А. В. Рожков, К теории групп алёшинского типа, *Матем. заметки*, 1986, том 40, выпуск 5, 572–589

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 40, № 5 (1986)

К ТЕОРИИ ГРУПП АЛЁШИНСКОГО ТИПА

А. В. Рожков

В 1972 г. С. В. Алёшин [1] указал семейство конечно порожденных бесконечных p-групп, возникающих как группы автоматных преобразований, а в 1980 г. Р. И. Григорчук [2, 3] нашел аналогичное семейство среди групп преобразований отрезка, сохраняющих меру. Позже Ю. И. Мерзляков [4] показал, что оба эти типа групп очень тесно между собой связаны и составляют по существу одно семейство (см. также [5], § 23). Были опубликованы и другие примеры p-групп, сходные с группами работы [1], но на других (равносильных) языках — в терминах пределов обратного спектра сплетений p-групп и в терминах автоморфизмов деревьев. Интересные новые свойства таких групп указали, в частности, Гупта и Сидки [6].

Несомненное родство всех этих примеров наводило на мысль о существовании более общей конструкции, включающей их в себя как частные случаи. В данной работе и предлагается такая конструкция — вводится понятие групп алёшинского типа или, короче, AT-групп, которые, вообще говоря, могут быть непериодическими и не конечно порожденными.

В первых параграфах работы даются основные определения и устанавливаются общие свойства групп алёшинского типа, в том числе соотношения и некоторые свойства расположения AT-групп в группе автоморфизмов дерева кортежей. В § 4 дается критерий периодичности AT-групп одного важного типа (AT_ω-групп, теорема 1), а также достаточные условия периодичности групп более общего вида (теорема 2). В § 5 строится пример 2-порожденной периодической группы алёшинского типа, содержащей элементы всевозможных конечных порядков.

§ 1. Основные определения. Пусть A — последовательность множеств $A_0, A_1, \ldots$, каждое из которых содержит не менее двух элементов. Конечные последовательности $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, $a_i \in A_i$, будем называть кортежами длины n над последовательностью A. В целях единообразия бесконечные последовательности $(a_0, a_1, \ldots)$, $a_i \in A_i$, также будем называть кортежами. Длину конечного кортежа ν будем обозначать символом $\| \nu \|$, а равенство первых n членов кортежей γ и γ' — сравнением

$$\gamma \equiv \gamma' \pmod{n}.$$

Пусть $\mathrm{Cort}_n A$ обозначает множество всех кортежей длины n, $\mathrm{Cort}\, A$ — множество всех конечных кортежей, $\mathrm{Cort}_\infty A$ — множество всех бесконечных кортежей над последовательностью A. Если γ — некоторый кортеж, то по определению γ_n — его $(n+1)$-й член, $\gamma_{[n]} = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$, $\gamma_{(n)} = (\gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots)$, $n \in \mathbf{N}$. В дальнейшем буквами μ, ν, τ будут обозначаться обычно конечные кортежи, а буквами γ, δ, η — бесконечные.

Введем на множестве $\mathrm{Cort}\, A$ частичный порядок, полагая $\mu \leqslant \nu$ тогда и только тогда, когда кортеж μ является началом кортежа ν. Рассмотрим какой-нибудь автоморфизм φ упорядоченного множества $\mathrm{Cort}\, A$. Нетрудно заметить, что φ оставляет на месте пустой кортеж и сохраняет длины кортежей. Пусть $\nu \in \mathrm{Cort}_n A$, ν^+ — множество кортежей длины $n+1$, продолжающих ν. Легко видеть, что $(\nu^+)\varphi = (\nu\varphi)^+$. Таким образом, автоморфизм φ для каждого $\nu \in \mathrm{Cort}\, A$ однозначно определяет подстановку $\pi = \pi(\varphi, \nu)$: $a \mapsto ((\nu\alpha)\varphi)_n$, $n = \| \nu \|$, множества A_n, и, обратно, определяется набором этих подстановок однозначно, а именно по формуле

$$\nu\varphi = (\nu_0\pi(\varphi, \varnothing), \ \nu_1\pi(\varphi, \nu_{[1]}), \ldots, \nu_{n-1}\pi(\varphi, \nu_{[n-1]})),$$

если $\| \nu \| = n$. Это действие продолжается на множество $\mathrm{Cort}_\infty A$ по формуле

$$\gamma\varphi = (\gamma_0\pi(\varphi, \varnothing), \ldots, \gamma_n\pi(\varphi, \gamma_{[n]}), \ldots), \ \gamma \in \mathrm{Cort}_\infty A.$$

Еще раз подчеркнем особенность автоморфизмов множества $\mathrm{Cort}\, A$: если кортежи ν и μ имели общее начало τ, то и их образы будут иметь общее начало — образ кортежа τ.

Упорядоченное множество Cort A иногда будет полезно рассматривать как дерево, вершинами которого являются кортежи, а ребрами соединены кортежи ν, μ, где $\nu \in \mu^+$. Поскольку все интересующие нас преобразования принадлежат группе Aut Cort A, то для наших целей языки кортежей и деревьев равносильны. Этим мы будем пользоваться, давая некоторые формулировки на более наглядном, но хуже поддающемся формализации языке деревьев.

Пусть f — преобразование множества Cort A; назовем его носителем множество

$$\operatorname{supp} f = \{n \in \mathrm{N} \mid (\nu f)_n \neq \nu_n \text{ для некоторого } \nu \in \operatorname{Cort} A\}.$$

Автоморфизм упорядоченного множества Cort A назовем мутацией, если он изменяет самое большее один член любого кортежа. Мутацию f, действующую только на первые члены кортежей как некоторая подстановка $\pi_0 = \pi_0(f) \in \operatorname{Sym} A_0$, назовем корневой (она действует только у «корня» дерева Cort A). Пусть $\gamma \in \operatorname{Cort}_\infty A$ — фиксированный бесконечный кортеж. Мутацию g назовем мутацией вдоль γ или, более собирательно, продольной мутацией, если она имеет бесконечный носитель, оставляет кортеж γ неподвижным, а на любой другой кортеж η действует так: если n — первый номер, для которого $\eta_n \neq \gamma_n$, то g действует на следующий член η_{n+1} как некоторая подстановка $\pi_{n+1} = \pi_{n+1}(g, \gamma, \eta_n) \in \operatorname{Sym} A_{n+1}$, зависящая только от g, γ, n, η_n, а остальные члены не меняет. Подстановки $\pi_0(f)$, $\pi_1(g, \gamma, a_0)$, $\pi_2(g, \gamma, a_1)$, ..., $a_i \in A_i$, будем называть сопровождающими 0-го, 1-го, 2-го и т. д. уровней соответствующих мутаций, γ — направляющим кортежем мутации g.

ЛЕММА 1. *Пусть A — последовательность множеств, содержащих не менее двух элементов. Всякая продольная мутация множества* Cort A *имеет единственный направляющий кортеж.*

Доказательство. Пусть, напротив, некоторая продольная мутация g имеет два различных направляющих кортежа γ, γ' и n — первый номер, для которого $\gamma_n \neq \gamma'_n$. Так как носитель supp g бесконечен, то найдутся число $m > n + 1$ и кортеж η такие, что $(\eta g)_{m+1} \neq \eta_{m+1}$. По определению направляющего кортежа отсюда следует, что

$$\eta \equiv \gamma \pmod{m-1}, \qquad \eta \equiv \gamma' \pmod{m-1}.$$

Таким образом, $\gamma \equiv \gamma' \pmod{m-1}$ — противоречие. Лемма доказана.

Лемма 1 гарантирует, что каждая из сопровождающих подстановок $\pi_n = \pi_n(g, \gamma, a_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, продольной мутации g зависит на самом деле только от g и a_{n-1}.

Мы готовы теперь определить основной объект нашего изучения.

Пусть $A = (A_0, A_1, \ldots)$ — последовательность множеств, каждое из которых содержит не менее двух элементов, C — некоторая подгруппа корневых, D — некоторое подмножество продольных мутаций множества Cort A,

$$\Pi_0 = \Pi_0(C) = \text{гр}\ (\pi_0(f) \mid f \in C),$$

$$\Pi_n = \Pi_n(D) = \text{гр}\ (\pi_n(g, a) \mid g \in D,\ a \in A_{n-1}),$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Если все группы $\Pi_0, \Pi_1, \ldots$ транзитивны, то будем называть $H = \text{гр}\ (C, D)$ группой алёшинского типа или, короче, AT-группой (над последовательностью A), а $\Pi_0, \Pi_1, \ldots$ — ее сопровождающими группами подстановок. Множество $C \cup D$ назовем каноническим множеством порождающих группы H, C — корневой, D — продольной частью этого множества.

§ 2. **Срезки.** Пусть A — последовательность множеств $A_0, A_1, \ldots$, каждое из которых содержит не менее двух элементов. Каждой подстановке π множества A_n сопоставим корневую мутацию $c(\pi)$ множества Cort $A_{(n)}$, $A_{(n)} = (A_n, A_{n+1}, \ldots)$, действующую на первых членах кортежей как подстановка π.

Пусть $\nu \in \text{Cort}\ A$, $[\nu, \infty)$ — множество всех кортежей из Cort A с фиксированным началом ν, $\text{St}(\nu)$ — стабилизатор кортежа ν в группе Aut Cort A. Рассмотрим взаимно однозначное отображение

$$[\nu]\colon [\nu, \infty) \to \text{Cort}\ A_{(n)}, \qquad n = \|\nu\|,$$

по правилу $\mu \mapsto \mu_{(n)}$. Легко видеть, что для всякого $\varphi \in \text{St}(\nu)$ существует единственный автоморфизм $\varphi^{\{\nu\}} \in \text{Aut Cort}\ A_{(n)}$, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} [\nu, \infty) & \xrightarrow{[\nu]} & \text{Cort}\ A_{(n)} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^{\{\nu\}}} \\ [\nu, \infty) & \xrightarrow{[\nu]} & \text{Cort}\ A_{(n)} \end{array}$$

коммутативной. Назовем этот $\varphi^{\{\nu\}}$ ν-срезкой автоморфизма φ. Очевидно, что отображение $\{\nu\}$: $\mathrm{St}\ (\nu) \to \mathrm{Aut\,Cort}\ A_{(n)}$ есть гомоморфизм. Отметим, что на языке деревьев ν-срезка автоморфизма φ — это сужение φ на поддерево с корнем ν. Если $\Phi \subseteq \mathrm{St}\,(\nu)$, то множество $\Phi^{\{\nu\}} = \{\varphi^{\{\nu\}} \mid \varphi \in \Phi\}$ будем называть ν-срезкой множества Φ.

Пусть $\nu \in \mathrm{Cort}_n A$, $\mu = \nu\tau$, где $\mu_{[n]} = \nu$, $\mu_{(n)} = \tau$, $n \in \mathbf{N}$. Нетрудно проверить, что если к преобразованию φ применима ν-срезка, а к преобразованию $\varphi^{\{\nu\}}$ τ-срезка, то к φ применима μ-срезка и $\varphi^{\{\mu\}} = (\varphi^{\{\nu\}})^{\{\tau\}}$.

Пусть f — произвольная продольная мутация множества $\mathrm{Cort}\ A$, γ — направляющий кортеж мутации f. Очевидно, преобразование $f_n = f^{\{\nu\}}$, $\nu = \gamma_{[n]}$, множества $\mathrm{Cort}\ A_{(n)}$ является продольной мутацией с направляющим кортежем $\gamma_{(n)}$, $n \in \mathbf{N}$. Мутацию f_n назовем n-срезкой мутации f.

Пусть H — некоторая AT-группа над последовательностью A, C, D — корневая и продольная части канонического множества порождающих групп H, Π_n — n-я сопровождающая группа подстановок группы H. Пусть $C_n = \text{гр}(c\ (\pi) \mid \pi \in \Pi_n)$, $D_n = \{d_n \mid d \in D\}$, $n = 0, 1, \ldots$. Очевидно, группа $H_n = \text{гр}\,(C_n, D_n)$ является AT-группой над последовательностью $A_{(n)}$; назовем ее n-срезкой группы H. Ясно, что $H_0 = H$.

Отметим простой, но полезный факт: m-срезка группы H_n — это в точности группа H_{n+m}, а m-я сопровождающая группа подстановок группы H_n — это $(n+m)$-я сопровождающая группа подстановок группы H, $n, m \in \mathbf{N}$.

Пусть $C \subseteq \mathrm{Cort}\ A$, $\mathrm{St}_H\ (C)$ — (поэлементный) стабилизатор множества C в группе H.

ЛЕММА 2. *Пусть H — группа алёшинского типа, $\nu \in \mathrm{Cort}\ A$. Тогда ν-срезка стабилизатора $\mathrm{St}_H\ (\nu)$ равна $\|\nu\|$-срезке группы H.*

Доказательство будем вести индукцией по длине $\|\nu\|$ кортежа ν. Если $\|\nu\| = 0$, то утверждение тривиально. Пусть $\|\nu\| = 1$, C, D — корневая и продольная части канонического порождающего множества группы H. Имеем

$$\mathrm{St}_H\ (\nu) \geqslant \mathrm{St}_H\ (\mathrm{Cort}_1 A) = \text{гр}\,(d^c \mid d \in D,\ c \in C).$$

Так как ν-срезка корневой мутации, принадлежащей $\mathrm{St}_H\ (\nu)$, является тождественным отображением, то достаточно установить равенство

$$(\mathrm{St}_H\,(\mathrm{Cort}_1 A))^{\{\nu\}} = H_1. \tag{1}$$

Пусть $c \in C$, $d \in D$, γ — направляющий кортеж мутации d. Ясно, что если $\nu_0 \neq \gamma_0$, то $d^{\{\nu\}}$ — корневая мутация $c\,(\pi_1\,(d,\,\nu_0))$, а если $\nu_0 = \gamma_0$, то $d^{\{\nu\}}$ — продольная мутация d_1. Кроме того,

$$(c^{-1}dc)^{\{\nu c\}} = d^{\{\nu\}}. \tag{2}$$

Так как, по определению, группа C корневых мутаций транзитивна на множестве $\mathrm{Cort}_1 A$, то (1) очевидно.

Допустим для любой AT-группы и любого ν длины $\|\nu\| < n$ утверждение леммы доказано. Пусть $\|\nu\| = n$ и μ — начало длины $n-1$ кортежа ν. По предположению индукции $(\mathrm{St}_H\,(\mu))^{\{\mu\}} = H_{n-1}$. Возьмем подгруппу $X \leqslant \mathrm{St}_H\,(\mu)$ такую, что $X^{\{\mu\}} = \mathrm{St}_{H_{n-1}}\,(\mathrm{Cort}_1 A_{(n-1)})$. Тогда $X \leqslant \mathrm{St}_H\,(\nu)$ и, по доказанному,

$$X^{\{\nu\}} = (\mathrm{St}_{H_{n-1}}\,(\mathrm{Cort}_1\,A_{(n-1)}))^{\{\nu_{n-1}\}} = H_n.$$

Лемма доказана.

Пусть H — группа алёшинского типа над последовательностью A, H_n — ее n-срезка, C_n, D_n — корневая и продольная части канонического множества порождающих группы H_n, $n = 0, 1, \ldots$ Напомним, что соотношением в группе G с порождающим множеством X называется элемент свободной группы с базой X, равный в группе G единичному элементу. Соотношениями ранга 0 в группе H_n назовем элементы нормальной подгруппы, порождаемой в свободной группе с базой $C_n \cup D_n$ соотношениями в группе C_n и соотношениями между мутациями из D_n, имеющими одинаковые направляющие кортежи. Если соотношения ранга $m-1$ уже определены во всех группах H_n, то соотношением ранга m называется всякое соотношение в группе H_n такое, что любая его ν-срезка, $\nu \in \mathrm{Cort}_1 A_{(n)}$, является соотношением ранга $m-1$ в группе H_{n+1}.

П р е д л о ж е н и е 1. *Всякое соотношение в группе H алёшинского типа является соотношением некоторого конечного ранга.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть v — произвольное слово в канонических порождающих $C \cup D$ группы H,

$$v = * f_1 * \ldots * f_n *, \tag{3}$$

где $*$ — нетривиальные корневые мутации из C, f_i — нетривиальные продольные мутации из D, а первая и последняя звездочки могут отсутствовать. Число n назовем D-длиной слова v. (Длиной элемента $h \in H$ назовем минимум $\| h \|$ D-длин представляющих его слов — это определение понадобится в будущем.) Доказательство проведем индукцией по D-длине соотношения v. Если его D-длина равна 0, то это, по определению, соотношение ранга 0. Пусть утверждение уже доказано для соотношений D-длины, меньшей n в любой AT-группе. Пусть v — соотношение D-длины n в группе H, записанное в виде (3). Так как слово v задает единичный элемент группы H, то, выбрасывая из v слоги f_i, получим слово в порождающих C, задающее единицу группы C. Поэтому слово v можно записать в виде $v = f_1^* \ldots f_n^*$, где f_i^* — сопряжение f_i при помощи некоторого элемента группы C. Рассматривая всевозможные ν-срезки слова v, $\| \nu \| = 1$, учтем, что у каждой продольной мутации f_i^* только одна ν-срезка является продольной мутацией, остальные — корневые. Таким образом, либо D-длина каждого слова $v^{\{\nu\}}$ меньше n, либо в точности одно из них имеет D-длину, равную n, а остальные имеют D-длину, равную 0. В первом случае, по предположению индукции, все слова $v^{\{\nu\}}$ являются соотношениями конечного ранга в группе H_1. Во втором случае либо все продольные мутации, входящие в запись слова $v^{\{\nu\}}$, имеют один и тот же направляющий кортеж, и тогда $v^{\{\nu\}}$ — соотношение ранга 0 в группе H_1, либо не все направляющие кортежи равны. Продолжая применять ν-срезки, на конечном шаге уменьшим D-длину слова. Предложение доказано.

§ 3. Действие на дереве кортежей.

Предложение 2. *Семейства почти равных кортежей (т. е. кортежей, отличающихся лишь конечным числом членов) являются орбитами AT-группы H над последовательностью A при действии H на множестве* $\mathrm{Cort}_\infty A$.

Доказательство. Если кортежи γ и γ' принадлежат одной орбите, то они, очевидно, почти равны. Пусть кортежи γ и γ' почти равны, n — максимальный номер, для которого $\gamma_n \neq \gamma_n'$. Пусть $\nu = \gamma_{[n]}$, π — такой элемент n-й сопровождающей группы подстановок, что $\gamma_n \pi = \gamma_n'$. По лемме 2 найдется $g \in \mathrm{St}_H(\nu)$ такой, что $g^{\{\nu\}}$ — корневая мутация $c(\pi)$ множества $\mathrm{Cort}\, A_{(n)}$.

Нетрудно заметить, что кортежи γg и γ' отличаются самое большее первыми n членами. Вновь и вновь применяя прежние рассуждения, получим последовательность таких элементов $g = g_1, \ldots, g_s$ группы H, что $\gamma g_1 \ldots \ldots g_s = \gamma'$. Более того, пусть $h = g_1 \ldots g_s$, $\tau = \gamma_{[n+1]}$, $\mu = \gamma'_{[n+1]}$. Нетрудно заметить, что $(\tau\eta)\, h = \mu\eta$ для любого $\eta \in \operatorname{Cort} A_{(n+1)}$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть H — группа алёшинского типа над последовательностью A. Централизатор группы H в группе автоморфизмов упорядоченного множества* $\operatorname{Cort} A$ *тривиален.*

Доказательство. Пусть φ — автоморфизм множества $\operatorname{Cort} A$, централизующий группу H,

$$\{\pi(\varphi, \nu) \in \operatorname{Sym} A_{\|\nu\|} \mid \nu \in \operatorname{Cort} A\},$$

определяющий его набор подстановок. Допустим сначала, что подстановка $\pi = \pi(\varphi, \varnothing)$ нетривиальна и $a \neq b$ — такие элементы множества A_0, что $a\pi = b$.

В группе H выберем продольную мутацию d с таким направляющим кортежем γ, что $\gamma_0 = a$. Это в AT-группе всегда возможно, так как если c — корневая мутация AT-группы, то продольная мутация d^c имеет направляющий кортеж γc. Положим $\psi = c^{-1}(\pi)\varphi$, где $c(\pi)$ — корневая мутация множества $\operatorname{Cort} A$. Используя формулу (2) из § 3, получаем

$$\theta = [\varphi, d]^{\{b\}} = (\psi^{-1})^{\{b\}}\,(c^{-1}(\pi)\, d^{-1}\, c(\pi))^{\{b\}}\, \psi^{\{b\}}\, d^{\{b\}} = \\ = (\psi^{\{b\}})^{-1}\, d^{\{a\}}\psi^{\{b\}} c\,(\pi_1(d, b)),$$

где $\pi_1(d, b)$ — сопровождающая подстановка мутации d. Поскольку $d^{\{a\}} = d_1 \neq 1$, то при $\pi_1(d, b) = 1$ автоморфизм θ нетривиален; если же $\pi_1(d, b) \neq 1$, то θ не стабилизирует первые члены кортежей из $\operatorname{Cort} A_{(1)}$ и тем более нетривиален — противоречие с центральностью φ. Таким образом, подстановка $\pi(\varphi, \varnothing)$ тривиальна. Так как для любого $\nu \in \operatorname{Cort}_1 A$ определена ν-срезка $\varphi^{\{\nu\}}$ автоморфизма φ и $\varphi^{\{\nu\}}$ централизует группу $H_1 = (\operatorname{St}_H(\nu))^{\{\nu\}}$, то к ним применимы те же рассуждения. Предложение доказано.

Пусть $\nu \in \operatorname{Cort} A$. Наибольшую подгруппу группы H, нетривиально действующую только на кортежи с началом ν, т. е. $\operatorname{St}_H(\operatorname{Cort} A \setminus [\nu, \infty))$, назовем костабилизатором кортежа ν и будем обозначать $\operatorname{Cost}_H(\nu)$. Очевидно, $\operatorname{Cost}_H(\nu) \lhd \operatorname{St}_H(\nu)$. В силу предложения 2, если $\|\nu\| =$

$= \| \mu \|$, то $\mathrm{Cost}_H(\nu)$ и $\mathrm{Cost}_H(\mu)$ (соответственно $\mathrm{St}_H(\nu)$ и $\mathrm{St}_H(\mu)$) сопряжены в группе H.

§ 4. Признаки периодичности. Предложение 4. *Пусть H — группа алёшинского типа над последовательностью A, Π_n — ее n-я сопровождающая группа подстановок, H_n — n-срезка группы H, $n = 0, 1, \ldots$ Тогда* а) *если для любого $n \in \mathbf{N}$ группа Π_n не имеет кручения, то и группа H не имеет кручения*; б) *если хотя бы одна из групп Π_n непериодическая, то и группа H непериодическая*; в) *если группа H периодическая, то и группа H_n периодическая, $n = 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Докажем а). По условию фактор-группа

$$H_n/\mathrm{St}_{H_{(n)}}(\mathrm{Cort}_1 A_{(n)}) \cong \Pi_n$$

не имеет кручения и, значит, все элементы множества $H_n \setminus \mathrm{St}_{H_n}(\mathrm{Cort}_1 A_{(n)})$ имеют бесконечный порядок, $n = 0, 1, \ldots$ Пусть элемент h принадлежит множеству $\mathrm{St}_H(\mathrm{Cort}_n A) \setminus \mathrm{St}_H(\mathrm{Cort}\, A)$, тогда найдется такой кортеж $\nu \in \mathrm{Cort}_n A$, что преобразование $h^{\{\nu\}}$ принадлежит множеству $H_n \setminus \mathrm{St}_{H_n}(\mathrm{Cort}_1 A_{(n)})$ и, следовательно, имеет бесконечный порядок, $n = 1, 2, \ldots$ Утверждение а) доказано.

Утверждения б) и в) являются очевидными следствиями леммы 2 из § 2. Предложение доказано.

Отметим, что если AT-группа H не имеет кручения (или конечно порождена), то это не влечет отсутствия кручения (соответственно конечную порожденность) даже одной из групп H_n.

Пусть $\omega = (p_0, p_1, \ldots)$ — некоторая последовательность простых чисел. Последовательность $A = (A_0, A_1, \ldots)$, где $A_n = \{0, 1, \ldots, p_n - 1\}$, назовем ω-последовательностью. Обозначим через $\mathrm{Wr}(\omega)$ подгруппу группы $\mathrm{Aut\, Cort}\, A$, состоящую из автоморфизмов φ, определяемых наборами подстановок вида

$$\{\pi(\varphi, \nu) \in \mathrm{гр}\ (\pi_{p_n}) \mid \nu \in \mathrm{Cort}_n A,\ n = 0,1, \ldots\},$$

где $\pi_{p_n} = (0, 1, \ldots, p_n - 1)$. Заметим, что как абстрактная группа $\mathrm{Wr}(\omega)$ изоморфна обратному пределу сплетений $(\ldots(\mathbf{Z}_{p_n} г \mathbf{Z}_{p_{n-1}}) г \ldots) г \mathbf{Z}_{p_0}$, чем и объясняется ее обозначение. AT-группу над ω-последовательностью A, содержащуюся в группе $\mathrm{Wr}(\omega)$, будем называть AT_ω-группой. Пусть $f \in \mathrm{Wr}(\omega)$ — продольная мутация с направляющим кортежем γ, $\{\pi_{n+1}(f, a) \mid a \in A_n\}$ — ее сопровождающие подстановки $(n+1)$-го уровня, $n = 0, 1, \ldots$ Пусть f^0 — продольная мутация с направляющим кортежем $(0, 0, \ldots)$ и сопровождающими подстановками $(n+1)$-го уровня

$$\{\pi_{n+1}(f^0, a) = \pi_{n+1}(f, a + \gamma_n) \mid a \in A_n\}$$

(здесь нам удобно рассматривать A_n как группу относительно сложения по модулю p_n). Назовем f^0 спрямлением мутации f, а если F — множество продольных мутаций из $\mathrm{Wr}(\omega)$, то $F^0 = \{f^0 \mid f \in F\}$ — спрямлением множества F. Если f, g — продольные мутации из $\mathrm{Wr}(\omega)$, то положим $(fg)^0 = f^0 g^0$. Очевидно, группа гр(F^0) абелева, а все ее элементы — продольные мутации с направляющим кортежем $(0, 0, \ldots)$. Столь же очевидно, что если $f \in \mathrm{Wr}(\omega)$ — продольная мутация, а f_n — ее n-срезка, то $(f^0)_n = f_n$.

Пусть f — продольная мутация из $\mathrm{Wr}(\omega)$. Назовем

$$\mathrm{Sp}(n, f) = \prod_{a \in A_{n-1}} \pi_n(f, a)$$

ее n-м следом. Условимся 1-й след обозначать просто $\mathrm{Sp}(f)$. Понятно, что $\mathrm{Sp}(n, f) = \mathrm{Sp}(n, f^0)$ и $\mathrm{Sp}(n, f) = \mathrm{Sp}(f_{n-1})$.

Пусть $\omega = (p, p, \ldots)$, A — ω-последовательность, c — корневая мутация множества $\mathrm{Cort}\, A$ с сопровождающей подстановкой $\pi = (0, 1, \ldots, p-1)$. Пусть F обозначает множество всех продольных мутаций с направляющим кортежем $(0, 0, \ldots)$. Отметим, что каждая из групп, построенных в работах [2, 3, 6], является AT_ω-группой и имеет каноническое множество порождающих вида гр$(c) \bigcup D$, где $D \subset F$. Каждая группа из [1] получается расширением поддекартова произведения p^2 экземпляров одной из групп описанного типа при помощи группы $\mathbf{Z}_{p^2}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* ω — *некоторая последовательность простых чисел,* H — AT_ω-*группа над* ω-*последовательностью* A, D — *продольная часть канонического порождающего множества группы* H. *Группа* H *тогда и только тогда будет периодической, когда* а) *последовательность* ω *ограничена и каждая мутация* $f \in$ гр (D^0) *имеет бесконечно много тривиальных следов или* б) *последовательность* ω *неограничена, а порядки всех мутаций* $f \in D$ *конечны.*

Доказательство. Достаточность. Если выполняется условие б), то периодичность группы G очевидна, поэтому пусть выполняется а). Пусть $h \in H$. Докажем, что элемент h периодичен (т. е. его порядок $|h|$ конечен), индукцией по D-длине $\| h \|$ (определение $\| h \|$ см. в предложении 1 § 2). Если $\| h \| = 0$, то периодичность h очевидна. Пусть уже доказана периодичность всех элементов длины, меньшей n, во всех m-срезках группы H и $\| h \| = n$.

1) Пусть $h \in \mathrm{St}_H (\mathrm{Cort}_1 A)$. Ясно, что h можно считать произведением продольных мутаций. Если при этом все они имеют один и тот же направляющий кортеж, то элемент h периодичен в силу условия а). Пусть ν — наибольшее общее начало всех направляющих кортежей мутаций, входящих в запись элемента h. Так как

$$\sum\nolimits'_{\mu \in \nu^+} \| h^{\{\mu\}} \| \leqslant \| h^{\{\nu\}} \|,$$

то $\| h^{\{\mu\}} \| < n$ для любого $\mu \in \nu^+$. По предположению индукции элемент $h^{\{\nu\}}$, а вместе с ним и h периодические.

2) Пусть $h = cg$, где c — неединичная корневая мутация, $g \in \mathrm{St}_H (\mathrm{Cort}_1 A)$. Так как $h^{p_0} \in \mathrm{St}_H (\mathrm{Cort}_1 A)$ и все ν-срезки элемента h^{p_0}, $\nu \in A_0$, попарно сопряжены, то достаточно доказать периодичность любой одной из них, например $h_{(1)} = (h^{p_0})^{\{\nu\}}$. Если $\| h_{(1)} \| < n$, то $h_{(1)}$, а значит, и h периодические. Пусть $\| h_{(1)} \| = n$. Нетрудно заметить, что $h_{(1)} = c\,(\mathrm{Sp}\,(g^0))\, g_{(1)}$, где $g_{(1)}$ — некоторый элемент из $\mathrm{St}_{H_1} (\mathrm{Cort}_1 A_{(1)})$ и $g^0_{(1)} = (g^0)_1$. Если $\mathrm{Sp}\,(g^0) \neq$ $\neq 1$, то продолжаем в том же духе: строим элемент $h_{(2)} =$ $= (h^{p_1}_{(1)})^{\{\mu\}}$, где μ — некоторый элемент из A_1, и т. д. В силу условия б) найдется номер m такой, что $\mathrm{Sp}\,(m, g^0) = 1$. Если даже окажется, что $\| h_{(m)} \| = n$, то из равенств $\mathrm{Sp}\,(g^0_{(m-1)}) = \mathrm{Sp}\,((g^0)_{m-1}) = \mathrm{Sp}\,(m, g^0) = 1$ будет следовать, что $h_{(m)} = c\,(\pi)\, g_{(m)} = g_{(m)}$, и мы возвращаемся к пункту 1), так как $\pi = \mathrm{Sp}\,(g^0_{(m-1)})$.

(Заметим еще, что если бы было $\mathrm{Sp}\,(m, g^0) \neq 1$ для всех $m = 1, 2, \ldots$, то из рассуждений пункта 2) следовало бы, что $|h| = \infty$.)

Необходимость. Пусть группа G периодическая. Если последовательность ω неограничена, то утверждение тривиально. Пусть последовательность ω ограничена, но тем не менее существует такая мутация $f \in \mathrm{гр}\,(D^0)$, которая имеет лишь конечное число тривиальных следов.

Пусть число $n \in \mathbf{N}$ таково, что $\mathrm{Sp}(m, f) \neq 1$ при $m \geqslant n$. В n-срезке H_n группы H возьмем такой элемент $h = cg$, где c — некоторая неединичная корневая мутация, $g \in \mathrm{St}_{H_n}(\mathrm{Cort}_1 A_{(n)})$, что $g^0 = f_n$. В силу замечания после пункта 2) $|h| = \infty$. По лемме 2 из § 2 группа H непериодическая. Теорема доказана.

Пусть H — группа алёшинского типа над последовательностью $A = (A_0, A_1, \ldots)$. Пусть $A_r = \{0, 1, \ldots \ldots, p_r - 1\}, \ldots, A_s = \{0, 1, \ldots, p_s - 1\}$, где $p_r, \ldots \ldots, p_s$ — некоторые простые числа, $0 \leqslant r < s < \infty$. Нам снова будет удобно рассматривать каждое A_n как группу относительно сложения по модулю p_n. Пусть D — продольная часть канонического порождающего множества группы H. Предположим, что если $f \in D$ и $A_n = \{0, 1, \ldots \ldots, p - 1\}$, $r \leqslant n \leqslant s$, то сопровождающие подстановки n-го уровня мутации f являются степенями подстановки $\pi_p = (0, 1, \ldots, p - 1)$. Пусть $f \in D$, γ — направляющий кортеж мутации f. Через $f^{[r,s]}$ обозначим мутацию множества $\mathrm{Cort}\, A$, получающуюся из произвольной продольной мутации g с направляющим кортежем $\eta = (\gamma_{[r]}, \underbrace{0, \ldots 0}_{s-r}, \gamma_{(s)})$ и сопровождающими подстановками n-го уровня

$$\pi_n(g, a) = \pi_n(f, a + \gamma_{n-1}), \qquad a \in A_{n-1},$$

при $r < n \leqslant s$ стиранием всех сопровождающих подстановок остальных уровней (т. е. заменой их на тождественную подстановку). Положим $D^{[r,s]} = \{d^{[r,s]} \mid d \in D\}$. Если d и f — продольные мутации, то положим $(df)^{[r,s]} = d^{[r,s]} f^{[r,s]}$. Понятно, что группа гр $(D^{[r,s]})$ абелева. Поясним, что отображение $[r, s]$ — это аналог отображения спрямления $f \mapsto f^0$ в ситуации, когда спрямление на всех уровнях невозможно или не требуется.

Если для любого $f \in$ гр $(D^{[r,s]})$ найдется такое n, что $r < n \leqslant s$ и $\mathrm{Sp}(n, f) = 1$, то конечную последовательность $A_r, \ldots, A_s$ назовем **участком понижения** для группы H.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть H — группа алёшинского типа над последовательностью A, имеющая бесконечно много участков понижения, H_n — n-срезка группы H, Π_n — ее n-я сопровождающая группа подстановок, D_n — продольная часть канонического порождающего множества группы H_n. Для того чтобы группа H была периодической, достаточно выполнения любого из двух следующих условий:*
а) *периоды всех групп Π_n ограничены в совокупности;*

б) *группы* Π_n *периодические, каждая мутация из* D_n *имеет лишь конечное число нетривиальных сопровождающих подстановок данного уровня и мутации из* D_n, *имеющие одинаковые направляющие кортежи, порождают периодические группы*, $n = 0, 1, \ldots$

Доказательство. Пусть $h \in H$. Докажем, что $|h| < \infty$, индукцией по $\| h \|$. Если $\| h \| = 0$, то утверждение очевидно. Пусть доказана периодичность элементов длины, меньшей n, во всех группах H_m, $m = 0, 1, \ldots$, и $\| h \| = n$.

1) Пусть $h \in \mathrm{St}_H (\mathrm{Cort}_1 A)$. Тогда доказательство совпадает с доказательством пункта 1) теоремы 1.

2) Пусть $h = cg$, где c — неединичная корневая мутация, $g \in \mathrm{St}_H (\mathrm{Cort}_1 A)$. Если B — множество, $b \in B$ и $\pi \in \mathrm{Sym}\ B$ — подстановка порядка k, то пусть $O(b, \pi)$ обозначает упорядоченную орбиту $b, b\pi, \ldots, b\pi^{k-1}$ элемента b. Отметим, что в $O(b, \pi)$ элементы могут циклически повторяться, число этих повторений назовем кратностью орбиты.

Пусть $c^k = 1$, тогда

$$(h^k)^{\{a\}} = \prod\nolimits_{\nu \in O(a,\ \pi_0(c))} g^{\{\nu\}}, \qquad a \in A_0.$$

Пусть l — кратность орбиты $O(a, \pi_0(c))$. Положим

$$h_{(a)}^l = (h^k)^{\{a\}}.$$

Так как $\sum_{\nu \in A_0} \| g^{\{\nu\}} \| \leqslant n$, то $\| h_{(a)} \| \leqslant n$. Покажем, что порядки всех элементов $h_{(\nu)}$, $\nu \in A_0$, ограничены в совокупности (что равносильно периодичности элемента h). Очевидно, только конечное число из них имеет ненулевую длину, а порядки элементов нулевой длины ограничены в совокупности — в случае а) это следует из конечности периода группы Π_1, а в случае б) — из того, что среди этих $h_{(\nu)}$ только конечное число неединичных. Таким образом, если

$$\| h_{(\nu)} \| < n \text{ для всех } \nu \in A_0, \tag{4}$$

то доказательство завершает индукция.

Пусть $\| h_{(a)} \| = n$ для некоторого $a \in A_0$. Очевидно, что $\| h_{(\nu)} \| = n$ тогда и только тогда, когда $\nu \in O(a, \pi_0(c))$, и все такие $h_{(\nu)}$ попарно сопряжены. Достаточно поэтому доказать, что указанный элемент $h_{(a)}$ периодический. Если

$$h_{(a)} \in \mathrm{St}_{H_1} (\mathrm{Cort}_1 A_{(1)}), \tag{5}$$

то возвращаемся к пункту 1). В противном случае возвращаемся к началу пункта 2), но теперь уже с элементом $h_{(a)}$ в группе H_1. На некотором конечном шаге с номером r либо встретится ситуация, аналогичная (4) или (5), либо мы окажемся в группе H_r над последовательностью $A_{(r)} = (A_r, A_{r+1}, \ldots)$, и последовательность $A_{(r)}$ начинается с участка понижения. Тогда остается повторить рассуждения пункта 2) доказательства теоремы 1, заменяя отображение $f \to f^0$ на отображение $[r, s]$. Теорема доказана.

§ 5. Пример 2-порожденной периодической AT-группы с произвольным кручением.

Пример. *Существует 2-порожденная периодическая группа алёшинского типа, содержащая для каждого натурального числа k элементы порядка k.*

Построение такой группы проведем поэтапно.

а) Пусть p — нечетное простое число, $\omega = (3, 3, p, 3, 3, p, \ldots)$. Построим сначала конечно порожденную периодическую AT-группу L_p с произвольным p-кручением, т. е. содержащую элементы любых порядков p^m, $m = 1, 2, 3, \ldots$

Пусть $A = (A_0, A_1, \ldots)$, где

$$A_{3n} = A_{3n+1} = \mathbf{Z}_3, \quad A_{3n+2} = \mathbf{Z}_p, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Обозначим через c корневую мутацию дерева Cort A с сопровождающей подстановкой $\pi_3 = (0, 1, 2)$. Пусть $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ — всевозможные тройные циклы на множестве $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, s$ обозначим через f_i продольную мутацию с направляющим кортежем $(0, 0, \ldots)$ и сопровождающими подстановками

$$(\pi_n(f_i, 0), \ldots, \pi_n(f_i, q-1)) = \\ = \begin{cases} (1, \pi_3, \pi_3^{-1}) & \text{при} \quad n \equiv 1 \pmod 3, \\ (1, \sigma_i, 1) & \text{при} \quad n \equiv 2 \pmod 3, \\ (1, \pi_3, 1, \ldots, 1) & \text{при} \quad n \equiv 0 \pmod 3, \end{cases} \tag{6}$$

где $q = p$ при $n \equiv 0 \pmod 3$, $q = 3$ при $n \not\equiv 0 \pmod 3$, $n = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим также продольную мутацию g с направляющим кортежем $(0, 0, \ldots)$ и сопровождающими подстановками (6), но с заменой σ_i на тождественную подстановку.

Положим $L_p = \text{гр}\,(c, f_1, \ldots, f_s, g)$. Очевидно, все порождающие этой группы имеют порядок 3, а конечные последовательности A_{3n}, A_{3n+1}, $n = 0, 1, \ldots$, являются участками понижения. Группа L_p удовлетворяет условию а) теоремы 2 и поэтому периодическая.

Обозначим через d продольную мутацию с направляющим кортежем $(0, 0, \ldots)$ и сопровождающими подстановками (6), но с заменой σ_i на $\pi_p = (0, 1, \ldots, p-1)$. Понятно, что группа $H = \text{гр}\,(c, d)$ является AT_ω-группой над последовательностью A и $H \leqslant L_p$.

Докажем, что группа H имеет произвольное p-кручение. Достаточно проверить это свойство для ее 2-срезки H_2.

Так как элемент $h \in \mathrm{St}_H\,(\mathrm{Cort}_1\, A)$ полностью определяется своими ν-срезками, $\nu \in A_0$, то будем писать (в случае $A_0 = \mathbf{Z}_p$)

$$h = (h^{\{0\}}, h^{\{1\}}, \ldots, h^{\{p-1\}}).$$

Поскольку

$$H_2 = \text{гр}\,(c\,(\pi_p), d_2) \text{ и } d_2 = (d_3, c\,(\pi_3), 1, \ldots, 1),$$

где d_n — n-срезка продольной мутации d, то

$$(c\,(\pi_3)\, d_2^i)^p = (c^i\,(\pi_3)\, d_3^i, d_3^i c^i\,(\pi_3), \ldots, d_3^i c^i\,(\pi_3)), \qquad i = \pm 1. \quad (7)$$

Обозначим через N нормальное замыкание в группе H_2 левых частей этого равенства. Очевидно, подгруппа N содержится в p-й степени группы H_2 (т. е. подгруппе, порожденной p-ми степенями элементов из H_2). Ввиду равенств $H_2 = H_5 = H_8 = \ldots$ для доказательства утверждения о произвольности p-кручения в группе H_2 достаточно установить, что

$$(N \cap \mathrm{St}_{H_2}\,(\nu))^{\{\nu\}} = H_5, \qquad \nu = (0, 0, 0). \quad (8)$$

Докажем (8). Так как $N \lhd \mathrm{St}_{H_2}(0)$, то $N^{\{0\}} \lhd (\mathrm{St}_{H_2}(0))^{\{0\}} = H_3$, и поскольку группа $N^{\{0\}}$ содержит элементы $c^i\,(\pi_3)\, d_3^i$, $i = \pm 1$ (см. (7)), то $N^{\{0\}} \geqslant [H_3, H_3]$. Далее, так как $H_3 = \text{гр}\,(c\,(\pi_3), d_3)$, где $d_3 = (d_4, c\,(\pi_3), c^{-1}\,(\pi_3))$, то

$$[c\,(\pi_3), d_3] = (c\,(\pi_3)\, d_4,\ d_4^{-1} c\,(\pi_3),\ c^{-1}\,(\pi_3)),$$

$$[c^{-1}\,(\pi_3)\, d_3 c\,(\pi_3),\ c\,(\pi_3)] = (c\,(\pi_3),\ d_4^{-1} c^{-1}\,(\pi_3),\ c^{-1}\,(\pi_3) d_4),$$

и поэтому $[H_3, H_3]^{\{0\}} = H_4 > \mathrm{St}_{H_4}\,(0)$.

Возьмем в коммутанте $[H_3, H_3]$ такую подгруппу Y, что $Y^{\{0\}} = \mathrm{St}_{H_4}\,(0)$, а в подгруппе N такую подгруппу X, что $X^{\{0\}} = Y$, тогда $X^{\{(0,0,0)\}} = Y^{\{(0,0)\}} = (\mathrm{St}_{H_4}\,(0))^{\{0\}} = H_5$, и (8) доказано.

б) Построим теперь 2-порожденную периодическую группу с произвольным p-кручением и порождающими элементами порядка 3.

Пусть $p > 2$. В сплетении $L_p \wr \text{гр}(x \mid x^3 = 1)$, где L_p — группа из пункта а), рассмотрим подгруппу, порожденную элементом x и элементами базы сплетения

$$y_1 = (g_1, f_1, f_2), \ldots, y_k = (f_{3k-3}, f_{3k-2}, f_{3k-1}), \qquad y_{k+1} = (c, *, *),$$

где $k = [(s+1)/3]$, $*$ — либо 1, либо оставшийся порождающий f_i группы L_p. Эта подгруппа имеет $[(s+1)/3] + 2$ порождающих порядка 3, периодична и имеет произвольное p-кручение. Продолжая в том же духе, в конце концов получим периодическую группу M_p с порождающими x_p, y_p порядка 3, имеющую произвольное p-кручение.

В качестве группы M_2 возьмем 2-порожденную 2-группу Алёшина с порождающими x_2, y_2 порядка 2 и 4. В ней также есть любое 2-кручение (см. [7]).

в) Построим, наконец, искомую группу. Пусть A — последовательность групп

$$\mathbf{Z}_7, M_2, \mathbf{Z}_7, \mathbf{Z}_7, M_3, \mathbf{Z}_7, \mathbf{Z}_7, M_5, \ldots$$

Пусть c — корневая мутация дерева $\operatorname{Cort} A$ с сопровождающей подстановкой $\pi_7 = (0, 1, \ldots, 6)$, g — продольная мутация дерева $\operatorname{Cort} A$ с направляющим кортежем $(1, 1, \ldots)$ и сопровождающими подстановками n-го уровня

$$(\pi_n(g, 0), \ldots, \pi_n(g, 6)) = \begin{cases} (1, 1, \pi_7, 1, \pi_7^{-1}, 1, 1) & \text{при } n \equiv 0 \pmod 3, \\ (1, 1, \pi(x_p), 1, \pi(y_p), 1, 1) & \text{при } n \equiv 1 \pmod 3 \text{ и } A_n = M_p, \end{cases}$$

где $\pi(x_p)$, $\pi(y_p)$ — подстановки на группе M_p, порождаемые правыми сдвигами на элементы x_p и y_p соответственно, и единственной нетривиальной сопровождающей подстановкой n-го уровня $\pi_n(g, x_p) = \pi_7$ при $n \equiv 2 \pmod 3$ и $A_{n-1} = M_p$.

Нетрудно проверить, что группа $G = \text{гр}(c, g)$ является AT-группой над последовательностью A, удовлетворяет условию б) теоремы 2 и имеет бесконечно много участков понижения, а потому периодическая.

Покажем, что в группе G есть элементы любого наперед заданного порядка. Так как коммутант любой группы M_p имеет произвольное p-кручение и подгруппы $\operatorname{Cost}_G(\nu)$ и $\operatorname{Cost}_G(\mu)$ группы G перестановочны (поэлементно) при несравнимых кортежах ν и μ, то достаточно показать, что ν-срезка подгруппы $\mathrm{Cost}_G(\nu)$ содержит коммутант $\|\nu\|$-срезки $G_{\|\nu\|}$ группы G.

Так как для любого $\nu \in \mathrm{Cort}\, A$ имеем $\mathrm{Cost}_G(\nu) \lhd \mathrm{St}_G(\nu)$, то $(\mathrm{Cost}_G(\nu))^{\{0\}} \lhd G_{\|\nu\|}$. Поскольку коммутант конечно порожденной группы является нормальным замыканием коммутаторов порождающих (см. [5, лемма 3.2.2]), то достаточно показать, что $(\mathrm{Cost}_G(\nu))^{\{\nu\}}$ содержит эти коммутаторы.

Доказательство проведем индукцией по длине кортежа ν. При $\|\nu\| = 0$ утверждение очевидно. Пусть для $\|\mu\| = n-1$ уже доказано, что $(\mathrm{Cost}_G(\mu))^{\{\mu\}} \geqslant [G_{n-1}, G_{n-1}]$ и $\nu \in \mu^+$.

Легко видеть, что

$$(\mathrm{Cost}_G(\nu))^{\{\nu\}} = ((\mathrm{Cost}_G(\mu))^{\{\mu\}} \cap \mathrm{Cost}_{G_{n-1}}(\nu_{n-1}))^{\{\nu_{n-1}\}}.$$

Поэтому достаточно показать, что в группе $([G_{n-1}, G_{n-1}] \cap \mathrm{Cost}_{G_{n-1}}(\nu_{n-1}))^{\{\nu_{n-1}\}}$ содержатся все коммутаторы порождающих группы G_n. Очевидно, при этом можно ограничиться случаем $\nu_{n-1} = 1$. Ниже явно указываются элементы из $[G_{n-1}, G_{n-1}] \cap \mathrm{Cost}_{G_{n-1}}(1)$, $\{1\}$-срезки которых являются соответствующими коммутаторами.

Случай 1. Пусть $n \equiv 1 \pmod 3$ и $A_n = M_p$. Тогда

$$G_n = \text{гр}\,(g_n, c(\pi(x_p)), c(\pi(y_p))),$$
$$G_{n-1} = \text{гр}\,(g_{n-1}, c(\pi_7)),$$

где $g_{n-1} = (1, g_n, c(\pi(x_p)), 1, c(\pi(y_p)), 1, 1)$. Имеем

$$[g_{n-1}, c(\pi_7)\, g_{n-1} c^{-1}(\pi_7)] = (1, [g_n, c(\pi(x_p))], 1, 1, 1, 1, 1),$$
$$[g_{n-1}, c^3(\pi_7)\, g_{n-1} c^{-3}(\pi_7)] = (1, [g_n, c(\pi(y_p))], 1, 1, 1, 1, 1),$$
$$c(\pi_7)\, [g_{n-1}, c^2(\pi_7)\, g_{n-1} c^{-2}(\pi_7)]\, c^{-1}(\pi_7) =$$
$$= (1, [c(\pi(x_p)), c(\pi(y_p))], 1, 1, 1, 1, 1).$$

Случай 2. Пусть $n \equiv 2 \pmod 3$ и $A_{n-1} = M_p$. Тогда

$$G_n = \text{гр}\,(g_n, c(\pi_7)), \quad G_{n-1} = \text{гр}\,(g_{n-1}, c(\pi(x_p)), c(\pi(y_p))),$$

где продольная мутация g_{n-1} такова, что при $\nu \in A_{n-1}$

$$g_{n-1}^{\{\nu\}} = \begin{cases} g_n & \text{при } \nu = 1, \\ c(\pi_7) & \text{при } \nu = x_p, \\ 1 & \text{при } \nu \neq 1, x_p. \end{cases}$$

Легко видеть, что у коммутатора $[g_{n-1}, c(\pi(x_p)) \times \times g_{n-1}c^{-1}(\pi(x_p))]$ нетривиальна только $\{1\}$-срезка, равная $[g_n, c(\pi_7)]$.

Случай 3. Пусть, наконец, $n \equiv 0 \pmod 3$. Тогда

$$G_n = \text{гр}\,(g_n, c(\pi_7)), \quad G_{n-1} = \text{гр}\,(g_{n-1}, c(\pi_7)),$$

где $g_{n-1} = (1, g_n, c(\pi_7), 1, c^{-1}(\pi_7), 1, 1)$. Следовательно,

$$[g_{n-1}, c(\pi_7)\, g_{n-1}c^{-1}(\pi_7)] = (1, [g_n, c(\pi_7)], 1, 1, 1, 1, 1).$$

Все свойства группы G установлены.

Автор благодарит Ю. И. Мерзлякова за большую помощь и поддержку в работе.

Новосибирский государственный университет

Поступило 14.10.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Алёшин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Математические заметки. 1972. Т. 11. Вып. 3. С. 319—328.

[2] Григорчук Р. И. К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14. Вып. 1. С. 53—54.

[3] Григорчук Р. И. Степени роста конечно-порожденных групп и теория инвариантных средних // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. № 5. С. 939—985.

[4] Мерзляков Ю. И. О бесконечных конечно-порожденных периодических группах // ДАН СССР. 1983. Т. 268. № 4. С. 803—805.

[5] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[6] Gupta N., Sidki S. Some infinite p-groups // Алгебра и логика. 1983. Т. 22. № 5. С. 584—589.

[7] Рожков А. В. О подгруппах бесконечных конечно порожденных p-групп // Мат. сб. 1986. Т. 129. № 3. С. 422—433.