \notin L_0'$. Поскольку $H/K \cong D_4 \times \mathbf{Z}_2$ (лемма 2), $L_0/K \cong D_4$ (п. б) доказательство леммы 6), то $| H : L_0 | = 2$. Следовательно, в факторгруппе $\overline{H} = H/\text{st}(3)$, порядок которой равен 128 (лемма 1), образ $\overline{L}_0$ подгруппы L_0 имеет порядок 64 или 128.

Если $[c, f] \in L_0'$, то и $[\bar{c}, \bar{f}] \in \overline{L}_0'$. Так как $\overline{L}_0$ – конечная 2-группа, то в этом случае $[\bar{c}, \bar{f}]$ принадлежит подгруппе Фраттини группы $\overline{L}_0$, и, значит $\overline{L}_0 = \text{гр}(\bar{c}, \bar{g})$, где $\bar{c} = (15)(26)(37)(48)$, $\bar{g} = (57)(68)$. Однако $| \text{гр}(\bar{c}, \bar{g}) | = 16$. Противоречие. Лемма доказана.

Следствие. *Имеет место равенство* $C_K(f) = C_{\text{cost}_K(1)}(f)$.

ЛЕММА 10. *Имеет место равенство* $C_L(g) = \text{гр}(f, (cg)^4, C_{\text{cost}_L(1)}(g))$.

Доказательство. Имея в виду лемму 8, рассмотрим централизатор смежного класса $g \cdot \text{cost}_L(1)$ в факторгруппе $L/\text{cost}_L(1)$. Непосредственно проверяется, что он порождается смежными классами $f \cdot \text{cost}_L(1)$ и $(cf)^4 \cdot \text{cost}_L(1)$. Их представителями, перестановочными с элементом g, являются f и $(cg)^4$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. *Имеют место соотношения* $C_K(h) = C_{\text{cost}(1)}(h) \cong C_K(f) \times K$.

Доказательство. Учитывая лемму 8, рассмотрим факторгруппу $K / \text{cost}_K(1) = \text{гр}((cf)^2 \cdot \text{cost}_K(1)) \cong \mathbf{Z}_4$ и централизатор в ней смежного класса $h \cdot \text{cost}_K(1)$. Очевидно, централизатор совпадает со всей факторгруппой.

Покажем, что пересечение $(cf)^{2\cdot i}\cdot \mathrm{cost}_K(1)\cap C(h)$ пусто для $i=1, 2, 3$. Так как всякий элемент i-го смежного класса имеет вид

$$((cg)^i\cdot k,(gc)^i\cdot k')\circ \mathrm{id}, \qquad \text{где} \qquad k,\, k'\in K,$$

то из его перестановочности с элементом h следует равенство

$$[(cg)^i\cdot k,f]=1. \tag{2}$$

Пусть $i=1$, $k=(k_1, k_2)$. Из равенства (2) следует

$$(k_1,k_2)=g\cdot f^c\cdot g\cdot k\cdot f=(*_1,*_2). \tag{3}$$

Однако если $k_1\in \mathrm{st}(1)$, то $*_1\notin \mathrm{st}(1)$. И наоборот, если $*_1\in \mathrm{st}(1)$, то $k_1\notin \mathrm{st}(1)$. В любом случае равенство (3) невозможно.

Пусть $i=2$, $k=(k_1, k_2)$. Из равенства (2) следует

$$(k_1,k_2)=(cg)^{-2}\cdot f\cdot (cg)^2\cdot k\cdot f=(*,((ch)^2c)\circ \mathrm{id}\cdot k_2\cdot c\circ \mathrm{id}). \tag{4}$$

Следовательно, $[k_2^{-1},c]=[c,h]$. Так как $k_2\in$ гр$(c,g,(cf)^2)=L_0$, то $[k_2^{-1},c]\in L_0'$. Как показано в конце доказательства леммы 9, $[c,f]\notin L_0'$. Поскольку $[c,h]=$ $=g^c\cdot (cf)^2\cdot g$, то

$$[c,h]\in (cf)^2\cdot L_0'\neq L_0'.$$

Следовательно, $[c,h]\notin L_0'$ и равенство (4) невозможно.

Пусть $i=3$. Так как $(cg)^4\in K$, то $(cg)^3\equiv cg (\mathrm{mod}\ K)$, и мы возвращаемся к случаю $i=1$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Централизатор $C(f)$ порождающего f группы Григорчука H бесконечно порожден. Таким образом, ответ на вопрос Леннокса* [11] *отрицателен.*

Доказательство. Из лемм 6, 9, 10, 11 следует, что

$$C(f)=\text{гр}(f)x(X\cdot Y),$$

где

$$X\cong C_L(c)\times (C_K(c)\times K\times C_K(c))^{\mathrm{N}}, \quad Y=\text{гр}(h,y_1,y_2,\ldots),$$

где в свою очередь

$$y_n\in \mathrm{cost}(\upsilon_n),\quad (y_n)_{[\upsilon_n]}=(cg)^4\circ \mathrm{id}^{(3n-2)},\quad \upsilon_n=\underbrace{00\ldots0}_{3n-2},\quad n=1,2,3,\ldots$$

Наглядно все эти подгруппы изображены на рис. 3 (фигурной скобкой выделен повторяющийся кусок).

Непосредственно проверяется, что подгруппа Y нормализует подгруппу X и $h^2=y_n^2=[y_n,y_m]=1$ при любых n, $m=1, 2,\ldots$, также, что $(hy_n)^2\in X$, $n=1, 2,\ldots$ Следовательно, факторгруппа

$$X\cdot (Y/X)\cong Y(X\cap Y)$$

изоморфна счетной элементарной абелевой 2-группе. Таким образом, подгруппа

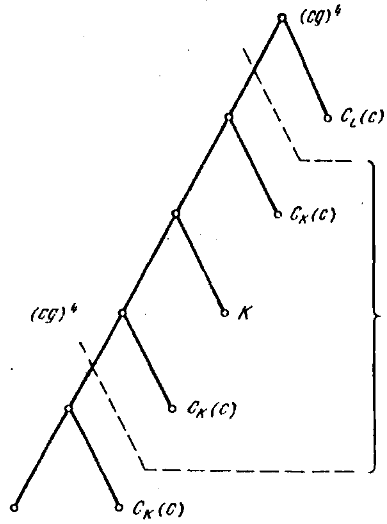

Рис. 3

$X \cdot Y$ бесконечно порождена, а значит, бесконечно порожден и централизатор $C(f)$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Централизаторы порождающих g и h группы Григорчука бесконечно порождены.*

§ 4. Повторные централизаторы

Мы докажем, что повторные централизаторы любых элементов в группе Григорчука конечны.

ЛЕММА 12. *В группе Григорчука H централизатор любой подгруппы конечного индекса тривиален. Также имеют место равенства $C(C_K(c)) = \text{гр}(c)$, $N(C_K(c)) = C(c)$, где символ N означает взятие нормализатора во всей группе H.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Y – подгруппа конечного индекса группы H, и X – нормальная подгруппа конечного индекса, содержащаяся в Y. Как известно (см. [2] или теорему 10 настоящей статьи), все неединичные нормальные подгруппы группы H имеют конечный индекс. Если $C(X) \neq 1$, то $X \cap C(X)$ – абелева подгруппа группы H конечного в H индекса. Однако это противоречит бесконечности 3-порожденной 2-группы H. Следовательно, централизатор подгруппы Y тривиален.

Проверим теперь формулы. В силу следствия из леммы 6

$C(c) = \text{гр}(c, (m, m) \mid m \in M \circ \text{id})$.

Поэтому если положить $Y = \text{гр}((ch)^2, K)$, то получим

$C_K(c) = C(c) \cap K = \text{гр}((a, a) \mid a \in Y \circ \text{id})$.

Следовательно,

$C(C_K(c)) \leqslant C(\text{diag cost}_K(1)) = \text{гр}(c, (y_1, y_2) \mid y_1, y_2 \in C(K \circ \text{id}))$.

Так как $C(K) = 1$, то $C(C_K(c)) = \text{гр}(c)$.

Очевидно, $c \in N(C_K(c))$. Пусть $y = (y_1, y_2) \in N(C_K(c))$; тогда $y_1^{-1}ay_1 = y_2^{-1}ay_2$ для любого $a \in Y$. Следовательно, $y_1 y_2^{-1} \in C(Y) = 1$, и поэтому $y_1 = y_2$. Таким образом, $N(C_K(c)) \leqslant C(c)$. С другой стороны, $Y \triangleleft M$, что доказывает обратное включение. Лемма доказана.

ЛЕММА 13. *Для порождающего f группы Григорчука имеет равенство* $C(C_K(f)) = \text{гр}(f)$.

Доказательство. Из описания централизатора $C_K(f)$ и предыдущей леммы следует, что элемент x, централизующий подгруппу $C_K(f)$, может иметь нетождественные подстановки только в вершинах

$$\underbrace{00\ldots0}_{3n}1,\ \underbrace{00\ldots0}_{3n}1,\quad n = 0,1,2,\ldots$$

Покажем, что среди элементов группы H только порождающий f имеет требуемый вид. Пусть x – элемент группы H, имеющий требуемый вид. Пусть υ – кортеж минимальной длины такой, что $x(\upsilon) \neq 1$, где $x(\upsilon)$ – подстановка автоморфизма x, находящаяся в вершине υ. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x(1) = x(01) = 1$. Пусть n – длина кортежа υ. Ясно, что $n > 3$. Пусть u – начальный отрезок длины $n-1$ кортежа υ. Тогда $x \in \text{cost}(u)$, $x_{[u]} = (*, c \circ \text{id}^{(n)})$, где $* \in \text{st}(1)$. В силу следствия из леммы 4 $x_{[u]} \in K \circ \text{id}^{(n-1)}$.

Покажем, что в подгруппе K нет элементов вида $(*, c \circ \text{id})$, где $* \in \text{st}(1)$. В самом деле, так как подгруппа K порождается элементами $(cg, gc) \circ \text{id}$, $((cf)^2, 1) \circ \text{id}$, $(1, (cf)^2) \circ \text{id}$, то у всякого элемента подгруппы K либо обе координаты принадлежат подгруппе $\text{st}(1)$, либо обе не принадлежат.

2) Пусть теперь $x(1) = \pi^{\varepsilon}$, $x(01) = \pi^{\delta}$, где $\varepsilon, \delta = 0, 1$. Тогда $x \cdot f^{\varepsilon} \cdot h^{\varepsilon+\delta} \in \text{st}(2)$, и в силу п. 1) $x f^{\varepsilon} h^{\varepsilon+\delta} = 1$. Следовательно, $x \in \{f, g, h\}$. Однако из трех этих элементов требуемый вид имеет только порождающий f. Лемма доказана.

В дальнейшем мы часто будем вести доказательства по индукции. С этой целью на множестве слов от порождающих группы H введем некоторый частичный порядок.

Рассмотрим все слова вида

$$c * c * \ldots * c * c,$$

где $* \in \{f, g, h\}$, а первый или последний символы c могут отсутствовать. *Длиной* $\partial(x)$ назовем число входящих в его запись символов c, f, g, h.

Положим, что $x < y$, если выполнено одно из трех условий:

1) $\partial(x) < \partial(y)$;

2) $\partial(x) = \partial(y)$, но слово x содержит вхождения символа h, а слово y нет;

3) $\partial(x) = \partial(y)$, слово x содержит вхождения символа g, а слово y не содержит ни h, ни g.

В противном случае считаем слова несравнимыми.

Пусть x – слово описанного выше вида. Чтобы не загромождать формулировки, той же буквой x будем обозначать и элемент группы H, задаваемый словом x. Наша цель – показать, что, переходя от слова x (или x^2) к его координатам, мы получим слова, меньшие в смысле введенного порядка.

Итак, пусть $\partial(x) = n > 1$. Если $x \in \text{st}(1)$, то $x = (x_1, x_2)$. Поскольку

$$f = (g, c) \circ \text{id},\quad g = (h, c) \circ \text{id},\quad h = (f, 1) \circ \text{id},$$

то x_1 и x_2 – слова в алфавите $\{c, f, g, h\} \circ \text{id}$. Очевидно, $\partial(x_i) < n$, $i = 1, 2$, и поэтому $x_1 < x$, $x_2 < x$, имея в виду естественное отождествление c и $c \circ \text{id}$, f и $f \circ \text{id}$ и т.д.

Если же $x \notin \text{st}(1)$, то $x = (x_1, x_2) \cdot c$ и $x^2 = (x_1 x_2, x_2 x_1)$. Пусть в запись слова x

входит m символов $\{f, g, h\}$; тогда для слова x имеется четыре возможности:

$* c \ldots c *, \quad c * \ldots * c, \quad c * \ldots c *, \quad * c \ldots * c.$

В первом случае $2m = n + 1$, и так как число вхождений символа c в слово x нечетно и равно $m - 1$, то m четно. Следовательно, слова x_1, x_2 имеют вид

$\underbrace{*c\ldots*c}_{m}$ и $\underbrace{c*\ldots c*}_{m}$

соответственно. Поэтому $\partial(x_1x_2) \leqslant 2m - 2$, $\partial(x_2x_1) \leqslant 2m - 2$ и имеет место неравенство

$$x_1x_2 < x, \quad x_2x_1 < x. \tag{5}$$

Во втором случае $2m < n$, поэтому $\partial(x_1x_2) < n$, $\partial(x_2x_1) < n$, и также имеет место (5).

Пусть теперь имеет место случай 3) или 4). Если слово x имеет хотя бы одно вхождение символа h, то $\partial(x_1x_2) \leqslant 2m - 2$ и (5) автоматически выполняется. Если слово x не содержит символов h, но содержит хотя бы один символ g, то или длины слов x_1x_2, x_2x_1 меньше n, или их длины равны n, но тогда они содержат вхождения символа $h \circ \mathrm{id}$. В любом случае получаем (5).

И последняя возможность. Слово x совпадает со словом $(cf)^m$ или $(fc)^m$. В этом случае слова x_1 и x_2 состоят только из символов $c \circ \mathrm{id}$ и $g \circ \mathrm{id}$ и (5) также выполняется. Утверждение доказано.

Очевидно, в смысле введенного порядка, для любого слова x есть только конечное число слов, меньших его. Это наблюдение делает законным рассуждение индукцией по введенному частичному порядку. Базой индукции, как правило, является рассмотрение утверждений для элементов $1, c, f, g, h$.

Например, поскольку $c^2 = f^2 = g^2 = h^2 = 1$, то индукцией по частичному порядку тут же получаем, что H – 2-группа. Отметим, что указанный частичный порядок фактически уже использовался многими авторами, исследовавшими группу Григорчука.

ЛЕММА 14. *Пусть $Y \leqslant H$, $x \in H$. Тогда централизатор элемента x в подгруппе Y имеет вид*

$$\text{гр}(x, (a, a^{x_1}) | a \in C(x_1x_2)) \cap Y \qquad \textit{при} \quad x = (x_1, x_2) \cdot c,$$

$$\text{гр}(\theta, (a_1, a_2) | a_i \in C(x_i), i = 1, 2) \cap Y \quad \textit{при} \quad x = (x_1, x_2),$$

причем $\theta = (t, t^{-1}) \cdot c$, если $x_2 = t^{-1}x_1t$, и $\theta = 1$, если x_1 и x_2 не сопряжены.

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2) \cdot c$, $y = (y_1, y_2) \in C(x)$; тогда $y = (y_1, y_2) = x^{-1}yx = (x_2^{-1}y_2x_2, x_1^{-1}y_1x_1)$. Следовательно, $y_2 = x_1^{-1}y_1x_1$ и $[y_1, x_1x_2] = 1$. И обратно, если эти соотношения выполнены, то x и y перестановочны. Этим доказана первая формула.

Пусть теперь $x = (x_1, x_2)$. Если $y = (y_1, y_2) \cdot c \in C(x)$, то, как и выше, из равенства $x = y^{-1}xy$ следует, что x_1 и x_2 сопряжены. Пусть поэтому $x_2 = t^{-1}x_1t$. Положим $\theta = (t, t^{-1}) \cdot c$. Очевидно $\theta \cdot x = x \cdot \theta$. Покажем, что элемент θ всегда существует в группе H.

Если элемент t принадлежит подгруппе $L \circ \mathrm{id}$, то существование θ следует из леммы 4. В противном случае в силу леммы 1 $t = \upsilon(c, h) \cdot l_1 \circ \mathrm{id}$, где $l_1 \in L$, $\upsilon(c, h)$ – слово от двух переменных. Следовательно,

$$t^{-1} = l_1^{-1}\upsilon^{-1}(c, h) \circ \mathrm{id} = \upsilon(h, c) \cdot \upsilon^{-1}(h, c) \cdot l_1^{-1} \cdot \upsilon(h, c) \circ \mathrm{id} = \upsilon(h, c) \cdot l_2 \circ \mathrm{id}.$$

Непосредственно проверяется, что в этом случае в качестве элемента θ можно взять произведение $\upsilon(g^c, g) \cdot (l_1, l_2) \cdot c$.

Если же элементы x_1 и x_2 не сопряжены, то элемент y, централизующий элемент x, обязательно принадлежит стабилизатору st(1) и дальнейшее очевидно. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Для любого элемента x группы H*

$|C(C_K(x))| < \infty.$

В частности, повторный централизатор любого элемента во всей группе H конечен.

Доказательство проведем индукцией по частичному порядку. Базу индукции дают леммы 12 и 13.

а) Пусть $x = (x_1, x_2) \cdot c$; тогда в силу леммы 14

$$C_K(x) \geqslant \text{гр}(a, a^{x_1}) | a \in C_{K \circ \text{id}}(x_1 x_2)).$$

Следовательно,

$$C(C_K(x)) \leqslant \text{гр}(x, (b_1, b_2^{x_1}) | b_1 b_2 \in C(C_{K \circ \text{id}}(x_1 x_2))).$$

Так как $x_1 x_2 < x$, то по предположению индукции

$$|C(C_K(x))| \leqslant 2 \cdot |C(C_{K \circ \text{id}}(x_1 x_2))|^2.$$

б) Пусть $x = (x_1, x_2)$; тогда по лемме 14

$$C_K(x) \geqslant \text{гр}((a_1, a_2) \mid a_i \in C(x_i),\ i = 1, 2).$$

Если элемент $y = (y_1, y_2) \cdot c$ централизует подгруппу $C_K(x)$, то для любого элемента $a = (a_1, a_2) \in C_K(x)$ получаем

$$a = (a_1, a_2) = y^{-1} a y = (a_2^{y_2}, a_1^{y_1}),$$

что уже для $a_1 = 1$ и $a_2 \neq 1$ дает противоречие. Следовательно, $C(C_K(x)) \leqslant$ $\leqslant \text{гр}((b_1, b_2) \mid b_i \in C(C_{K \circ \text{id}}(x_i)),\ i = 1, 2)$. Поскольку $x_1, x_2 < x$, то по предположению индукции

$$|C(C_K(x))| \leqslant |C(C_K(x_1))| \cdot |C(C_K(x_2))| < \infty.$$

Теорема доказана.

Пусть $r(x) = |C(C_K(x))|$; тогда приведенное выше доказательство дает нам следующие соотношения

$$r(x) \leqslant 2 \cdot r^2(x_1 x_2) \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2) \cdot c,$$
$$r(x) \leqslant r(x_1) \cdot r(x_2) \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2).$$

Если положить $r(n) = \max\limits_{\partial(x)=n} r(x)$, то, учитывая свойства введенного нами частичного порядка, можно, не заботясь о точности, сразу указать оценку сверху: $r(n) \leqslant 4^{4^n}$.

§ 5. Конечно порожденные централизаторы

Скажем, что автоморфизм x дерева D имеет *высоту* n, если при движении вдоль любого бесконечного пути в дереве D (двигаемся без возвращений) нетождественная подстановка либо не встретится вовсе, либо встретится первый раз в некоторой вершине υ, $\|\upsilon\| < n$. И число n с этим свойством минимальное. В силу этого определения порождающий c имеет высоту 1, а порождающие f, g, h не имеют конечной высоты. Такие элементы мы будем называть *элементами с бесконечной высотой.* Тождественному автоморфизму удобно приписать высоту 0.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть x – элемент группы H. Централизатор $C(x)$ элемента x конечно порожден тогда и только тогда, когда все его степени имеют конечную высоту.*

Доказательство достаточности проведем индукцией по частичному порядку. При $x = 1$ все очевидно, а случай $x = c$ рассмотрен в лемме 6.

а) Пусть $x = (x_1, x_2) \cdot c$; тогда в силу леммы 14

$$C(x) = \text{гр}(x, (a, a^{x_1}) \mid a \in C(x_1 x_2)) \cap H.$$

Так как $x^2 = (x_1x_2, x_2x_1)$ имеет по предположению конечную высоту, то и x_1x_2, x_2x_1 имеют конечную высоту. С другой стороны, $x_1x_2 < x$, и, значит, по предположению индукции централизатор $C(x_1x_2)$ конечно порожден. Поскольку стабилизатор $\text{st}(1)$ имеет конечный индекс в прямом квадрате $(H \times H) \circ \text{id}$, то и централизатор $C(x)$ конечно порожден.

б) Пусть $x = (x_1, x_2)$; тогда в силу леммы 14

$$C(x) = \text{гр}(\theta, (a_1, a_2) \mid a_i \in C(x_i),\ i = 1, 2).$$

Очевидно, элементы x_i имеют конечную высоту. Кроме того, $x_1, x_2 < x$, поэтому по предположению индукции централизаторы $C(x_i)$ конечно порождены, а значит, конечно порожден и централизатор $C(x)$. Достаточность доказана.

Необходимость также докажем индукцией по частичному порядку, но применять ее теперь будем к элементам, хотя бы одна степень которых имеет бесконечную высоту. Базой индукции здесь является теорема 1.

в) Пусть $x = (x_1, x_2) \cdot c$; тогда элемент x имеет высоту 1 и, значит, бесконечную высоту имеет некоторая степень элемента x_1x_2 или элемента x_2x_1. Так как $x_1x_2 < x$, то по предположению индукции централизатор $C(x_1x_2)$ бесконечно порожден. Следовательно, бесконечно порожден и централизатор $C(x)$. (Обоснование такое же, как в п. а).)

г) Пусть $x = (x_1, x_2)$ и $x_2 = x_1^t$. Так как $x_1 < x$, $x_2 < x$ и x_1 или x_2 имеют некоторую степень бесконечной высоты, то в силу сопряженности x_1 и x_2 оба централизатора $C(x_1)$ и $C(x_2)$ бесконечно порождены. Тогда бесконечно порождены и пересечения $C(x_i) \cap K \circ \text{id}$, $i = 1, 2$. Следовательно, бесконечно порождено пересечение

$$C(x) \cap \text{cost}_K(1) \cong C_{K\circ\text{id}}(x_1) \times C_{K\circ\text{id}}(x_2).$$

Так как $\text{cost}_K(1)$ имеет конечный индекс в группе H, то бесконечно порожден и сам централизатор $C(x)$.

д) Если $x = (x_1, x_2)$ и x_1 и x_2 несопряжены, то имеет место включение $C(x) \leqslant \text{st}(1)$, и дальнейшее очевидно. Теорема доказана.

ЛЕММА 15. *Любая инволюция высоты 1 сопряжена с порождающим c группы H.*

Доказательство. Если x – инволюция высоты 1, то $x = (x_1, x_1^{-1}) \cdot c$. Если при этом $x_1 \in L \circ \text{id}$, то

$$x = (x_1, 1) \cdot c \cdot (x_1, 1)^{-1}.$$

В силу леммы 1 всякий элемент y из $\text{st}(1)$ имеет вид

$$y = (\upsilon(c, h) \circ \text{id} \cdot l_1,\ \ \upsilon(h, c) \circ \text{id} \cdot l_2),$$

где υ – некоторое слово от двух переменных, $l_1, l_2 \in L \circ \text{id}$. Для того чтобы координаты элемента y были взаимно обратны, необходимо включение $\upsilon(c, h) \cdot \upsilon(h, c) \in L$. Так как гр$(c, h) \cap L = 1$, то, фактически, необходимо равенство $\upsilon(c, h) \cdot \upsilon(h, c) = 1$, которое возможно только при $\upsilon = (ch)^i$, $i = 1, 2, 3$. Соответствующие элементы из H имеют вид $(cg)^i$, $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, инволюции высоты 1 исчерпываются элементами вида $x = (cg)^{2i} \cdot (l, (ch)^i \circ \mathrm{id} \cdot l^{-1} \cdot (hc)^i \circ \mathrm{id})$, где $i = 1, 2, 3$. Непосредственно проверяется, что

$$x = (1,l)^{-1} \cdot (gc)^{-i} \cdot c \cdot (gc)^i \cdot (1,l), \quad l \in L \circ \mathrm{id}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Элементы x группы H, все степени которых имеют конечную высоту, исчерпываются инволюциями высоты* 1.

Доказательство. Ясно, что максимальная нееднничная 2-степень элемента x – инволюция конечной высоты. Покажем, что высота инволюции не может быть 2 или более.

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – инволюция высоты 2. Тогда либо обе координаты x_1, x_2 – инволюции высоты 1 (в $H \circ \mathrm{id}$), либо одна из координат равна 1, а вторая – инволюция высоты 1.

Рассмотрим сначала второй случай. Пусть, например, $x = (x_1, 1)$. Тогда по лемме 4 $x_1 \in L \circ \mathrm{id} \leqslant \mathrm{st}(1)$, и, следовательно, высота элемента x_2 как минимум 2. Противоречие. Значит, этот случай невозможен.

Пусть поэтому x_1 и x_2 – инволюции высоты 1. Очевидно, x – слово от элементов f, g, f^c, g^c. Пусть s_1, s_2, s_3, s_4 – число этих элементов, входящих в запись слова x. Так как

$$f = (g,c) \circ \mathrm{id}, \quad g = (h,c) \circ \mathrm{id}, \quad f^c = (c,g) \circ \mathrm{id}, \quad g^c = (c,h) \circ \mathrm{id},$$

то из того, что x_1 и x_2 имеют высоту 1, следует, что суммы $s_1 + s_2$ и $s_3 + s_4$ нечетны. Следовательно, в парах s_1, s_2 и s_3, s_4 в точности по одному нечетному числу. Пусть, например, s_1 и s_4 нечетны.

Так как коммутант группы H имеет индекс 8 (что можно понять, например, из доказательства леммы 1), то из нечетности s_1 и s_4 следует, что в факторгруппе по коммутанту элемент x_1 лежит в смежном классе $(cgH') \circ \mathrm{id}$. Следовательно, ни x_1 ни x_2 не сопряжены с элементом $c \circ \mathrm{id}$, и поэтому по лемме 15 не могут быть инволюциями высоты 1.

Дальше используем индукцию по высоте n. Пусть $x = (x_1, x_2)$ – инволюция высоты $n > 2$; тогда или x_1, или x_2 – инволюция высоты $n - 1$, которой по предположению индукции не существует. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие. *Централизатор элемента x группы H конечно порожден тогда и только тогда, когда элемент x сопряжен с порождающим c группы H.*

§ 7. Централизаторы и условия конечности

ЛЕММА 16. *Централизатор $C(x)$ произвольного элемента x группы H содержит подгруппу, изоморфную подгруппе K (в частности, всегда бесконечен).*

Доказательство индукцией по частичному порядку легко следует из описания централизаторов $C_K(x)$ при $x = c, f, g, h$ и из леммы 14.

ТЕОРЕМА 15. *Если x, y – различные инволюции в H и подгруппа Y содержит подгруппу K, то централизаторы элементов x и y в подгруппе Y различны и имеют бесконечное пересечение.*

(Отметим, что для произвольных элементов группы H оба утверждения теоремы неверны.)

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем индукцией по частичному порядку. Так как
$C_K(x) = C_Y(x) \cap K$,

то можно ограничиться случаем $Y = K$. Поскольку $h < g < f$, то базой индукции является проверка утверждений теоремы только для порождающих c и h. Имея в виду это замечание, непосредственно убеждаемся, что $C_K(c)$ и $C_K(h)$ различны и имеют бесконечное пересечение.

а) Пусть $x,\ y \notin \mathrm{st}(1)$. Тогда в силу леммы 15 $x = c^{t_1},\ \ y = c^{t_2}$. Следовательно, равенство $C_K(x) = C_K(y)$ влечет $t_2 \cdot t_1^{-1} \in N(C_K(c)) = C(c)$ (лемма 12). Таким образом, $x = t_1^{-1} c t_1 = t_2^{-1} c t_2 = y$.

Б е с к о н е ч н о с т ь   п е р е с е ч е н и я. Так как элементы x и y сопряжены с порождающим c, то, не теряя общности, можем считать, что $x = c$, а $y = t^{-1}ct$, причем $t = (t_1, t_2) \in \mathrm{st}(1)$. Из леммы 14 тогда немедленно следует, что пересечение содержит подгруппу, изоморфную централизатору $C_K(t_2 t_1^{-1})$, и поэтому бесконечно.

б) Пусть $x = t^{-1}ct,\ \ y = (y_1, y_2)$. Тогда $C_K(x) = C_K^t(c)$, и поэтому $C_K(x) \cap \mathrm{cost}(0) = 1$. В то же время пересечение $C_K(y) \cap \mathrm{cost}(0)$ неединично. Следовательно,

$C_K(x) \neq C_K(y)$.

Переходя к сопряженным элементам, можно считать, что $x = c,\ \ y = (y_1, y_2)$. Из леммы 14 тогда следует, что пересечение $C(x) \cap C(y)$ содержит подгруппу, изоморфную пересечению $C_{K \circ \mathrm{id}}(y_1) \cap C_{K \circ \mathrm{id}}(y_2)$. Так как y – инволюция и $y_i < y$, $i = 1, 2$, то по предположению индукции последнее пересечение бесконечно.

в) Пусть теперь $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Так как $x \neq y$, то или $x_1 \neq y_1$, или $x_2 \neq y_2$. Пусть, например, $x_1 \neq y_1$; тогда по предположению индукции

$(C_K(x) \cap \mathrm{cost}_K(0))_{[0]} = C_{K \circ \mathrm{id}}(x_1) \neq C_{K \circ \mathrm{id}}(y_1) = (C_K(y) \cap \mathrm{cost}_K(0))_{[0]}$.

О   п е р е с е ч е н и и. В силу леммы 14 в пересечении содержится подгруппа, изоморфная пересечению $C_{K \circ \mathrm{id}}(x_1) \cap C_{K \circ \mathrm{id}}(y_1)$, которое бесконечно по предположению индукции. Теорема доказана.

П р и м е р 1. *Пусть* $x = (x_1, x_2) \cdot c,\ \ y = (ex_1, x_2 e) \cdot c$, *где* $x_1 = ((cf)^2, 1) \circ \mathrm{id}^{(2)}$, $x_2 = (1, (cf)^4) \circ \mathrm{id}^{(2)}$, $e = x_1^4$. *Тогда* $C_Y(x) = C_Y(y)$ *для любой подгруппы* $Y \geqslant K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственно проверяется, что

$e^2 = [e, x_2] = [x_1, x_2] = 1, \qquad e \in C(C(x_1 x_2))$.

Так как

$C_Y(x) = \mathrm{гр}(x, (a, a^{x_1}) | a \in C(x_1 x_2)) \cap Y$,

$C_Y(y) = \mathrm{гр}(y, (a, a^{ex_1}) | a \in C(ex_1 x_2 e)) \cap Y$

и $xy^{-1} = (x_1 x_1^{-1} e^{-1}, x_2 e^{-1} x_2^{-1}) = (e, e) = (e, e^{x_1}) \in C(x) \cap C(y) \cap Y$, то $C_Y(x) = C_Y(y)$.

П р и м е р 2. *Подгруппа* $F = \mathrm{гр}(ch, (ch)^g)$ *– нормальная подгруппа индекса* 4 *группы* H. *Она порождается сопряженными элементами порядка* 4. *Централизаторы этих элементов в группе* H *пересекаются по единице.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение о нормальности и индексе проверяется непосредственно (как в леммах 1–3). Утверждение о централизаторах следует из леммы 12.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $x \in H$, подгруппа Y содержит подгруппу K. Тогда лишь конечное число элементов y из группы H имеют в Y тот же централизатор, что и элемент x. Все эти элементы y сопряжены с элементом x в группе* Aut D.

Доказательство конечности. Пусть $C_Y(x) = C_Y(y)$; тогда $y \in C(C_Y(x)) \leqslant \leqslant C(C_K(x))$. Остается сослаться на теорему 2.

Утверждение о сопряженности докажем индукцией по частичному порядку. База индукции – теорема 5.

Пусть $x = (x_1, x_2) \cdot c$, $y \in H$, $C_Y(x) = C_Y(y)$. Если $y = (y_1, y_2)$, то рассуждениями из п. б) доказательства теоремы 5 убеждаемся, что равенство централизаторов невозможно.

а) Пусть поэтому $y = (y_1, y_2) \cdot c$; тогда

$$C_Y(x) \cap \mathrm{cost}_K(1) = \mathrm{гр}((a, a^{x_1}) | a \in C_{K\circ\mathrm{id}}(x_1x_2)) =$$

$$= C_Y(y) \cap \mathrm{cost}_K(1) = \mathrm{гр}((a, a^{y_1}) | a \in C_{K\circ\mathrm{id}}(y_1y_2)). \tag{6}$$

Следовательно, $C_{K\circ\mathrm{id}}(x_1x_2) = C_{K\circ\mathrm{id}}(y_1y_2)$. По предположению индукции всякий элемент $z \in H \circ \mathrm{id}$ такой, что

$$C_{K\circ\mathrm{id}}(x_1x_2) = C_{K\circ\mathrm{id}}(z),$$

сопряжен с x_1x_2. Далее, из равенства (6) следует, что $a^{x_1} = a^{y_1}$ для любого $a \in \in C_{K\circ\mathrm{id}}(x_1x_2)$. Следовательно, $y_1 = ex_1$, где $e \in C(C_{K\circ\mathrm{id}}(x_1x_2))$. Таким образом, из $y_1 = ex_1$, $y_1y_2 = z$ следует $y = (ex_1,\ x_1^{-1}ez) \cdot c$.

Пусть $z = (x_1x_2)^t$; тогда $y = x^{\varphi}$, где $\varphi = (x_1x_2t.\ x_2tex_1)$.

б) Рассмотрим случай, когда $x = (x_1, x_2)$. Тогда

$$C_Y(x) \cap \mathrm{cost}_K(1) = \mathrm{гр}((a_1, a_2) | a_i \in C_{K\circ\mathrm{id}}(x_i),\ i = 1, 2).$$

По предположению индукции все элементы y_i, для которых имеет место равенство $C_{K\circ\mathrm{id}}(y_i) = C_{K\circ\mathrm{id}}(x_i)$, сопряжены с x_i, i = 1, 2. Пусть $y_i = t_i^{-1}x_it_i$, $i = 1, 2$; тогда $y = x^{\varphi}$, где $\varphi = (t_1, t_2)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть подгруппа Y содержит подгруппу K. Тогда*

1) *централизатор $C_Y(x)$ имеет конечный индекс в нормализаторе $N(C_Y(x))$ для любого $x \in H$;*

2) *если x – инволюция, то $N(C_Y(x)) \leqslant C(x)$; в частности, централизатор инволюции – самонормализующаяся подгруппа.*

Доказательство. 1) Пусть $Y \in N(C_Y(x))$; тогда

$$C_Y(y^{-1}xy) = y^{-1}C_Y(x)y = C_Y(x).$$

Так как число элементов, имеющих тот же централизатор, что и у элемента x, не превосходит $| C(C_K(x) |$ (теорема 6), то утверждение 1) следует из теоремы 2.

2) Пусть элемент $y \in H$ нормализует подгруппу $C_Y(x)$, но не централизует инволюцию x. Тогда $y^{-1}xy \neq x$, и по теореме 5 получаем противоречие:

$$C_Y(x) \neq C_Y(y^{-1}xy) = y^{-1}C_Y(x)y = C_Y(x).$$

Отметим, что если $Y \triangleleft H$, то из равенства $C_Y(x) = C(x) \cap Y$ следует обратное включение $N(C_Y(x)) \geqslant C(x)$. Теорема доказана.

В силу теоремы 7 мы имеем еще один естественный пример самонормализующихся подгрупп в группе H (и даже более общо, в целом подклассе класса АТ-групп). В [12] показано, что таковыми являются стабилизаторы бесконечных кортежей. Поскольку указанные стабилизаторы максимальны среди подгрупп бесконечного индекса, то возникает вопрос: не обладает ли этим свойством и, например, централизатор $C(c)$? Ответ, к сожалению, отрицательный. Добавляя к подгрупе $C(c)$ любой элемент из костабилизатора $\mathrm{cost}(\upsilon)$ при $\| \upsilon \| \geqslant 2$, мы снова получим подгруппу бесконечного индекса. Поэтому утверждение в) из теоремы 2 в [13] ошибочно.

ТЕОРЕМА 8. *Для любого неединичного элемента x группы H индекс $| C(x^2) : C(x) |$ бесконечен. В частности, централизатор неединичного элемента имеет бесконечный индекс в группе H.*

Доказательство (индукцией по частичному порядку). Если x – инволюция, то $C(x^2) = H$. Предположим, что индекс $| H : C(x) |$ конечен; тогда элемент x имеет лишь конечное число сопряженных элементов. По лемме Дицмана указанные элементы порождают конечную нормальную подгруппу. Однако это невозможно, так как в бесконечной группе H все неединичные нормальные подгруппы имеют конечный индекс.

а) Пусть $x = (x_1, x_2) \cdot c$; тогда $x^2 = (x_1x_2, x_2x_1)$ и

$$C(x) = \text{гр}(x, (a, a^{x_1}) | a \in C(x_1x_2)) \cap H,$$

$$C(x^2) = \text{гр}(x, (a, b^{x_1}) | a, b \in C(x_1x_2)) \cap H.$$

Поскольку подгруппа $C_{K\circ\mathrm{id}}(x_1x_2)$ бесконечна (лемма 1б), то пересечение $C(x) \cap$ $\cap\ \mathrm{cost}_K(1) = \text{гр}((a, a^{x_1}) \mid a \in C_{K\circ\mathrm{id}}(x_1x_2))$ имеет бесконечный индекс в пересечении

$$C(x^2) \cap \mathrm{cost}_K(1) = \text{гр}((a, b^{x_1}) | a, b \in C_{K\circ\mathrm{id}}(x_1x_2)).$$

Так как $| H : \mathrm{cost}_K(1) | < \infty$, то и $C(x)$ имеет в $C(x^2)$ бесконечный индекс.

б) Пусть $x = (x_1, x_2)$; тогда по лемме 14

$$C(x) = \text{гр}(\theta, (a_1, a_2) | a_i \in C(x_i),\ i = 1, 2),$$

$$C(x^2) = \text{гр}(\theta, (a_1, a_2) | a_i \in C(x_i^2),\ i = 1, 2).$$

По предположению индукции $|C(x_i^2) : C(x_i)| = \infty$, $i = 1, 2$, поэтому и $| C_{K\circ\mathrm{id}}(x_i^2)$: $: C_{K\circ\mathrm{id}}(x_i) | = \infty$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$C(x) \cap \mathrm{cost}_K(1) = \text{гр}((a_1, a_2) | a_i \in C_{K\circ\mathrm{id}}(x_i),\ i = 1, 2)$$

имеет бесконечный индекс в пересечении

$$C(x^2) \cap \mathrm{cost}_K(1) = \text{гр}((a_1, a_2) | a_i \in C_{K\circ\mathrm{id}}(x_i^2),\ i = 1, 2),$$

и, значит, централизатор $C(x)$ имеет бесконечный индекс в централизаторе $C(x^2)$. Теорема доказана.

Назовем элемент $x \in H$ *u-элементом*, если или $x = 1$, или $x \in$ $\in \mathrm{cost}(u) \setminus \mathrm{cost}\,(\| u \| + 1)$ для некоторой вершины u.

Назовем элемент $x \in H$ *$\rceil u$-элементом*, если для некоторой вершины u и соседних с ней вершин u_1, u_2 длины $\| u \| + 1$ имеет место разложение $x = x_{u_1} \cdot x_{u_2}$, где $x_{u_i} \neq 1, x_{u_i} \in \mathrm{cost}(u_i),\ i = 1, 2.$

Отметим, что всякий элемент $1 \neq x \in H$ является или u-элементом для некоторой (одной!) вершины u, или $\rceil u$-элементом для некоторой (тоже одной!) вершины u, но не тем и другим (хотя бы и для разных вершин) одновременно.

ТЕОРЕМА 9. 1) *Централизатор $C(x)$ элемента $x \in H$ тогда и только тогда не является собственной подгруппой никакого другого централизатора $C(y)$, когда или $x = 1$, или x – инволюция и $C(C(x)) = \text{гр}(x)$.*

Пусть $x^2 = 1$.

2) $C(C_K(x)) = \text{гр}(x)$ *тогда и только тогда, когда* x – *u-элемент.*

3) $C(C(x)) = \text{гр}(x)$ *тогда и только тогда, когда* x – *u-элемент, или* x – $\rceil u$-*элемент, но* x_{u_i} – u_i-*элементы, сопряженные в группе* H, $i = 1, 2$.

Доказательство. Докажем 1). Если x не инволюция, то $C(x^2) > C(x)$ (теорема 8). Пусть поэтому $x^2 = 1$ и существует y такой, что $C(y) \geqslant C(x)$. Тогда, очевидно, что $y \in C(C(x)) = Y$. Если $Y = \text{гр}(x)$, то, естественно, $y = x$. Пусть поэтому $Y \neq \text{гр}(x)$.

Если подгруппа Y содержит инволюцию, отличную от x, то по теореме 5 $C(y) \neq C(x)$ и, значит, $C(y) > C(x)$. Если же x – единственная инволюция подгруппы Y, то $Y = \text{гр}(y)$, где $x = y^{2n}$ для некоторого натурального числа n. В силу теоремы 8 тогда имеем включение $C(y) < C(x)$, что противоречит включению $C(y) \geqslant C(x)$.

Докажем 2). Индукцией по частичному порядку установим, что если x – u-элемент, то $C(C_K(x)) = \text{гр}(x)$, а если нет, то $C(C_K(x)) > \text{гр}(x)$. Очевидно, $1, c, f, g, h$ – u-элементы. Утверждение об их повторных централизаторах доказано в леммах 12 и 13. Теперь индуктивный шаг.

Если $x \notin \text{st}(1)$, то по лемме 15 $x = c^t$ для некоторого $t \in H$. Следовательно,

$$C(C_K(x)) = C(C^t(c)) = C^t(C(c)) = \text{гр}(c)^t = \text{гр}(x).$$

Пусть $x = (x_1, x_2)$; тогда x_1, x_2 – u-элементы группы $H \circ \text{id}$. Так как $C_K(x) \geqslant$ $\geqslant \text{гр}((a_1, a_2) \mid a_i \in C_{K\circ\text{id}}(x_i), i = 1, 2)$, то по предположению индукции и в силу п. б) доказательства теоремы 2 получаем включения

$$C(C_K(x)) \leqslant \text{гр}((b_1, b_2) \mid b_i \in C(C_{K\circ\text{id}}(x_i)),\ \ i = 1,2) \leqslant \text{гр}((b_1, b_2) \mid b_i \in \text{гр}(x_i),\ \ i = 1,2).$$

Так как x – u-элемент, то он принадлежит cost(1) лишь в том случае, когда хотя бы одна его координата равна 1. Следовательно, $C(C_K(x)) \leqslant \text{гр}(x)$.

Пусть теперь x – $\rceil u$-элемент, тогда, очевидно, $C(C_K(x)) \geqslant \text{гр}(x_{u_1}, x_{u_2})$.

Докажем 3). Используем индукцию по частичному порядку. Если x – u-элемент, то по предыдущему $C(C_K(x)) = \text{гр}(x)$ и тем более $C(C(x)) = \text{гр}(x)$.

Пусть $x = (x_1, x_1^t)$, где $x_1 \in L \circ \text{id}$ и элемент x_1, а значит, и элемент x_1^t являются u-элементами в группе $H \circ \text{id}$, т.е. x – $\rceil u$-элемент при $u = \phi$, и при этом $x_{u_1} =$ $= (x_1, 1)$, $x_{u_2} = (1, x_2)$. Сопрягающим элементом в этом случае является $\theta =$ $= (t, t^{-1}) \cdot c$, существующий в группе H в силу леммы 14. Принимая во внимание эту лемму, получаем

$$C(C(x)) \leqslant C(\theta) \cap C(C_K(x)) = \text{гр}(\theta, (a, a^t) \mid a \in H \circ \text{id}) \cap \text{гр}((a_1, a_2) \mid a_i \in$$

$$\in \text{гр}(x_i),\ \ i = 1,2) = \text{гр}((x_1, x_2)) = \text{гр}(x).$$

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – $\rceil u$-элемент при $\| u \| \geqslant 1$. В этом случае одна из координат, например x_2, равна 1, а вторая, в данном случае x_1, – $\rceil u$-элемент в группе $H \circ \text{id}$, а сомножители $(x_1)_{u_1}, (x_1)_{u_2}$ сопряжены в $H \circ \text{id}$. В силу леммы 14

$$C(x) = \text{гр}((a_1, a_2) \mid a_1 \in C(x_1), a_2 \in H \circ \text{id}) \cap H,$$

поэтому $C(x)_{[0]} \geqslant C(x_1)$, $C(x)_{[1]} \geqslant L$. Так как по предположению индукции $C(C(x_1)) = \text{гр}(x_1)$, то

$$C(C(x)) \leqslant \text{гр}((a,1) | a \in C(C(x_1))) = \text{гр}(x).$$

Если же x – $\rceil u$-элемент и x_{u_1}, x_{u_2} не сопряжены в группе H, то $C(C(x)) \geqslant \geqslant \text{гр}(x_{u_1}, x_{u_2})$. Теорема доказана.

§ 7. Условия конечности в группе Григорчука

Среди условий, ослабляющих конечность, наиболее естественны условия, требующие конечности подгрупп, порождаемых парой сопряженных элементов простого порядка. Поскольку H – 2-группа, то имеют смысл только такие формы этого условия. Существует ли в H бесконечная подгруппа, порожденная

а) парой сопряженных элементов порядка 4,

б) инволюцией и элементом порядка 4,

в) тремя сопряженными инволюциями?

Ответы на все три вопроса положительные. Более того, указанные подгруппы могут даже иметь конечный индекс в группе H. Ответом на вопрос а) является уже встречавшаяся нам подгруппа $\text{гр}(ch, (ch)^g)$, имеющая в H индекс 4. Ответом на вопрос б) является подгруппа $\text{гр}(g, ch)$, имеющая в группе H индекс 2. Ответ на вопрос в) – это подгруппа $\text{гр}(c, c^x, c^y)$, где $x = g^c h$, $y = h(cg)^2(ch)^2 f(cg)^2$. Индекс ее конечен, однако точное его значение вычислить достаточно сложно.

П р е д л о ж е н и е. 1) *Приведенным ниже списком из семи подгрупп полностью исчерпываются все подгруппы индекса* 2 *группы* H:

$$\text{гр}(f, cg),\quad \text{гр}(g, ch),\quad \text{гр}(h, cf),\quad \text{гр}(c, f, c^g),\quad \text{гр}(c, g, c^h),\quad \text{гр}(c, h, c^f),$$

$$\text{st}(1) = \text{гр}(f, g, f^c, g^c)$$

(*порождающие множества являются минимальными*).

2) *Группа* H *не обладает свойством Хаусона, т.е. в ней есть конечно порожденные подгруппы, пересечение которых бесконечно порождено.*

3) *Подгруппа Фраттини группы* H *либо тривиальна, либо совпадает с коммутантом* H' *группы* H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Поскольку любая подгруппа индекса 2 содержит коммутант группы H, а факторгруппа H/H' элементарная абелева ранга 3, то сначале выписываем все подгруппы индекса 2 у этой абелевой группы, а потом добавляем к ним коммутант группы H.

2) Пусть $X = \text{гр}((a, a) \mid a \in K \circ \text{id})$; тогда пересечение $X \cap X^h = \text{гр}((a, a) \mid a \in \in C_{K \circ \text{id}}(f \circ \text{id}))$ в силу теоремы 1 бесконечно порождено, в то время как подгруппа X 3-порождена (лемма 2).

3) Пусть X – подгруппа конечного индекса в группе H, Y – содержащаяся в ней нормальная подгруппа конечного индекса. В факторгруппе H/Y, так как это конечная 2-группа, все максимальные подгруппы имеют индекс 2. Пересечение их, очевидно, содержит коммутант группы H. Поэтому если H не содержит максимальных подгрупп бесконечного индекса, то подгруппа Фраттини совпадает с коммутантом.

Если H содержит максимальную подгруппу X бесконечного индекса, то пересечение $\cap X^x, x \in H$, – нормальная подгруппа бесконечного индекса и, значит, единична. В этом случае подгруппа Фраттини тривиальна. Предложение доказано.

Вопрос. *Содержит ли группа Григорчука, или, более общо, конечно порожденная* AT_ω*-группа, максимальные подгруппы бесконечного индекса?*

Сложность вопроса состоит в том, что всякая такая подгруппа является всюду плотной в проконечной топологии, и поэтому рассмотрение конечных фактор-групп ничего не дает.

Назовем подгруппу $\mathrm{st}(n)$ группы H *конгруэнц-подгруппой* и по аналогии с линейными группами сформулируем конгруэнц-проблему. Верно ли, что всякая подгруппа конечного индекса группы H содержит некоторую конгруэнц-подгруппу? Эквивалентный вопрос: являются ли подгруппы $\mathrm{st}(n)$ базой проконечной топологии на группе H?

Отметим, что теорема 10, по существу, доказана в [2], хотя явно там и не сформулирована.

По лемме 2 подгруппа K имеет в H индекс 16. В то же время в факторгруппе $H/\mathrm{st}(3)$ образ подгруппы K тоже имеет индекс 16 (лемма 1). Следовательно, $K \geqslant \mathrm{st}(3)$.

ТЕОРЕМА 10. *Для группы H конгруэнц-проблема решается положительно.*

Доказательство. а) Прежде всего отметим, что если для некоторой нормальной подгруппы N группы H и некоторого кортежа υ длины n имеет место включение $(\mathrm{cost}(\upsilon) \cap N)_{[\upsilon]} \geqslant \mathrm{st}(m)$, то $N \geqslant \mathrm{st}(n+m)$. Доказательство следует из определения конгруэнц-подгруппы и транзитивности действия группы H на кортежах длины n.

б) Покажем, что $K' = [K, K] \geqslant \mathrm{st}(5)$. Прежде всего, подгруппа K содержит подгруппу $\mathrm{st}(3)$. Пусть $x = (cf)^2$, $y = (f^c h)^2$, $z = y^c$ – порождающие подгруппы K. Тогда

$$[x,y] = ([cg,(cf)^2] \circ \mathrm{id},1) = (((gcfg)^2 \circ \mathrm{id}^{(2)},1),1).$$

Так как $K' \lhd H$, то отсюда следует, что $K'' \geqslant \mathrm{cost}(2)$ (лемма 4). С другой стороны, $[x, y]$, $[x, z]$, $[y, z] \in \mathrm{cost}(2)$, и поэтому, фактически, имеет место равенство $K' = \mathrm{cost}(2)$. Отсюда для любого кортежа υ длины 2 имеем включение

$$(K' \cap \mathrm{cost}(\upsilon))_{[\upsilon]} = \mathrm{cost}(\upsilon)_{[\upsilon]} = K \circ \mathrm{id}^{(2)} \leqslant \mathrm{st}(3),$$

из которого, учитывая п. а), получаем $K' \geqslant \mathrm{st}(5)$.

в) Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $1 \neq x \in H$ подгруппа $N = \bar{x}^H$ содержит некоторую конгруэнц-подгруппу. Сделаем это индукцией по частичному порядку.

в1) Прежде всего покажем, что для $x = c, f, g, h$ имеет место включение $N \geqslant \mathrm{st}(5)$. Для этого, учитывая п. б), достаточно убедиться в том, что $N \geqslant K'$.

Поскольку $H = \mathrm{гр}(f, g) \cdot \bar{c}^H$, то $\bar{c}^H \geqslant H' > K'$; далее $\bar{f}^H = L > K > K'$; $\bar{h}^H = \mathrm{cost}(1) > K'$ (лемма 4); и последнее, поскольку $[g, hch] = (1, (cf)^2 \circ \mathrm{id})$, то

$$\bar{g}^H \geqslant \mathrm{cost}_K(1) > K'.$$

в2) Пусть теперь $x = (x_1, x_2) \cdot c$. Если x – инволюция, то по лемме 15 $x = c^t$ для некоторого $t \in H$, и поэтому $N = \bar{c}^H \geqslant \mathrm{st}(5)$. Если же $x^2 \neq 1$, то $x^2 \in \mathrm{st}(1)$, и мы переходим к следующему случаю.

в3) Пусть $x = (x_1, x_2)$; тогда или $x_1 \neq 1$, или $x_2 \neq 1$ Для определенности положим, что $x_1 \neq 1$. По предположению индукции $\overline{x_1}^{H \circ \mathrm{id}} \geqslant \mathrm{st}(n) \geqslant \mathrm{cost}(n)$ для некоторого n. Пусть υ – кортеж длины $n + 1$, начинающийся символом 0; тогда

$$[\mathrm{cost}(\upsilon), \mathrm{st}(\upsilon) \cap N]_{[\upsilon]} \geqslant [K, K] \circ \mathrm{id}^{(n+1)} \geqslant \mathrm{st}(5).$$

Так как $N \lhd H$, то рассмотренный выше взаимный коммутант содержится в пересечении $N \cap \mathrm{cost}(\upsilon)$, и поэтому в силу п. а) $N \geqslant \mathrm{st}(n+5)$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Всякая неединичная нормальная подгруппа группы H имеет конечный индекс.*

Пусть $r_2(x)$ такое минимальное натуральное число n что $\overline{x}^H \geqslant \mathrm{st}(n)$. Из доказательства теоремы 10 следует

$$r_2(x) \leqslant r_2(x_1x_2)+1 \text{ при } x=(x_1,x_2)\cdot c,$$

$$r_2(x) \leqslant \min\{r_2(x_1), r_2(x_2)\} \text{ при } x=(x_1,x_2).$$

Если положить $r_2(n) = \max\{r_2(x) \mid \partial(x) = n\}$, то из определения частичного порядка сразу следует, что $r_2(n) \leqslant 3 \cdot n + 5$.

Завершим статью вычислением индексов некоторых интересных подгрупп группы H.

ТЕОРЕМА 11. *Имеют место равенства*:

$$|H : \mathrm{cost}(1)| = 16; \tag{7}$$

$$|H:\mathrm{cost}(n)| = 4\cdot|\mathrm{cost}(n):\mathrm{cost}(n+1)| = 4\cdot 4^{2^n}, \quad n=2,3,\ldots;$$

$$K^{(n)} = \mathrm{cost}(2n) \quad \textit{при} \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{8}$$

$$|H : \mathrm{st}(2)| = 8; \tag{9}$$

$$|H:\mathrm{st}(n)| = 4\cdot|\mathrm{st}(n):\mathrm{st}(n+1)| = 4\cdot 32^{2^{n-3}}, \quad n=3,4,\ldots;$$

$$\mathrm{cost}(n)_{[\upsilon]} = \begin{cases} L & \textit{при} \quad \|\upsilon\| = n = 1, \\ K & \textit{при} \quad \|\upsilon\| = n > 1, \end{cases} \qquad \mathrm{st}(n)_{[\upsilon]} = \begin{cases} H & \textit{при} \quad \|\upsilon\| = n = 1, \\ M & \textit{при} \quad \|\upsilon\| = n > 1; \end{cases} \tag{10}$$

$$|H : H'| = 8, \quad |H : H''| = 2^7, \quad H^{(n)} = \mathrm{cost}(2n-3), \quad n \geqslant 3. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) В силу лемм 1, 2, 4 имеем

$|K : \mathrm{cost}_K(1)| = 4,$

$|H : \mathrm{cost}(1)| = |H : \mathrm{st}(1)| \cdot |\mathrm{st}(1) : \mathrm{cost}(1)| = 2 \cdot 8,$

$|\mathrm{cost}(1) : \mathrm{cost}(2)| = |L : \mathrm{cost}_K(1)|^2 = |L : K|^2 \cdot |K : \mathrm{cost}_K(1)|^2 = 4 \cdot 16$

и при $n > 1$

$$|\mathrm{cost}(n):\mathrm{cost}(n+1)| = |K:\mathrm{cost}_K(1)|^{2^n} = 4^{2^n}.$$

Отсюда следует (7).

б) Как показано в п. б) доказательства теоремы 10, имеет место равенство $K' = \mathrm{cost}(2)$, и, следовательно,

$K^{(n)} = \mathrm{cost}(2n), \quad n = 1, 2, \ldots$

в) Докажем (9). По лемме 1

$|H : \mathrm{st}(2)| = 8, \quad |H : \mathrm{st}(3)| = 128 = 4 \cdot 32.$

В силу леммы 2 $K > \mathrm{st}(3)$ и $|K : \mathrm{st}(3)| = 8$, поэтому $\mathrm{cost}_K(n) \geqslant \mathrm{st}(n+3)$ при $n = 1, 2, \ldots$ Следовательно,

$|H : \mathrm{st}(n+3)| = |H : \mathrm{cost}_K(n)| \cdot |\mathrm{cost}_K(n) : \mathrm{st}(n+3)| = s_n \cdot |K : \mathrm{st}(3)|^{2n},$

где

$$s_1 = |H:\mathrm{cost}(1)|\cdot|\mathrm{cost}(1):\mathrm{cost}_K(1)| = 4^2\cdot|L:K|^2 = 64,$$

$$s_n = |H:\mathrm{cost}_K(n)| = |H:\mathrm{cost}(n)| = 4\cdot 4^{2^n}, \quad n = 2,3,\ldots$$

В любом случае имеет место (9).

г) Утверждение (10), относящееся к костабилизатору, сразу следует из леммы 4. Утверждение о стабилизаторе при $\|\upsilon\| = 1$ очевидно; при $\|\upsilon\| = 2$ проверяется непосредственно; при $\|\upsilon\| \geqslant 3$ следует из включения $K > \mathrm{st}(3)$ и изоморфизма

$$\mathrm{cost}(n) \cong \underbrace{K\times\ldots\times K}_{m}, \quad m = 2^n, \quad n = 2,3,\ldots$$

д) В силу леммы 1 $|H : H'| = 8$. В силу леммы 2 $H' = \mathrm{гр}(K, (ch)^2)$. Пусть $x = (cf)^2$, $y = ((cf)^2, 1)\circ \mathrm{id}$, $z = cyc$ – порождающие подгруппы K. Тогда

$$H'' = K'\cdot\overline{\{[(ch)^2,x],[(ch)^2,y]\}}^{H}.$$

Поскольку

$$h[(ch)^2,x]h = ((cf)^{-2},(cf)^2)\circ\mathrm{id} = y^{-1}z,$$

$$[(ch)^2,y] = ((cf)^4,1)\circ\mathrm{id} = y^2,$$

то $H'' \geqslant \mathrm{гр}(y^2, yz, K')$. Так как $y^4, z^4 \in K'$ и $[y, z] = 1$, то $|H'' : K'| \leqslant 8$, и поэтому

$$|H:H''| = \frac{|H:K|\cdot|K:K'|}{|H'':K'|} \geqslant \frac{2\cdot 64}{8} = 16.$$

Фактически же имеет место равенство. Чтобы его доказать, достаточно установить нормальность подгруппы $\mathrm{гр}(y^2, yz, K')$ в группе H. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что $[y^2, a]$, $[yz, a] \in K'$ при $a = c, h, g$. Последнее проверяется непосредственно с использованием лемм 1, 2, 4.

Теперь рассмотрим третий коммутант $H^{(3)}$. Так как $K' = \mathrm{cost}(2) \cong K\times K\times K\times K$, то

$$H^{(3)} = K''\cdot\overline{\{[\varphi,yz],[\varphi,y^2],[\psi,yz],[\psi,y^2]\}}^{H},$$

где

$$\varphi\in\mathrm{cost}(u), \quad \varphi_{[u]} = (cf)^2\circ\mathrm{id}^{(2)}, \quad u = (00),$$

$$\psi\in\mathrm{cost}(\upsilon), \quad \psi_{[\upsilon]} = (cf)^2\circ\mathrm{id}^{(3)}, \quad \upsilon = (000),$$

Имеем

$$[\varphi,yz]_{[u]} = [(cf)^2,cg]\circ\mathrm{id}^{(2)} = ((gcfg)^2,1)\circ\mathrm{id}^{(3)}.$$

Следовательно, $[\varphi, yz] \in \mathrm{cost}(\upsilon)$, и поэтому $H^{(3)} \geqslant \mathrm{cost}(3)$.

Непосредственно проверяется, что и остальные три коммутатора принадлежат костабилизатору cost(3). Поскольку $K'' = \mathrm{cost}(4)$, то $H^{(3)} = \mathrm{cost}(3)$. Следовательно, $H^{(n+3)} = \mathrm{cost}(2n + 3)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. *Григорчук Р.И.* К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14, № 1. С. 53–54.
2. *Григорчук Р.И.* Степени роста конечно-порожденных групп и инвариантное среднее // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48, № 5. С. 939–983.
3. *Рожков А.В.* К теории групп алешинского типа // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 5. С. 572–589.
4. *Алешин С.В.* Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Матем. заметки. 1972. Т. 11, № 3. С. 319–328.
5. *Мерзляков Ю.И.* О бесконечных конечно-порожденных периодических группах // ДАН СССР. 1983. Т. 268, № 4. С. 803–805.
6. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.
7. *Dixon M., Foarnelle T.* The construction of infinite finitely generated periodic groups using wreath product // J. Algebra. 1988. V. 115, № 1. P. 150–163.
8. *Рожков А.В.* О периодических не локально конечных группах // Международная конф. по алгебре. Тезисы докладов по теории групп. Новосибирск, 1989. С. 101.
9. *Лысенок И.Г.* Система определяющих соотношений для группы Григорчука // Матем. заметки. 1985. Т. 38, № 4. С. 503–516.
10. *Рожков А.В.* О подгруппах некоторых групп алешинского типа // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 6. С. 643–671.
11. *Lennox J.C.* Nilpotent extensibility and centralizers in infinite 2-groups // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2, 39. 1990. № 2B. P. 209–219.
12. *Рожков А.В.* О стабилизаторах кортежей в группах алешинского типа // Матем. заметки. 1990. Т. 47, № 3. С. 121–128.
13. *Рожков А.В.* Централизаторы и самонормализующиеся подгруппы в группе Григорчука // Международная конф. по алгебре. Тезисы докладов по теории групп. Новосибирск, 1991. С. 86.

Поступило в редакцию
5.VI.1992