ПРИМЕНЕНИЕ ЯЗЫКА JULIA В НАУЧНЫХ ПРОЕКТАХ – НЕУЛУЧШАЕМОЕ УТОЧНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ МЕРТЕНСА[1]

THE USE OF THE JULIA LANGUAGE IN SCIENTIFIC PROJECTS IS AN UNIMPROVED REFINEMENT OF THE CLASSICAL MERTENS' THEOREMS

А.В. Рожков, И.А. Демонова, А.В. Светашева

A.V. Rozhkov, I.A. Demonova, A.V. Svetashova

Теория чисел, ОС Debian, язык программирования Julia, теорема Мертенса.
Проведены вычисления, занявшие более четырех лет, получены неулучшаемые результаты по теореме Мертенса о среднем значении функции Эйлера.

Number theory, Debian OS, Julia programming language, Mertens theorem.
Calculations were carried out that took more than four years, non-improved results were obtained according to Mertens's theorem on the average value of the Euler function.

Работа является продолжением и уточнением работы [2] на эту же тему.

В известной теореме Мертенса [1] о сумме значений функции Эйлера присутствует логарифм:

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(\mathrm{i}) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + O(\mathrm{n}\cdot\ln(\mathrm{n})) \,. \tag{1}$$

Наше предположение, что его присутствие виртуально.

В работе [2] число $t = \dfrac{3}{\pi^2}$ было задано до 15 знака после запятой. В данном исследовании значение t взято с точностью до 78 знака после запятой.

Это не главное отличие. 2 года вычисления производились в среде GAP http://www.gap-system.org/ на процессоре Core i5 4430, 3 ГГц, и были получены результаты вычислений среднего значения функции Эйлера до 36 млрд.

В октябре 2018 г. был опубликован релиз 1.0.1 языка программирования Julia (https://julialang.org/) и мы перешли к вычислениям в этой программной среде. Компьютер, на котором производились вычисления, остался тем же.

Полученные результаты оказались очень оптимистичными:

– *программа месяцами работала без перезагрузки, а GAP приходилось перезапускать через 2–3 часа;*

– *память загружалась в пределах 300 Mb, а не 1500 Mb, как в GAP;*

– *скорость вычислений увеличилась примерно в 100 раз, и за 2 года удалось произвести вычисления до 4 трлн в 100 раз дальше, чем в GAP.*

[1] Проект реализуется победителем Конкурса на предоставление грантов преподавателям магистратуры благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина.

ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. (Уточнение формулы Мертенса**)**.

Имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(\mathrm{i})=\frac{3}{\pi^2}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)+\mathrm{n}\cdot s(\mathrm{n}), \qquad (2)$$

где для всех $n<4*10^{12}$ *выполняется неравенство* $|s(\mathrm{n})|<0,45$.

Эта формула очень естественна. Из теоремы (1) следует, что среднее значение функции Эйлера равно $\varphi(\mathrm{n})=\frac{6n}{\pi^2}$. Просуммировав средние значения функции Эйлера от 1 до n, получим арифметическую прогрессию (2):

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ldots+\varphi(\mathrm{n})=\frac{6\cdot 1}{\pi^2}+\frac{6\cdot 2}{\pi^2}+\ldots+\frac{6\cdot \mathrm{n}}{\pi^2}=\frac{6}{\pi^2}(1+2+\ldots+\mathrm{n})=\frac{3}{\pi^2}\mathrm{n}(\mathrm{n}+1).$$

Дальнейшее уточнение формулы Мертенса невозможно в силу знакопеременности остатка s(n).

Более того, формула (2) дает не просто поведение суммы функций Эйлера на бесконечности, как формула (1), но и ограничивает значения этой суммы в жестких пределах.

Теорема 2. *Свойства функции s(n) на интервале до 4 трлн.*

1. Функция s(n) знакопеременная, средний период знакопостоянства равен примерно 1,4136 (близко к $\sqrt{2}\approx 1.4142$*).*

2. Среднее положительное значение функции s(n) примерно равно 0.1189, отрицательное – 0.1189.

3. Разброс значений функции s(n) таков: до 4 трлн в интервал (-0,44; 0,44) не попало только 16 значений.

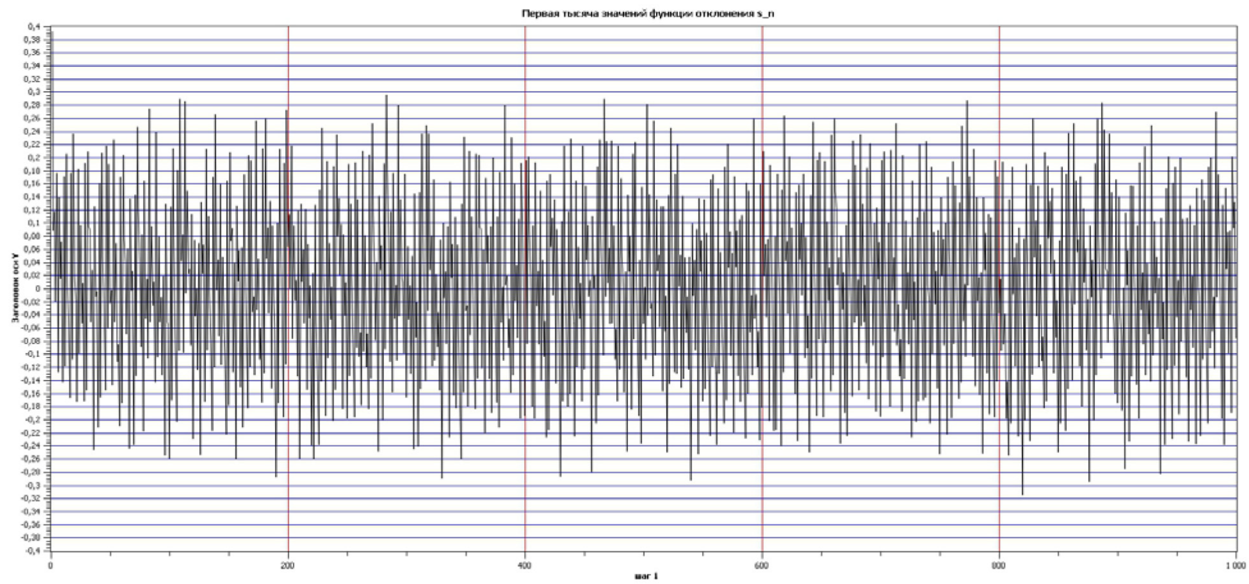

Рис. 1. Первая тысяча значений функции s(n).
По горизонтали шаг 1, по вертикали интервал (-0,4;0,4)

Теорема 3. (Вероятностные свойства функции s(n)).

1. Матожидание значения функции s(n) для $n < 4*10^{12}$ *по модулю не превосходит* 10^{-9}*;*

2. Дисперсия с точностью до 6 знака равна 0,01986, поэтому

$$\sigma = 0{,}1409; 3\sigma = 0{,}423 .$$

Правило трех сигм выполняется с большим запасом, отклонение больше 3 сигма встречается реже, чем одно из 2 млрд, а не одно из 400 (0.28%), как у нормального распределения.

3. Плотность распределения вероятностей случайной величины с шагом 0.001 до 10 млрд $s(\mathrm{n})$ *приведена на рис. 1.*

Отметим, что в статье [2] шаг был 0.01 и вычисления были выполнены до 1 млрд.

Тут же приведен график нормального распределения для матожидания 0 и дисперсии 0,01986.

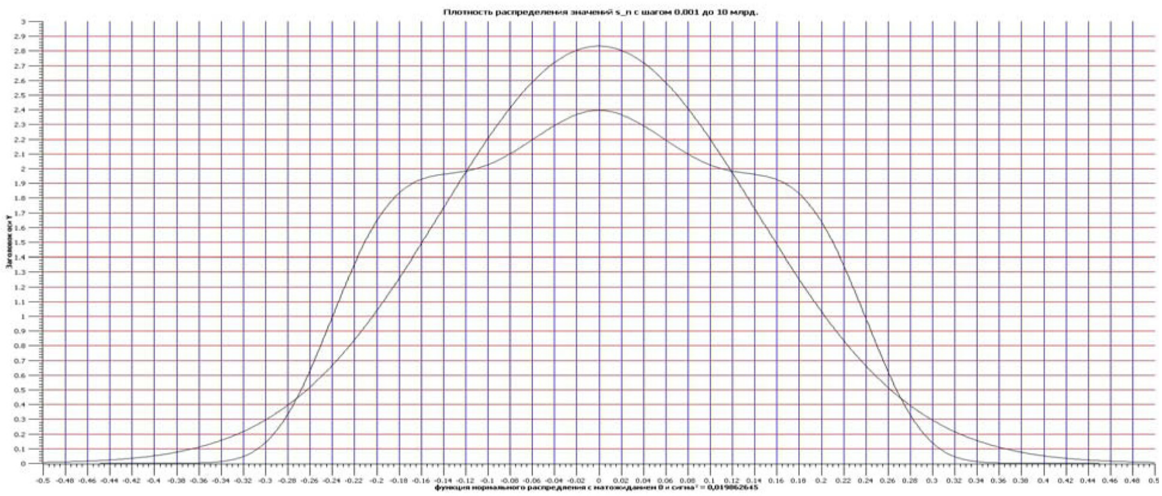

Рис. 2. Плотность распределения вероятностей и нормальное распределение до 10 млрд

4 Вычислена функция суммы $S(\mathrm{n}) = \sum_{i=1}^{n} s(\mathrm{i})$ *(рис. 3, и матожидание суммы* $S(\mathrm{n})$ *(рис. 4).*

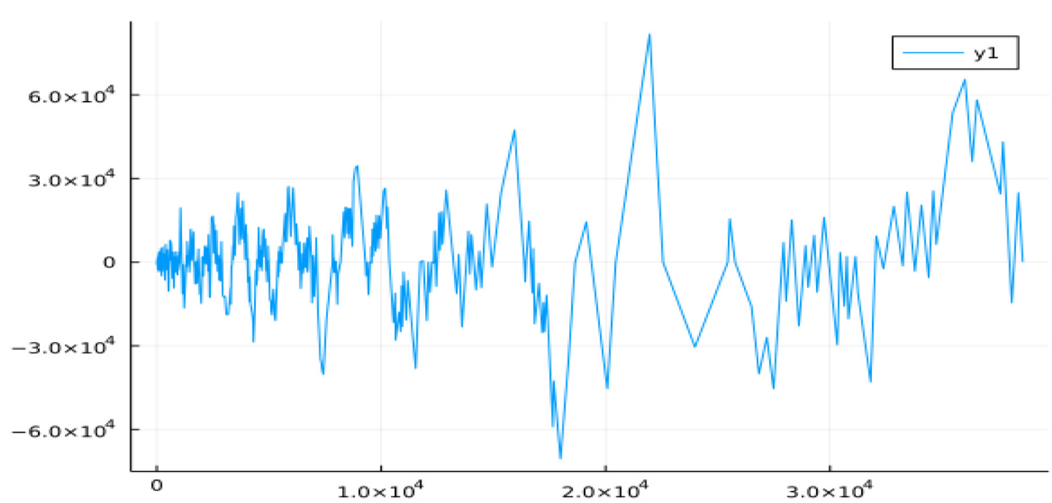

Рис. 3. Суммы S(n) на интервале до 4 трлн, шаг 100 млн

Поведение функции суммы S(n) на рис. 3 при всей ее хаотичности имеет важную качественную характеристику – она схожа с синусоидой, у которой растет не только амплитуда, но и длина периода.

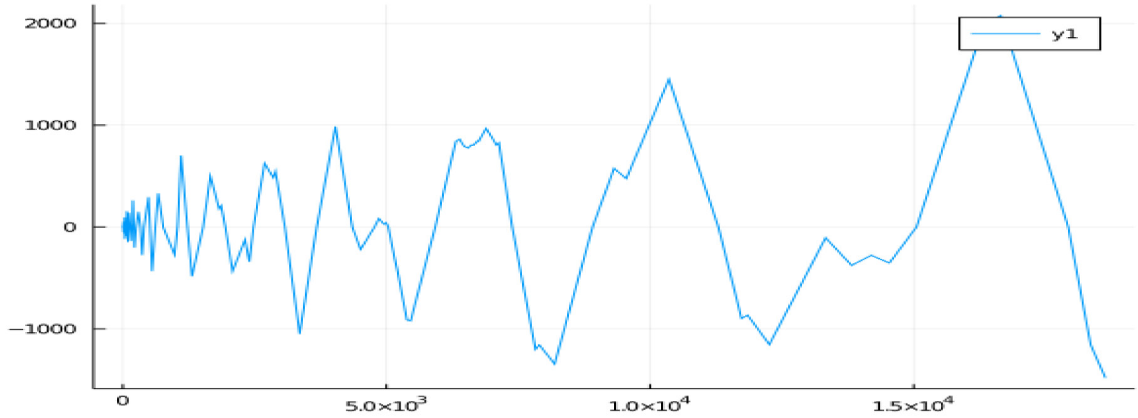

Рис. 4. Матожидание суммы S(n) на интервале до 1900 млрд. Шаг 100 млн

Матожидание суммы ведет себя так же, как и сумма, но амплитуда на два порядка, т. е. в 100 раз меньше.

Графики 3 и 4 нарисованы в самой Julia – пакет Plots, а график рис. 1, 2 нарисован программой SciDAVis (http://scidavis.sourceforge.net/).

Приведем фрагмент программы, который вычисляет значение разности s(n). Для этого подключаем пакет Nemo.

```
using Nemo
function ros(m,n)
p=BigFloat("0.30396355092701331433163838962918291671307632 4
01673964653682709568251936288 67062")
  S = BigInt(0);     t:= BigFloat(0.0);    T = 0.0
for i::BigInt = m:n
     S += euler_phi(ZZ(i));     t = BigInt(S)/i-p*(i+1)
        T += t
end
end
ros(BigInt(1),BigInt(10)^14)
```

На выходе мы получили число S – сумму значений функции Эйлера – это натуральное число, оно вычисляется точно, без погрешностей! Поэтому в процессе вычислений погрешность не накапливается.

ВЫВОДЫ

Функция Эйлера жестко связана с разложением на простые множители, поэтому и вычислять ее трудно. Рисунок 1 говорит о том, что «локально простые числа распределены случайно». Это странно звучит, ведь простые числа «уже распределены», просто мы не знаем, как. Нет инструмента, как это формализовать, вот одно из предположений, как описать эту «случайность».

Геленджикская Гипотеза. *Пусть n – натуральное число, зафиксируем его. Пусть A – некоторое множество четных чисел из отрезка [0, 2n], содержащее 0, но не содержащее полной системы вычетов ни по одному нечетному простому модулю.*

Тогда существует бесконечно много простых чисел p, таких, что:

а) все числа $\{p+a \mid a \in A\}$ *являются простыми (слабая гипотеза);*

б) все остальные числа отрезка [p, p+2n] составные (сильная гипотеза).}

Эта гипотеза вдохновлена принципом – «все, что не запрещено, все разрешено». Гипотеза обобщает много предположений на тему распределения простых чисел.

Сильная гипотеза нетривиальна даже в случае, когда множество A одноэлементно. Если множество A = {0, 2}, то слабая гипотеза утверждает, что простых чисел близнецов бесконечно много.

Название гипотезы Геленджикская по городу, где она впервые была представлена на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 65-летию А.А. Махнева, г. Геленджик, 13–20 мая 2018 г. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=timm&paperid=1570&option_lang=rus.

О формуле Мертенса.

Гипотеза. (поведение функции s(n)).

Возможно, тенденция п. 3 теоремы 2 верна и на бесконечности. Тогда увеличение амплитуды на 0.01 происходит в 16 раз реже, чем предыдущее увеличение отклонения на такую же величину. Если за базу взять 0.43, то больше 0.44 будет 1 раз в 250 млрд, больше 0.45 – 1 раз на 4 трлн, больше 0.46, в среднем, 1 раз на 64 трлн. и т.д. Возрастание отклонения логарифмическое, но для реальных вычислений влияние увеличения амплитуды абсолютно ничтожно.

Библиографический список

1. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974. 178 с.
2. Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера: материалы II Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». Майкоп: Изд-во АГУ, 2017. С. 198–203. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=25510710.
3. Рожков А.В. Экспериментальная математика в КубГУ – первые результаты // Новые информационные технологии в образовании и науке: материалы XIV междунар. науч.-практ. конф. Екатеринбург, 1–5 марта 2021 г. // Екатеринбург: 2021. ФГАОУ ВО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т». С. 163–172. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=45825056