Сведения об авторах

Осипян Валерий Осипович, доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры анализа данных и искусственного интеллекта КубГУ, rrwo@mail.ru. Область научных интересов и сфера научной деятельности: специалист в области информационной безопасности автоматизированных систем обработки данных. Разработанные им рюкзачные криптосистемы занимают передовое место на мировом уровне.

Жук Арсений Сергеевич, старший преподаватель кафедры вычислительных технологий КубГУ, arseniyzhuck@mail.ru. Область научных интересов и сфера научной деятельности: специалист в области информационной безопасности автоматизированных систем обработки данных.

Литвинов Кирилл Игоревич, старший преподаватель кафедры вычислительных технологий КубГУ, lyrik-1994@yandex.ru. Область научных интересов и сфера научной деятельности: специалист в области информационной безопасности автоматизированных систем обработки данных.

Карпенко Юрий Александрович, старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии АГУ, nart27@gmail.com.

Область научных интересов и сфера научной деятельности: специалист в области информационной безопасности автоматизированных систем обработки данных.

УДК 004.43+517.927.21
ББК 32.973.2
Р 63

Язык программирования Julia и НЕУЛУЧШАЕМОЕ уточнение теоремы Мертенса о функции Эйлера

А. В. Рожков
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия

Аннотация. *Проведены обширные вычисления, занявшие более четырех лет, получено неулучшаемое уточнение теоремы Мертенса о среднем значении функции Эйлера.*

Calculations in the environment of Julia: specification of the theorem of Mertens of mean value of function of Euler

A.V. Rozhkov
Kuban State University, Krasnodar, Russia

Введение

Работа является продолжением и уточнением работы [2] на эту же тему.

В известной теореме Мертенса [1] о сумме значений функции Эйлера присутствует логарифм:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(i) = \frac{3}{\pi^2} n^2 + O(n \cdot \ln(n)). \tag{1}$$

Наше предположение, что его присутствие виртуально.
Введем среднее значение функции Эйлера $\overline{\varphi}(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(n)$
и перепишем формула Мертенса в удобной для нас форме:

$$\overline{\varphi}(n) = t \cdot (n+1) + \frac{O(n \cdot \ln(n))}{n}, t = \frac{3}{\pi^2}.$$

В работе [2] число t было задано до 15 знака после запятой. В данном исследовании значение t взято с точностью до 78 знака после запятой.

Это не главное отличие. 2 года вычисления производились в среде GAP http://www.gap-system.org/ на процессоре Core i5 4430, 3 ГГц и были получены результаты вычислений среднего значения функции Эйлера до 36 млрд.

В октябре 2018 г. был опубликован релиз 1.0.1 языка программирования Julia (https://julialang.org/) и мы перешли к вычислениям в этой программной среде. Компьютер, на котором производились вычисления остался тем же.

Полученные результаты оказались очень оптимистичными:

1. *Программа месяцами работала без перезагрузки, а GAP приходилось перезапускать через 2-3 часа,*

2. *Память загружалась в пределах 300 Mb, а не 1500 Mb, как в GAP,*

3. *Скорость вычислений увеличилась примерно в 100 раз и за 2 года удалось произвести вычисления до 3500 млрд. в 100 раз дальше, чем в GAP*

Полученные результаты

Теорема 1. (Уточнение формулы Мертенса).

Имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(i) = \frac{3}{\pi^2}n(n+1) + n \cdot s(n), \tag{2}$$

где для всех $n < 3,5{*}10^{12}$ *и знакопеременной функции s(n) выполняется неравенство* $|s(n)| < 0,45$.

Дальнейшее уточнение формулы Мертенса невозможно в силу знакопеременности функции остатка s(n). Более того формула (2) дает не просто поведение суммы функций Эйлера на бесконечности, как формула (1), но и ограничивает значения этой суммы в жестких пределах.

Теорема 2. *Свойства функции s(n) на интервале до 3,5 трлн.*

1. Функция s(n) знакопеременная, средний период знакопостоянства равен примерно 1,4136 (близко к $\sqrt{2}$*).*

2. Среднее положительное значение функции s(n) примерно равно 0.1189, отрицательное - 0.1189.

3. Разброс значений функции s(n) таков: до 3,5 трлн. в интервал (-0,44; 0,44) не попало только 13 значений.

Теорема 3. (Вероятностные свойства функции s(n)).

1. Матожидание значения функции s(n) для $n < 3,5 * 10^{12}$ *по модулю не превосходит* 10^{-9}*;*

2. Дисперсия с точностью до 6 знака равна 0,01986, поэтому

$$\sigma = 0,1409; 3\sigma = 0,423.$$

За 3 сигма попадает не более, чем одно двухмиллиардное значение функции s(n), а не 0.28%, как для нормального распределения.

3. Плотность распределения вероятностей случайной величины $s(n)$ приведена на Рис. 1, с шагом 0.001 до 10 млрд.

Отметим, что в статье [2] шаг был 0.01 и вычисления были выполнены до 1 млрд.

Тут же приведен график нормального распределения для матожидания 0 и дисперсии 0,01986.

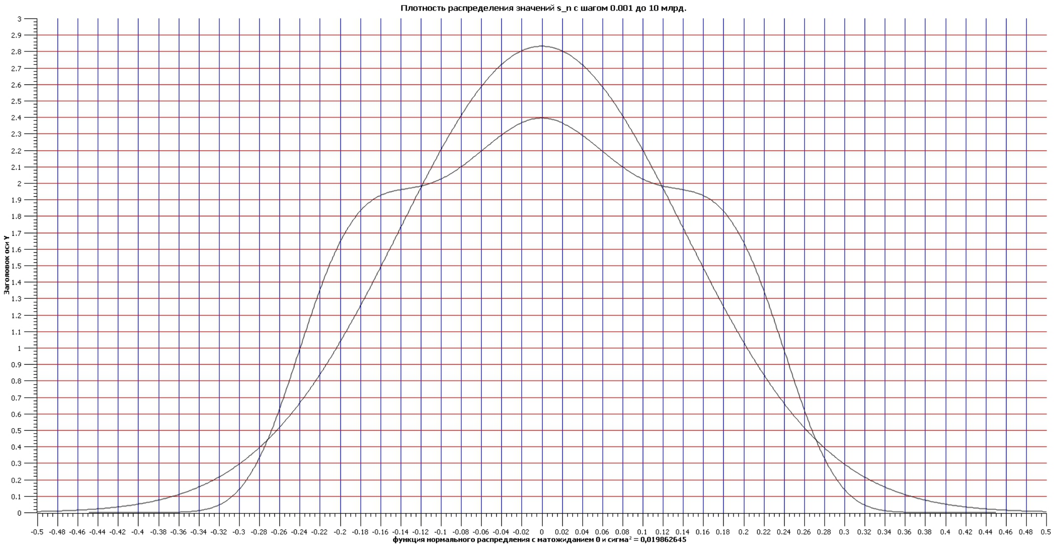


Рис. 1. Плотность распределения вероятностей и нормальное распределение до 10 млрд.

4. Вычислена функция суммы $S(n) = \sum_{i=1}^{n} s(i)$ Рис. 2, и Матожидание суммы $S(n)$ Рис. 3.

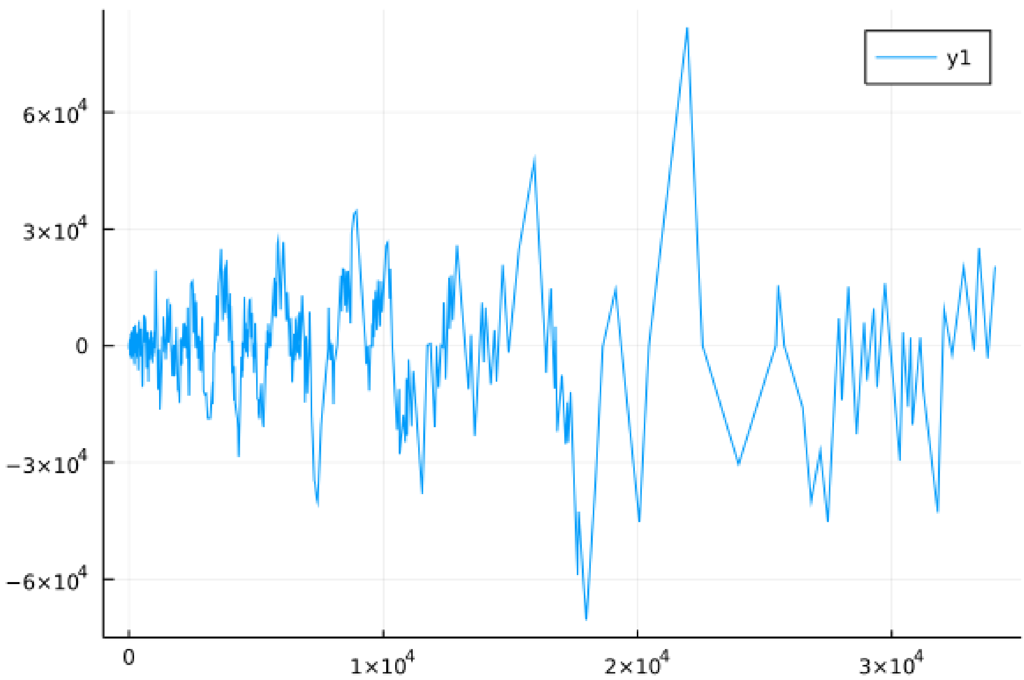


Рис. 2. Суммы S(n) на интервале до 3500 млрд.

Поведение функции суммы S(n) на Рис. 2 при всей ее хаотичности, имеет важную качественную характеристику – она схожа с синусоидой, у которой растет не только амплитуда, но и длина периода.

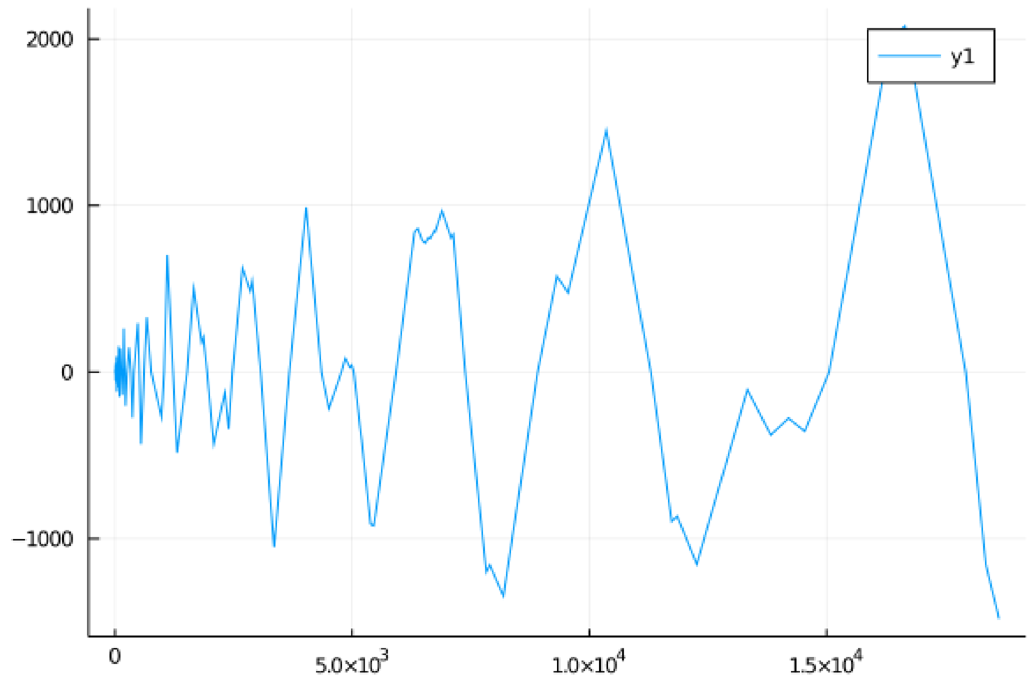


Рис. 3. Матожидание суммы S(n) на интервале до 1900 млрд. Шаг 100 млн.

Матожидание суммы ведет себя так же, как и сумма, но амплитуда на два порядка, в 100 раз меньше.

Графики 2 и 3 нарисованы в самой Julia - пакет Plots, а график Рис. 1 нарисован программой SciDAVis (http://scidavis.sourceforge.net/).

Приведем фрагмент программы, который вычисляет значение разности s(n). Для этого подключаем пакет Nemo.

```
using Nemo
function ros(m,n)
p=BigFloat("0.3039635509270133143316383896291829167130763240167396465368270956825193628867062")
S = BigInt(0); t:= BigFloat(0.0); T = 0.0
for i::BigInt = m:n
S += euler_phi(ZZ(i)); t = BigInt(S)/i-p*(i+1)
if t> 0.4 ||t < -0.4
println("i= i,> "t= t)
end
T += t
end
end

ros(BigInt(1),BigInt(10)^14)
```

На выходе мы получили число S – сумму значений функции Эйлера – это - натуральное число, а оно вычисляется точно, без погрешностей! Поэтому в процессе вычислений погрешность не накапливается.

Выводы

Функция Эйлера жестко связана с разложением на простые множители, поэтому и вычислять ее трудно. Рис. 1 говорит о том, что “локально простые числа распределены случайно”. Это странно звучит, ведь простые числа “уже распределены” просто мы незнаем как. Пока, нет инструмента, как это формализовать, вот одно из предложений на эту тему.

Геленджикская Гипотеза. *Пусть n - натуральное число, зафиксируем его. Пусть A — множество четных чисел из отрезка $[0, 2n]$, не содержащее полной системы вычетов ни по одному нечетному простому модулю (достаточно меньшему $2n$).*

Тогда существует бесконечно много простых чисел p, таких, что:

а) все числа $\{p + a | a \in A\}$ являются простыми (слабая гипотеза);

б) кроме того все остальные числа отрезка [p, p+2n] составные (сильная гипотеза).}

Гипотеза нетривиальна даже в случае, когда множество A одноэлементно.

Гипотеза впервые представлена на XII школе-конференции по теории групп, посвященной 65-летию А.А. Махнева г. Геленджик, 13-20 мая 2018 г.

http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=timm&paperid=1570&option_lang=rus.

О формуле Мертенса.

Гипотеза. (Поведение функции s(n)).

Возможно, тенденция п. 3 теоремы 2 верна и на бесконечности. Тогда увеличение амплитуды на 0.01 происходит в 15 раз реже, чем предыдущее увеличение отклонения. Если за базу взять 0.43, то больше 0.44 будет 1 раз в 250 млрд., больше 0.45 - 1 раз на 4 трлн. и т.д. Возрастание отклонения логарифмическое, но для реальных вычислений это возрастание абсолютно не важно.

Поддержано грантом благотворительного фонда Владимира Потанина

Литература

[1] Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. – М.: Мир, 1974. - 178 с.

[2] Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера / Материалы II Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». Майкоп: Изд-во АГУ, 2017. С. 198 – 203.

Сведения об авторах

Рожков Александр Викторович, д.ф.-м.н., профессор, профессор Кубанского государственного университета, great.ros.marine2@gmail.com, алгебра, криптография, защита информации, системы компьютерной алгебры, группы с условиями конечности.

УДК 004.43+510.5
ББК 22.18
Р 63

Вычисления в Julia: проблема Коллатца

А. В. Рожков
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия
М. В. Рожкова
Краснодарский колледж управления, техники и технологий, Краснодар, Россия

Аннотация. *Предложены новые подходы, выдвинуты гипотезы и проведены обширные вычисления по проблеме Коллатца*

Experimental number theory: Kollatts's problem

A. V. Rozhkov
Kuban State University, Krasnodar, Russia
M. V. Rozhkova
Krasnodar college of management, equipment and technologies, Krasnodar, Russia

Введение

Проблема Коллатца или проблема 3+1, сформулированная в 1932 г. состоит в том: Берём любое натуральное число n. Если оно чётное, то делим его на 2, а если нечётное, то умножаем на 3 и прибавляем 1 (получаем 3n + 1). Над полученным числом выполняем те же самые действия, и так далее.

Гипотеза Коллатца заключается в том, что какое бы начальное число n мы ни взяли, рано или поздно мы получим единицу.

Проблемой Коллатца занимается много энтузиастов
http://boinc.thesonntags.com/collatz/.

Мы сразу ограничимся нечетными числами.

Определение. *Преобразованием Коллатца для нечетного числа "a" назовем переход от нечетного числа "a" к нечетному числу "b", которое получается из четного числа "3a+1" после его деления на максимально возможную степень числа 2.*

Например, "27 -> 41", а "5->1".

Определение. Цепочка Коллатца – *это последовательность преобразований Коллатца, приводящих к 1.*

Например, экстремальная цепочка длины 38

"27->41->31->71->161->121-> 91->137->103->155->233->175->263->395->593-> 445->167->251->377->283->425->319->479->719->1079->1619->2429-> 911->1367-> 2051->3077->577-> 433->61->23->35->53->5->1"

Отметим два почти очевидных факта.

Поскольку случайно выбранное четное число делится в среднем на 4, то длина цепочки Коллатца числа "a" должна, в среднем, равняться $\log_{4/3} a$.

В силу перехода "a->3a+1" начиная со второго преобразования Коллатца в цепочках Коллатца не могут встречаться нечетные числа, кратные 3. Значит, изучая конечность цепочек Коллатца можно отбросить нечетные числа кратные 3.

Длинные цепочки и цепи Маркова

Нетрудно заметить, что длина цепочки Коллатца числа $a = 2^n - 1$ не меньше n. Были проведены вычисления до n=100 000 и оказалось, что матожидание длины цепочки Коллатца для числа $a = 2^n - 1$ равно примерно $2 * \log_{4/3} a$.

Первый случай. *Поскольку преобразование Коллатца нас отправляет внутрь множества нечетных чисел, не кратных 3, то у нас есть только два вида нечетных чисел, с которыми нам нужно работать - это 6k+1 и 6k+5.*

Лемма. *Пусть у нас есть два состояния системы - это натуральные числа вида 6k+1 и 6k+5, тогда матрица переходов марковского процесса имеет вид* $\frac{1}{2^2-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *и это сразу матрица предельных переходов.*

Т.о., числа вида 6k+5 в цепочках Коллатца встречаются в два раза чаще, чем числа вида 6k+1.

Второй случай. *Теперь рассмотрим числа нечетные числа по модулю 18. В этом случае множество нечетных чисел, не кратных 3, будет разбито на 6 подмножеств 18k+1, 18k+5, 18k+7, 18k+11, 18k+13, 18k+17,*

Лемма. Пусть у нас есть 6 состояний системы - это числа вида 18k+1, 18k+5, 18k+7, 18k+11, 18k+13, 18k+17, тогда матрица переходов марковского процесса имеет вид

$$\frac{1}{2^6-1}\begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 & 32 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 8 & 16 & 32 \\ 16 & 8 & 4 & 32 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 8 & 16 & 32 \\ 16 & 8 & 4 & 32 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Квадрат этой матрицы является матрицей предельных переходов все ее строки одинаковы и равны строке (8, 4, 2, 16, 11, 22).

Т. о., в цепочках Коллатца числа вида 18k+17 встречаются в 11 раз чаще, чем числа вида 18k+7.

Третий случай. Если мы зафиксировали модуль 54, то у нас получится 18 состояний и возникает матрица вероятностей размера 18 на 18. Перед ней нормирующий коэффициент $1/(2^{18} - 1) = 1/262143$. Кроме того, 3-я степень этой матрицы становится стационарной – все ее строки одинаковы, и вот ее первая строка

(9632, 8632, 2408, 12784, 23285, 34492, 6392, 3196, 1598, 19264, 5240, 10480, 17264, 4816, 4316, 34528, 17246, 46570)

Точнее самая большая вероятность 46570, а самая маленькая 1596 – отношение этих величин примерно 29.

Полученные результаты

Так выглядит плотность распределения длин цепочек Коллатца.

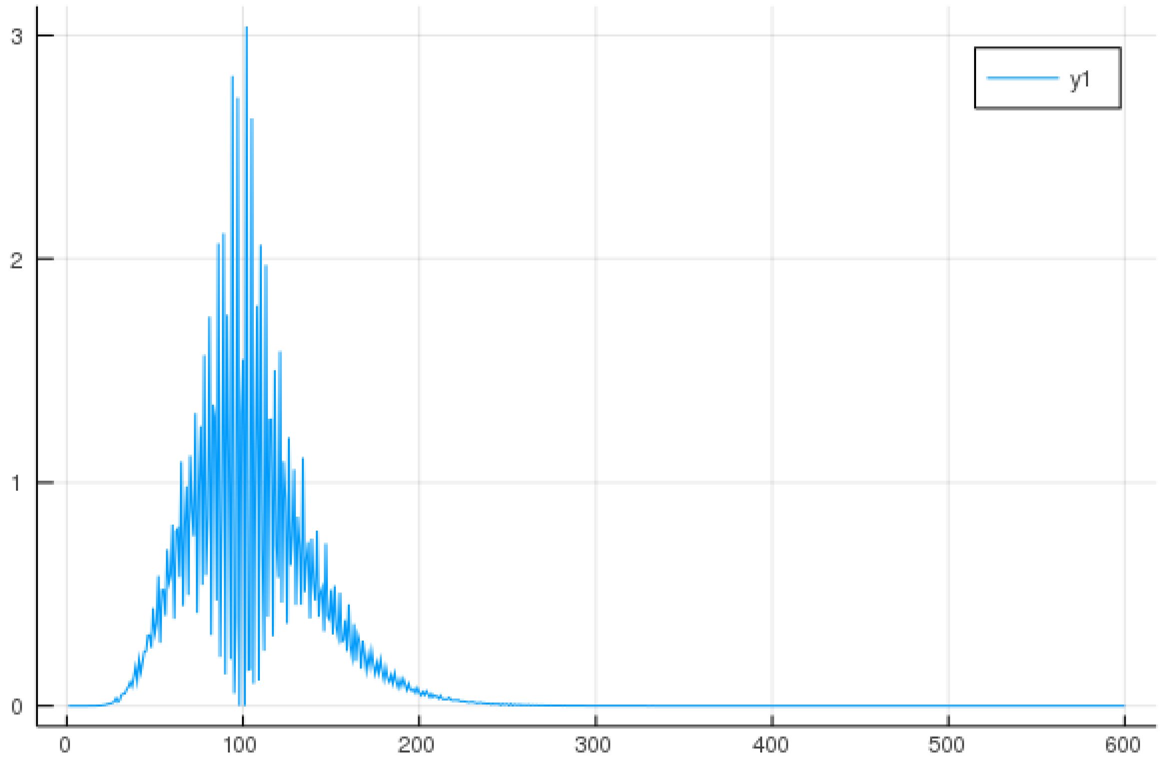
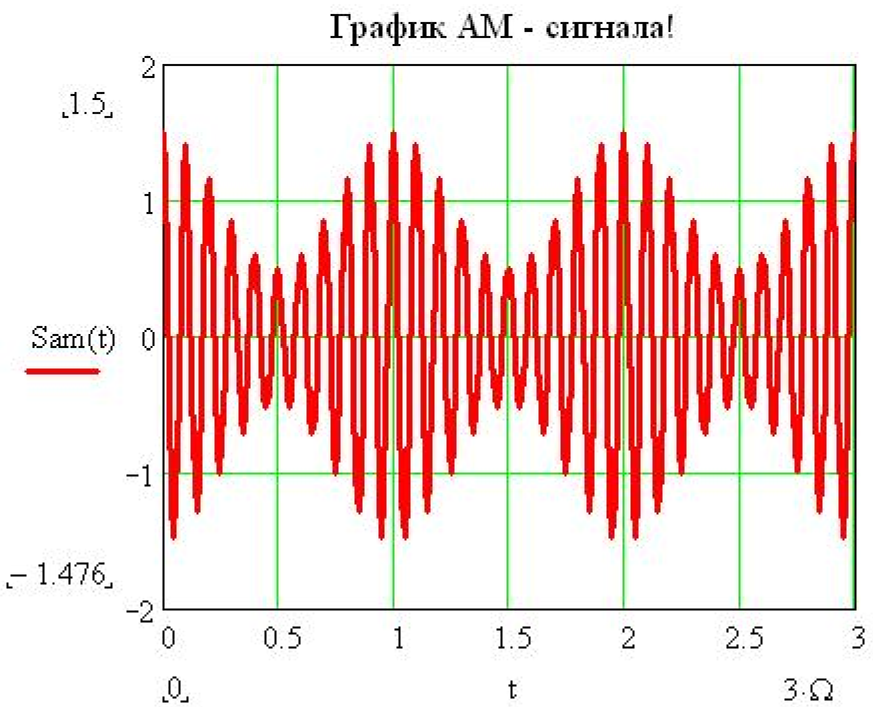


Рис. 1. Нормированная по $\log_{4/3} n$ длина цепочек Коллатца до 30 трлн., шаг 20 млрд.

Напоминает график амплитудной модуляции из радиотехники.

https://studopedia.info/10-11574.html



Длина цепочки Коллатца k(n) для числа n удовлетворяет неравенству

Теорема 2. *Для* $10^9 < n < 3 * 10^{13}$ *выполняется неравенство*

$$|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} k(n) - \log_{4/3} n + 2.1| < 0.01$$

Таким образом, средняя длина цепочки Коллатца числа “a” на 2.1 меньше, чем логарифм $\log_{4/3} a$.

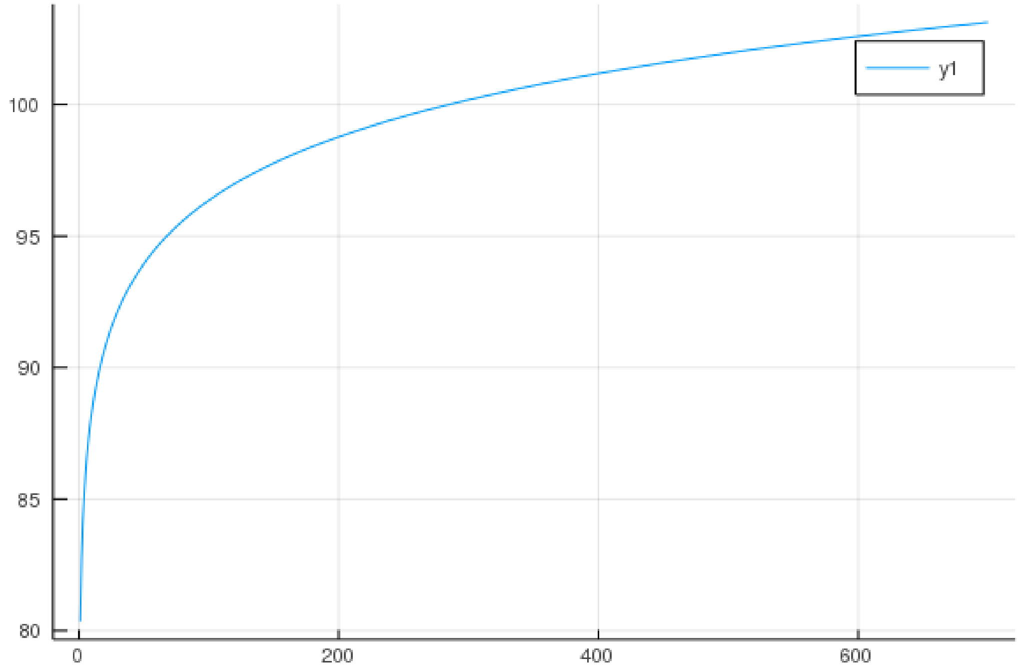


Рис. 2. График изменения средней длины, шаг 20 млрд.

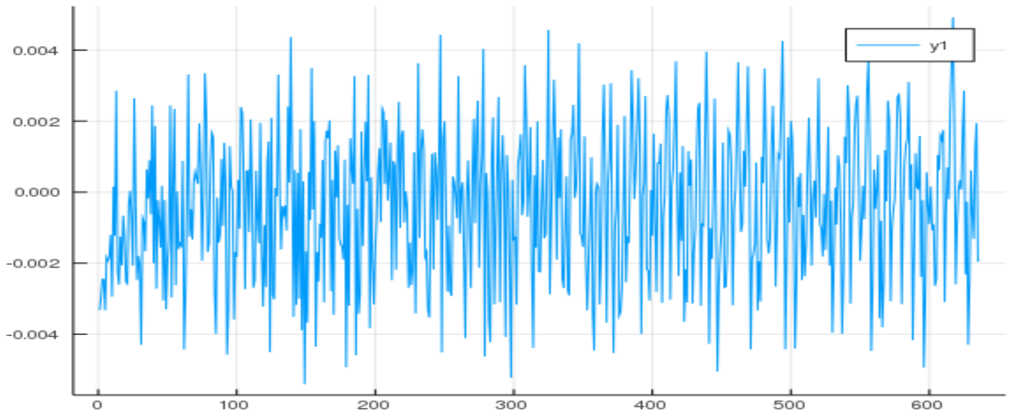


Рис. 3. График разности средней длины и $\log_{4/3} n$, шаг 20 млрд.

Теорема 3. *До 20 трлн. максимальная длина цепочки Коллатца удовлетворяет неравенству*

$k(a) < 6 * \log_{4/3} a < 21 * \ln(a)$

В настоящее время гипотеза проверена до $2 \cdot 10^{18}$. Это значит, что максимальная длина цепочки Коллатца на этом интервале меньше 900.

Проект реализуется победителем Конкурса на предоставление грантов преподавателям магистратуры благотворительной программы «Стипендиальная программа Владимира Потанина» Благотворительного фонда Владимира Потанина (первый автор).

Литература

[1] Guy R. Unsolved Problems in Number Theory, 3-edt. PB. Springer. 2004.

[2] J. C. Lagarias The ultimate challenge. The 3x+1 problem. AMS. 2010.

[3] J. C. Lagarias. The 3x + 1 Problem: An Annotated Bibliography (1963–1999) (Sorted by Author) https://arxiv.org/abs/math/0309224v13

[4] J. C. Lagarias. The 3x + 1 Problem: An Annotated Bibliography, II (2000-2009) https://arxiv.org/abs/math/0608208v6

[5] Рожков А.В., Рожкова М.В. Экспериментальная теория чисел: среднее значение функции Эйлера / Материалы II Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». Майкоп: Изд-во АГУ, 2017. С. 198 – 203.

Сведения об авторах

Рожков Александр Викторович, д.ф.-м.н., профессор, профессор Кубанского государственного университета, great.ros.marine2@gmail.com, алгебра, криптография, защита информации, системы компьютерной алгебры, группы с условиями конечности.

Рожкова Марина Валериевна преподаватель математики 1 категории, Краснодарский колледж управления, техники и технологий, seamise_cat@mail.ru, математика, информатика, системы компьютерной алгебры.