А. В. Рожков, О подгруппах бесконечных конечно порожденных p-групп, *Матем. сб.*, 1986, том 129(171), номер 3, 422–433

УДК 512.5

О подгруппах бесконечных конечно порожденных p-групп

Рожков А. В.

В 1972 году С. В. Алёшин [1] указал семейство конечно порожденных бесконечных p-групп, возникающих как группы автоматных преобразований, а в 1980 году Р. И. Григорчук [2] нашел аналогичное семейство среди групп преобразований отрезка, сохраняющих меру. Позже Ю. И. Мерзляков [3] показал, что оба этих типа групп тесно связаны друг с другом и составляют по существу одно семейство — группы Григорчука являются секциями групп Алёшина, а те в свою очередь легко могут быть собраны из нескольких экземпляров своей секции Григорчука (см. также [4, § 23]). Отдавая должное более ранней работе, все эти группы называют обычно группами Алёшина или группами типа Алёшина, что же касается их конкретной реализации, то в доказательствах часто оказывается удобной более поздняя реализация Григорчука — преобразованиями отрезка, неопределенными, возможно, на некотором счетном множестве.

В настоящей работе изучаются подгруппы групп Алёшина. Дается полное описание абелевых подгрупп — это оказались всевозможные прямые суммы не более чем счетного числа циклических p-групп и только они (§ 3). При $p>2$ описано строение подгрупп, действующих нетривиально только на кортежах с заданным начальным отрезком (§ 2). Доказывается, что централизатор любого элемента группы Алёшина бесконечен (§ 3). В § 4 построена бесконечная подгруппа группы Алёшина, порождаемая парой сопряженных элементов простого порядка, что дает отрицательный ответ на вопрос В. П. Шункова 6.58.а) из «Коуровской тетради» [5].

Результаты настоящей статьи частично были анонсированы в [6].

§ 1. Предварительные замечания

Пусть p — простое число, Σ — некоторое множество подалфавитов алфавита $\{1, 2, \ldots, p\}$ с тем свойством, что для любого набора натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_p$ найдется подалфавит σ из Σ такой, что $\sum\limits_{i\in\sigma} a_i\equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. Заметим, что Σ обязательно содержит полный алфавит $\{1, 2, \ldots, p\}$ и все одноэлементные подалфавиты. Пусть ω: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ — произвольная последовательность непустых подалфавитов, удовлетворяющая единственному условию: каждый подалфавит из Σ встречается в ω бесконечно много раз. (Оговоримся сразу, что все последовательности подалфавитов ω, рассматриваемые в этой работе, предполагаются удовлетворяющими указанному условию для некоторого Σ.)

Пусть, далее, Δ — отрезок прямой. Разобьем его на p равных частей, называемых p-ми долями, каждую из них снова на p равных частей, называемых p^2-ми долями и т. д. Полученные доли отрезка Δ занумеруем кортежами в алфавите $\{1, 2, \ldots, p\}$ по следующему правилу: p-е доли нумеруем слева направо (отрезок предполагаем горизонтальным) числами $1, 2, \ldots, p$, если p^n-я доля уже получила номер γ, то p^{n+1}-е доли, на которые она разбивается, получают слева направо номера $\gamma^1, \gamma^2, \ldots$ $\ldots, \gamma p$. Пусть Δ_γ обозначает долю отрезка Δ с номером γ.

Пусть Ц — циклическая подстановка $(1, 2, \ldots, p)$, Т — тождественная подстановка. Пусть c — преобразование отрезка Δ, состоящее в том, что его p-е доли подвергаются подстановке Ц (на концах долей c остается неопределенным). Определим еще для каждого $i=1, 2, \ldots, p$ преобразование $d_i = d_i^\omega$ следующим образом: на p^n-х долях $\Delta_{1\ldots12}$, $n=1, 2, \ldots$, преобразование d_i индуцирует преобразование $c_{1\ldots12}^{\sigma_n(i)}$, где $c_{1\ldots12}$ — преобразование, аналогичное преобразованию c, но действующее на доле $\Delta_{1\ldots12}$,

$$\sigma_n(i) = \begin{cases} 1 & \text{при } i \in \sigma_n, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

а на остальных долях d_i действует тривиально. Впредь мы будем опускать индекс γ в записи преобразования c_γ, так как всегда будет ясно, о какой доле Δ_γ идет речь.

Группа $H^\omega = \mathrm{гр}(c, d_1, \ldots, d_p)$ называется группой Григорчука. Очевидно, $c^p=1$, $d_i^p=1$, $d_id_j=d_jd_i$, $i, j=1, 2, \ldots, p$. Подчеркнем еще, что элементы $d_i = d_i^\omega$ на самом деле зависят от ω, а не только от i. Условимся также опускать индекс ω в записи порождающих d_i^ω, если ясно, какой группе H^ω они принадлежат.

Отметим, что группа H^ω финитно аппроксимируема. В самом деле, ясно, что преобразования $c, d_1, \ldots, d_p$ произвольную матрёшку

$$\Delta_{i_1} > \Delta_{i_1i_2} > \Delta_{i_1i_2i_3} > \ldots \tag{1}$$

долей отрезка Δ переводят снова в некоторую матрёшку. Это позволяет отождествить группу H^ω с некоторой группой преобразований множества $\mathcal{M}$ всех матрёшек вида (1). Так как отображение множества $\mathcal{M}$ на множество $C^\infty(p)$ всех счетных кортежей в алфавите $\{1, 2, \ldots, p\}$, сопоставляющее матрёшке (1) кортеж $i_1i_2i_3\ldots$, взаимно однозначно, то можно считать, что H^ω действует на $C^\infty(p)$. Группа H^ω, действующая на счетных кортежах, очевидным образом индуцирует конечную группу $\overline{H}_n^\omega$, действующую на их начальных отрезках длины n, т. е. на множестве $C^n(p)$ всех кортежей длины n в алфавите $\{1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, p\}$. Ясно, что семейство гомоморфизмов — сужений $H^\omega \to \overline{H}_n^\omega$, $n=$ $=1, 2, \ldots$, является аппроксимирующим, так что H^ω — финитно аппроксимируемая группа. Пусть H_n^ω — ядро указанного гомоморфизма $H^\omega \to$ $\to \overline{H}_n^\omega$, т. е. стабилизатор множества $C^n(p)$: $H_n^\omega = St_{H^\omega} C^n(p)$.

Пусть H — подгруппа группы H^ω; переход от H к группам $(H \cap H_1^\omega)|_{\Delta_i}$, $i=1, \ldots, p$, мы будем называть операцией p-проектирования.

Если на некотором отрезке некоторая группа индуцирует группу, изоморфную как группа преобразований группе G, то, допуская некоторую вольность речи, будем говорить, что на данном отрезке индуцируется группа G.

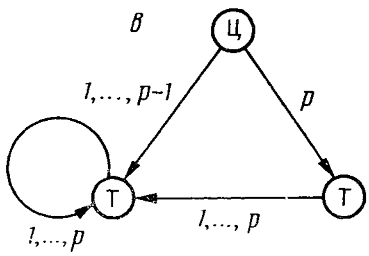
Пусть ω_n — это последовательность подалфавитов $\sigma_{n+1}, \sigma_{n+2}, \ldots$, в частности, $\omega=\omega_0$. Очевидно, что $H_1^\omega|_{\Delta_i} = H^{\omega_1}$, $i=1, \ldots, p$.

Укажем некоторые свойства подгруппы $D^\omega=\text{гр}(d_1^\omega, \ldots, d_p^\omega)$ группы H^ω. Легко проверить, что D^ω — элементарная абелева группа ранга p. Пусть $f=f^\omega=(d_1^\omega)^{\alpha_1}\ldots(d_p^\omega)^{\alpha_p}$ — произвольный элемент подгруппы D^ω. По определению,

$$\sigma_n(f)=\alpha_1\sigma_n(1)+\ldots+\alpha_p\sigma_n(p),$$

в частности, если $f=d_i$, то $\sigma_n(f)=\sigma_n(d_i)=\sigma_n(i)$. Все элементы подгруппы D^ω имеют сходное строение, а именно, элемент $f^\omega \in D^\omega$ индуцирует на p-х долях $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$ преобразования f^{ω_1}, $c^{\sigma_n(f^\omega)}$, 1, …, 1 соответственно, где $f^{\omega_1}=(d_1^{\omega_1})^{\alpha_1}\ldots(d_p^{\omega_1})^{\alpha_p}$. Далее, каково бы ни было n, подгруппа $D_n^\omega=\text{гр}(f\,|\,\sigma_n(f)\equiv 0 (\operatorname{mod} p))$ подгруппы D^ω имеет в D^ω индекс p, т. е. $D^\omega=D^\omega(n)\oplus\text{гр}(g^\omega)$, где g^ω — такой элемент подгруппы D^ω, что $\sigma_n(g^\omega)\not\equiv 0 \ (\operatorname{mod} p)$.

Опишем теперь соответствующую p-группу Алёшина G^ω, порождаемую автоматными преобразованиями a и b: $G^\omega=\text{гр}(a, b)$. Преобразование a множества кортежей в алфавите $\{1, 2, \ldots, p\}$ можно трактовать как преобразование некоторого отрезка Г, неопределенное на некотором его счетном подмножестве, а именно: на p^2-й доле Γ_{11} преобразование a действует как c, на доле Γ_{ip} — как d_i, $i=1, \ldots, p$, а на остальных p^2-х долях отрезка Г — как тождественное преобразование. Автомат b имеет вид



т. е. действует на кортежах в алфавите $\{1, 2, \ldots, p\}$ следующим образом: $i\eta\to(i+1)\eta$, $pi\eta\to 1(i+1)\eta$, $pp\eta\to 11\eta$, где $i=1, \ldots, p-1$, η — произвольный кортеж. Таким образом, b вызывает на кортежах ij вполне определенную подстановку β (цикл длины p^2) и $(ij\eta)b=(ij)^\beta\eta$ для произвольного η. Заметим, что

$$b^{-k}ab^k|_{\Gamma_{ij}} \simeq a|_{\Gamma_{(ij)}^{\beta^{-k}}}.$$

Легко видеть, что подгруппа $G_2^\omega=\text{гр}(b^{-k}ab^k\,|\,k=1, \ldots, p^2)$ имеет в G^ω индекс p^2 и индуцирует на каждой доле Γ_{ij} группу, изоморфную H^ω. Эта связь между H^ω и G^ω была установлена Ю. И. Мерзляковым [3], и, учитывая ее, мы можем в дальнейшем сосредоточить внимание на какой-нибудь одной из этих групп, скажем, H^ω. Указанная связь делает также очевидной финитную аппроксимируемость группы G^ω и бесконечность ее периода, если эти свойства уже установлены для группы H^ω.

Зафиксируем обозначения, наиболее часто встречающиеся в статье. Пусть $G_n^\omega=St_{G^\omega}C^n(p)$, $H_n^\omega=St_{H^\omega}C^n(p)$.

Для любого $k=1, \ldots, p$ символ D_k^ω обозначает подгруппу $\text{гр}(c, d_1^\omega, \ldots, d_{k-1}^\omega, d_{k+1}^\omega, \ldots, d_p^\omega)$ группы H^ω. Значение символов D^ω, $D^\omega(n)$ и $\sigma_n(f)$, где f — элемент подгруппы D^ω, определялось выше.

Если h — некоторый элемент группы H^ω, то $N(h)$ и $N_n(h)$ — это, по определению, нормальные замыкания элемента h в группе H^ω и ее подгруппе H_n^ω соответственно.

Если кортежи γ и γ' имеют одинаковые начальные отрезки длины n, то будем писать $\gamma\equiv\gamma'(\operatorname{mod} n)$. Если γ — конечный кортеж, то $|\gamma|$ обозначает его длину.

§ 2. О подгруппах конечного индекса

Лемма 1. *Для любого простого числа p, любой последовательности подалфавитов ω и любого $k=1, \ldots, p$ подгруппа D_k^ω группы H^ω конечна.*

Доказательство. Применим к подгруппе D_k^ω операцию p-проектирования. На всех p-х долях отрезка Γ получим подгруппу $\text{гр}(c^{\sigma_1(i)}, d_i | i=1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, p)$ группы H^{ω_1}. Если $\sigma_1=\{k\}$, то это конечная абелева подгруппа D^{ω_1}. В противном случае она совпадает с подгруппой $D_k^{\omega_1}$. Продолжая процесс p-проектирования, на некотором конечном шаге доберемся до подалфавита $\{k\}$. Таким образом, группа D_k^ω содержится в группе, получаемой из конечной абелевой группы конечным числом возведений в p-ю прямую степень и расширений при помощи $\mathbf{Z}_p$, а потому конечна. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого простого числа p, любой последовательности подалфавитов ω коммутанты групп H^ω и G^ω имеют индексы p^{p+1} и p^3 соответственно.*

Доказательство. Случай группы H^ω. Пусть f — произвольный нетривиальный элемент подгруппы D^ω, d_k — порождающий, входящий в его разложение, тогда $\{c, f, d_i | i=1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, p\}$ — порождающее множество группы H^ω. В силу леммы 1 найдется такое число $n=n(\omega)$, что индекс подгруппы H_n^ω в группе H^ω будет больше порядка подгруппы D_k^ω. Последнее означает, что элемент fH_n^ω нельзя выбросить из порождающего множества

$$\{cH_n^\omega,\ fH_n^\omega, d_iH_n^\omega \mid i=1, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, p\}$$

фактор-группы $\overline{H}_n^\omega=H^\omega/H_n^\omega$, т. е. он не принадлежит подгруппе Фраттини этой фактор-группы. Группа $\overline{H}_n^\omega$ — конечная p-группа, поэтому все ее максимальные подгруппы имеют индекс p, а их пересечение — подгруппа Фраттини — содержит коммутант. При гомоморфизме коммутант отображается на коммутант, поэтому элемент f не принадлежит коммутанту группы H^ω, а в силу произвольности элемента f и подгруппа D^ω порядка p^p пересекается с коммутантом по единице. Далее, и коммутант группы H^ω и подгруппа D^ω принадлежат подгруппе H_1^ω, которая, однако, не содержит элемента c. Таким образом, индекс коммутанта группы H^ω равен p^{p+1}.

Случай группы G^ω разбирается по той же схеме, причем можно ограничиться рассмотрением фактор-группы по подгруппе G_3^ω. Лемма доказана.

Следствие 1. *Минимальное число элементов, порождающих группу H^ω, равно $p+1$.*

Доказательство. Так как фактор-группы H^ω по коммутанту порождается $p+1$ элементами, то число порождающих элементов группы H^ω не может быть меньше $p+1$.

Следствие 2. *Коммутант группы H^ω совпадает с нормальным замыканием подгруппы* $\text{гр}([c, d_i] | i=1, \ldots, p)$ *в группе H^ω.*

Доказательство. Имея в виду, что группа H^{ω} — это фактор-группа свободной группы степени свободы $p+1$, в качестве шрайеровой системы представителей смежных классов группы H^{ω} по коммутанту можно вновь взять множество слов $c^{\alpha}f$, $f\in D^{\omega}$, $\alpha=1, \ldots, p$. Тогда по теореме Нильсена — Шрайера (см. [4, теорема 14.3.5]) коммутант порождается произведениями $c^{\alpha}fc\cdot f^{-1}c^{-\alpha-1}=[c^{-\alpha}, f^{-1}][f^{-1}, c^{-\alpha-1}]$, а значит и коммутаторами $[c^{\alpha}, f]$. Осталось воспользоваться коммутаторными тождествами $[x, y]=[y, x]^{-1}$, $[x, yz]=[x, z][x, y]^{z}$. Следствие доказано.

Лемма 3. *Период группы H^{ω} (а значит и группы G^{ω}) бесконечен для любого простого числа p и любой последовательности подалфавитов ω.*

Доказательство. Для доказательства достаточно убедиться, что хотя бы на некоторой p^n-й доле Δ_{γ} имеет место индуцирование

$$((H^{\omega})^{p}\cap St_{H^{\omega}}(\gamma))|_{\Delta_{\gamma}}=H^{\omega^{n}}, \tag{2}$$

где $(H^{\omega})^{p}=\text{гр}(h^{p}\,|\,h\in H^{\omega})$ — p-я степень группы H^{ω}. Докажем формулу (2). Для любого неединичного элемента f^{ω} подгруппы D^{ω} и любого $i=1, \ldots, p$ имеет место индуцирование

$$(f^{\omega}c)^{p}|_{\Delta_i}=f^{\omega}cf^{\omega}c^{-1}\ \ldots\ c^{p-1}f^{\omega}c|_{\Delta_i}=f^{\omega_1}c^{\sigma_1(f^{\omega})}\ \text{или}\ c^{\sigma_1(f^{\omega})}f^{\omega_1}.$$

Так как $H_1^{\omega}|_{\Delta_i}=H^{\omega_1}$ и подгруппа $(H^{\omega})^{p}\cap H_1^{\omega}=(H^{\omega})^{p}$ нормальна в H_1^{ω}, то на каждой p-й доле Δ_i подгруппа $(H^{\omega})^{p}$ индуцирует группу, содержащую подгруппу

$$H=\text{гр}(N(g^{\omega_1}c),\ N(f^{\omega_1})\,|\,D^{\omega}=D^{\omega}(1)\oplus\text{гр}(g^{\omega}),\ f^{\omega}\in D^{\omega}(1)).$$

Понятно, что $H=N(g^{\omega_1}c)\,\text{гр}(N(f^{\omega_1})\,|\,f^{\omega}\in D^{\omega}(1))$. Пусть $D^{\omega}(1)=D^{\omega}(2)=\ldots$ $\ldots=D^{\omega}(n-1)\neq D^{\omega}(n)$. Применив к подгруппе

$$T^{\omega_1}=\text{гр}(N(c^{-i}f^{\omega_1}c^{i})\,|\,f^{\omega}\in D^{\omega}(1),\ i=1, \ldots, p)=\text{гр}(N(f^{\omega_1})\,|\,f^{\omega}\in D^{\omega}(1))$$

группы H^{ω_1} операцию p-проектирования, на каждой p^2-й доле Δ_{ij} получим группу $T^{\omega_2}=\text{гр}(N(f^{\omega_2})\,|\,f^{\omega}\in D^{\omega}(1))$. Применяя операцию p-проектирования к группе T^{ω_2}, получим на всех p^3-х долях группу T^{ω_3} и т. д. Наконец, операция p-проектирования, примененная к группе $T^{\omega_{n-1}}$, даст на всех p^n-х долях Δ_{γ} группу

$$\text{гр}(N(c),\ N(f^{\omega_n})\,|\,f^{\omega}\in D^{\omega}(1)). \tag{3}$$

Далее, подгруппа $N((g^{\omega_1}c)^{p})$ группы $N(g^{\omega_1}c)$ (соответственно группа $N(g^{\omega_1})$) индуцирует на каждой p^2-й доле Δ_{ij} группу $N(g^{\omega_2})$ при $\sigma_2(g^{\omega})=0$ и $N(g^{\omega_2}c^{\alpha})$ при $\sigma_2(g^{\omega})=\alpha$ (соответственно $N(g^{\omega_2})$ при $\sigma_2(g^{\omega})=0$ и $N(g^{\omega_2})N(c)$ при $\sigma_2(g^{\omega})\neq 0$). Таким образом, подгруппа $N(g^{\omega_1}c)\cap$ $\cap\ St_{H^{\omega_1}}(\gamma)$ индуцирует на любой p^n-й доле Δ_{γ} группу, содержащую хотя бы один из элементов g^{ω_n}, $g^{\omega_n}c^{\alpha}$. Так как любой из этих элементов вместе с группой (3) порождает всю группу H^{ω_n}, то $(H\cap St_{H^{\omega_1}}(\gamma))|_{\Delta_{\gamma}}=H^{\omega_n}$ и, значит, для указанного n и любой p^n-й доли Δ_{γ} верна формула (2). Лемма доказана.

Для всякого конечного кортежа γ в алфавите $\{1, 2, \ldots, p\}$ положим

$$\mathcal{M}_{\gamma}=\{\gamma'\in C^{\infty}(p)\,|\,\gamma'\not\equiv\gamma(\mathrm{mod}\,|\gamma|)\},\ \text{и}\ H^{\omega}(\gamma)=St_{H^{\omega}}(\mathcal{M}_{\gamma}),$$
$$G^{\omega}(\gamma)=St_{G^{\omega}}(\mathcal{M}_{\gamma}).$$

Говоря менее формально, $H^{\omega}(\gamma)$ и $G^{\omega}(\gamma)$ — это подгруппы таких преобразований множества $C^{\infty}(p)$ из H^{ω} и G^{ω} соответственно, которые действуют нетривиально только на кортежи с началом γ. Понятно, что $H^{\omega}(\gamma) \leqslant H^{\omega}_{|\gamma|}$, $G^{\omega}(\gamma) \leqslant G^{\omega}_{|\gamma|}$.

Теорема 1. *Пусть p — простое число, ω — последовательность подалфавитов алфавита $\{1, 2, \ldots, p\}$. Если γ, γ' — конечные кортежи в этом алфавите и $|\gamma| = |\gamma'|$, то подгруппы $H^{\omega}(\gamma)$ и $H^{\omega}(\gamma')$ сопряжены в группе H^{ω}. Подгруппа $H^{\omega}(\gamma)|_{\Delta_\gamma}$ имеет конечный индекс в $St_{H^{\omega}}(\gamma)|_{\Delta_\gamma} = H^{\omega|\gamma|}$. Если $p>2$, то*

$$H^{\omega}(\gamma)|_{\Delta_\gamma} = h_\gamma^{-1}(D^{\omega} \cap H^{\omega}_{|\gamma|})\, h_\gamma\, [H^{\omega}_{|\gamma|}, H^{\omega}_{|\gamma|}]|_{\Delta_\gamma}, \tag{4}$$

где h_γ — такой элемент группы H^{ω}, что $(1\ldots1)^{h_\gamma} = \gamma$. (Заметим, что $H^{\omega}(\gamma) \simeq H^{\omega}(\gamma)|_{\Delta_\gamma}$, $[H^{\omega}_{|\gamma|}, H^{\omega}_{|\gamma|}]|_{\Delta_\gamma} = [H^{\omega|\gamma|}, H^{\omega|\gamma|}]$, поэтому $H^{\omega}(\gamma)$ изоморфна как группа преобразований группе

$$(D^{\omega} \cap H^{\omega}_{|\gamma|})|_{\Delta_{1\ldots1}} [H^{\omega|\gamma|}, H^{\omega|\gamma|}].)$$

Доказательство. Для доказательства сопряженности подгрупп $H^{\omega}(\gamma)$ и $H^{\omega}(\gamma')$ при $|\gamma| = |\gamma'|$ достаточно убедиться, что для любого n группа H^{ω} транзитивно действует на множестве всех p^n-х долей отрезка Δ. Транзитивность устанавливается непосредственно. На p-х долях отрезка Δ транзитивно действует циклическая подгруппа гр(c) группы H^{ω}. Далее, подгруппа $H_1{}^{\omega}$ группы H^{ω} индуцирует на каждой p-й доле Δ_i, $i = 1, \ldots, p$, группу H^{ω_1}, которая по доказанному транзитивно действует на p-х долях соответствующей доли Δ_i и т. д.

Оставшиеся утверждения теоремы 1 (при фиксированной длине кортежа γ) достаточно доказывать для какой-нибудь одной подгруппы $H^{\omega}(\gamma)$, скажем для подгруппы $H^{\omega}(1\ldots1)$.

Покажем, что подгруппа $H^{\omega}(\gamma)|_{\Delta_\gamma}$ имеет конечный индекс в группе $H^{\omega}(\gamma)$. Пусть H — подгруппа конечного индекса группы H^{ω}, f — произвольный неединичный элемент подгруппы D^{ω}, d_k — канонический порождающий элемент группы H^{ω}, входящий в разложение элемента f. При наших предположениях получаем $H^{\omega} = N(f) D_k{}^{\omega}$. В силу леммы 1 подгруппа $N(f)$ имеет конечный индекс в группе H^{ω}. Пусть $f = f^{\omega}$ принадлежит подгруппе $D^{\omega}(1)$, тогда подгруппа $N_1(f^{\omega})$ лежит в подгруппе $H^{\omega}(1)$ группы H^{ω} и индуцирует на p-й доле Δ_1 подгруппу $N(f^{\omega_1})$, имеющую по доказанному конечный индекс в группе H^{ω_1}. Следовательно, и подгруппа $H \cap N_1(f^{\omega})$, имеющая конечный индекс в $N_1(f^{\omega})$, индуцирует на p-й доле Δ_1 некоторую подгруппу конечного индекса H^1 группы H^{ω_1}. Применяя прежние рассуждения к подгруппе H^1, находим подгруппу группы H, индуцирующую на p-й доле Δ_{11} подгруппу конечного индекса группы H^{ω_2}, а на остальных p^2-х долях Δ_{ij} — тривиальные группы и т. д.

Пусть $p>2$. Очевидно, что подгруппа

$$D^{\omega} \cap H^{\omega}_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} D^{\omega}(i)$$

содержится в подгруппе $H^{\omega}(1\ldots1)$. Теперь подробно разберем случай подгруппы $H^{\omega}(1)$. Пусть $j \in \sigma_1$, тогда коммутаторы $[c d_j{}^{\omega} c^{-1}, d_i{}^{\omega}]$, $i = 1, \ldots, p$, принадлежат подгруппе $H^{\omega}(1)$ (именно здесь существенно неравенство $p>2$) и индуцируют на доле Δ_1 коммутаторы $[c, d_i{}^{\omega_1}]$. Поскольку $H^{\omega}(1) \lhd H_1{}^{\omega}$ и $H_1{}^{\omega}|_{\Delta_1} = H^{\omega_1}$, то по следствию 2 из леммы 2 подгруппа $H^{\omega}(1)|_{\Delta_1}$ содержит коммутант группы H^{ω_1}. Осталось показать, что никакой нетривиальный элемент вида $c^d f^{\omega_1}$, где $f^{\omega} \notin D^{\omega}(1)$, не индуцируется подгруппой $H^{\omega}(1)$ на доле Δ_1. Пусть некоторое слово $V = V(x_{ij} | i, j = 1, \ldots, p)$, $x_{ij} = c^{-i} d_j c^i$, задает элемент подгруппы $H^{\omega}(1)$. Пусть s_{ij} — логарифм слова V по основанию x_{ij} (см. [4, с. 137]). На p-й доле Δ_1 элементы $x_{p\,i}$ и $x_{p-1\,i}$ индуцируют преобразования $d_i^{\omega_1}$ и $c^{\sigma_1(i)}$ соответственно, $i = 1, \ldots, p$; все остальные элементы x_{kl} индуцируют на доле Δ_1 тривиальные преобразования. Так как на долях Δ_2 и Δ_p слово V индуцирует элементы коммутанта (а именно единицы), то в силу леммы 2 имеют место равенства

$$\sum_{j=1}^{p} s_{pj}\sigma_1(j) \equiv 0 \pmod p, \quad s_{p-1\,j} \equiv 0 \pmod p, \quad i = 1, \ldots, p. \tag{5}$$

По модулю коммутанта группы H^{ω_1} слово V индуцирует на доле Δ_1 элемент $x^{\omega_1} = (d_1^{\omega_1})^{s_{p1}} \ldots (d_p^{\omega_1})^{s_{pp}} c^{\alpha}$, где $\alpha = \sum_{j=1}^{p} s_{p-1j}\sigma_1(j)$. Учитывая (5), видим, что $\alpha \equiv 0 \pmod p$, $x^{\omega_1} \in D^{\omega_1}$ и, более того, $x^{\omega} \in D^{\omega}(1)$. Для подгруппы $H^{\omega}(1)$ теорема доказана.

Как мы видели,

$$([H^{\omega}, H^{\omega}] \cap H^{\omega}(1))|_{\Delta_1} = [H^{\omega_1}, H^{\omega_1}],$$

поэтому для $H^{\omega}(11)$ теорема следует из доказанной уже для $H^{\omega}(1)$ формулы (4) и т. д. по индукции. Теорема 1 доказана.

Напомним, что группы G и H называются соизмеримыми, если они имеют изоморфные подгруппы конечного индекса.

Следствие 1. *Группы* H^{ω} *и* $\underbrace{H^{\omega_1} X \ldots X H^{\omega_1}}_{p \text{ раз}}$ *соизмеримы.*

Следствие 2 (см. [9, теорема A]). *Для любого простого числа p, любой последовательности подалфавитов ω алфавита $\{1, 2, \ldots, p\}$ любая неединичная нормальная подгруппа группы H^{ω} имеет в ней конечный индекс.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что нормальное замыкание $N(h)$ любого неединичного элемента h группы H^{ω} имеет в H^{ω} конечный индекс. Пусть $h = f_1 c^{\alpha_1} \ldots f_n c^{\alpha_n}$, где $f_i \in D^{\omega}$, α_i — целые числа. Число неединичных слогов f_i, c^{α_i} будем называть длиной выбранной записи элемента h. Минимум $|h|$ длин всех записей элемента h назовем длиной элемента h. Докажем теорему индукцией по $|h|$. Если $|h| = 1$, то $h = c^{\alpha}$ или $h \in D^{\omega}$ и, соответственно, $H^{\omega} = N(h) D^{\omega}$ или $H^{\omega} = N(h) D_k^{\omega}$, где d_k — один из элементов $d_1, \ldots, d_p$, который действительно входит в разложение элемента h. По лемме 1 $N(h)$ — подгруппа конечного индекса. Пусть для элементов длины $< n$ теорема доказана и $|h| = n$.

Пусть $h = c^{\alpha} g$, $1 \leqslant \alpha < p$, $g \in H_1^{\omega}$ и f^{ω} — неединичный элемент подгруппы $D^{\omega}(1)$. Коммутатор $x = [h, f]$ отличен от единицы, так как уже $x|_{\Delta_1} = f^{\omega}|_{\Delta_1} = f^{\omega_1} \neq 1$. По доказанному $N(f^{\omega_1})$ имеет конечный индекс в группе H^{ω_1}. Пусть $H^{\omega}(1)$ — подгруппа из теоремы 1. Очевидно,

$$M^{\omega} = [H^{\omega}(1), N_1(x)] \leqslant H^{\omega}(1) \cap N_1(x) < N(x).$$

Далее, $M^{\omega}|_{\Delta_1} = [H^{\omega}(1)|_{\Delta_1}, \; N(f^{\omega_1})] \geqslant [K, K]$, где подгруппа $K = H^{\omega}(1)|_{\Delta_1} \cap N(f^{\omega_1})$ имеет в H^{ω_1} конечный индекс, значит, K конечно порождена и ее коммутант $[K, K]$ имеет конечный индекс в H^{ω_1}. Следовательно, подгруппа $N(x)$, содержащаяся в $N(h)$, содержит в свою очередь подгруппу гр$(c^{-i}M^{\omega}c^{i}\,|\,i=1,\ldots,p)$, имеющую конечный индекс в H^{ω}.

Итак, пусть $h\in H_1^{\omega}$. На каждой p-й доле Δ_i элемент h индуцирует элемент h_i группы H^{ω_1} длины $|h_i|<n$. Хотя бы один элемент h_i нетривиален. По предположению индукции $N(h_i)$ имеет конечный индекс в H^{ω_1}. Имеем

$$M^{\omega}=[H^{\omega}(i),\ N_1(h)]\leqslant H^{\omega}(i)\cap N_1(h)<N(h).$$

Далее, $M^{\omega}|_{\Delta_i}=[H^{\omega}(i)|_{\Delta_i}, N(h_i)]\geqslant[K, K]$, где подгруппа $K=H^{\omega}(i)\,|_{\Delta_i}\cap\cap N(h_i)$ имеет в H^{ω_1} конечный индекс, вследствие чего число ее порождающих конечно, а значит, ее коммутант имеет конечный индекс в H^{ω_1}. Таким образом, подгруппа $N(h)$ содержит подгруппу гр$(c^{-i}M^{\omega}c^{i}\,|\,i=1,\ldots,p)$ конечного индекса группы H^{ω}. Следствие доказано.

Теорема 1'. *Пусть p — простое число, ω — последовательность подалфавитов алфавита $\{1,2,\ldots,p\}$. Если γ и γ' — конечные кортежи в этом алфавите и $|\gamma|=|\gamma'|>1$, то подгруппы $G^{\omega}(\gamma)$ и $G^{\omega}(\gamma')$ сопряжены в группе G^{ω}. Пусть $|\gamma|>1$. Подгруппа $G^{\omega}(\gamma)\,|_{\Delta_\gamma}$ имеет конечный индекс в $St_{G^{\omega}}(\gamma)\,|_{\Delta_\gamma}=H^{\omega^{|\gamma|-2}}$. Если $p>2$, то*

$$G^{\omega}(\gamma)\,|_{\Delta_\gamma}=[H^{\omega^{|\gamma|-2}},\ H^{\omega^{|\gamma|-2}}].$$

(Отметим, что $G^{\omega}(\gamma)\,|_{\Delta_\gamma}$ изоморфна как группа преобразований группе $G^{\omega}(\gamma)$.)

Доказательство. Докажем, что при фиксированном n группа G^{ω} транзитивно действует на множестве всех p^n-х долей отрезка Δ.

Подгруппа гр(b^p) группы G^{ω} транзитивно действует на p-х долях отрезка Δ; порождающий b действует на p^2-х долях отрезка Δ как циклическая подстановка порядка p^2; подгруппа G_2^{ω} группы G^{ω} индуцирует на каждой p^2-й доле Δ_{ij} группу H^{ω}, транзитивность действия которой установлена ранее в теореме 1.

Утверждение теоремы достаточно доказать для подгрупп $G^{\omega}(11)$, $G^{\omega}(111),\ldots$, причем даже можно ограничиться подгруппой $G^{\omega}(11)$. В самом деле, если уже доказана конечность индекса подгруппы $G^{\omega}(11)\,|_{\Delta_{11}}$ в H^{ω}, то конечность индекса $G^{\omega}(111)\,|_{\Delta_{111}}$ в H^{ω_1} и т. д. следует из третьего абзаца доказательства теоремы 1. Если $p>2$ и доказано, что $G^{\omega}(11)\,|_{\Delta_{11}}=[H^{\omega}, H^{\omega}]$, то остается сослаться на четвертый абзац доказательства теоремы 1.

Пусть β — подстановка p^2-х долей, задаваемая элементом b. Упорядочим p^2-е доли в соответствии с действием этого элемента: $\Delta_1=\Delta_{11}$, $\Delta_2=\Delta_{(11)\beta},\ \ldots,\ \Delta_{(p^2)}=\Delta_{(11)\beta^{-1}}$. Теперь действие порождающего b можно интерпретировать как подстановку $(1,2,\ldots,p^2)$ p^2-х долей. Порождающий a на долях $\Delta_{(1)},\ldots,\Delta_{(p^2)}$ индуцирует преобразования c, $1,\ldots,1$, $d_1,\ldots,d_p$ соответственно. Очевидно, что элементы $x_1=b^{-1}ab,\ldots,x_p=b^{-p}ab^{p}$ группы G^{ω} индуцируют на доле $\Delta_{(1)}=\Delta_{11}$ преобразования $d_p,\ldots,d_1$ соответственно. Если $p=2$, то на долях $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$, $\Delta_{(3)}$, $\Delta_{(4)}$ порождающий a индуцирует преобразования c, 1, d_1, d соответственно, коммутатор $[a, x_1]$ принадлежит подгруппе $G^{\omega}(11)$ и индуцирует на доле $\Delta_{(1)}$ коммутатор $[c, d_2]$. Если $p>2$, то все коммутаторы $[a, x_1],\ldots,[a, x_p]$ принадлежат подгруппе $G^{\omega}(11)$ и индуцируют на доле $\Delta_{(1)}$ коммутаторы $[c, d_p],\ldots,[c, d_1]$ соответственно. Так как $G^{\omega}(11)\lhd G_2^{\omega}$ и $G_2^{\omega}|_{\Delta(1)}=H^{\omega}$, то в случае $p=2$ $G^\omega(11)|_{\Delta_{(1)}}\geqslant N([c,d_2])$, подгруппа $N([c,d_2])$ по следствию 2 из теоремы 1 имеет в H^ω конечный индекс. В случае $p>2$ имеем

$$G^\omega(11)|_{\Delta_{(1)}}\geqslant \text{гр}(N([c,d_i])\,|\,i=1,\ldots,p)=[H^\omega\ \ldots\ H^\omega]$$

в силу следствия 2 из леммы 2. Докажем, что на самом деле имеет место равенство. Пусть некоторое слово $V=V(x_1,\ldots,x_{p^2})$, $x_i=b^{-i}ab^i$, задает элемент подгруппы $G^\omega(11)$. Пусть s_i — логарифм слова V по основанию x_i. Очевидно, что ни на какой p^2-й доле два различных элемента x_i, x_j не индуцируют одно и то же нетривиальное преобразование. По условию слово V на всех p^2-х долях, отличных от $\Delta_{(1)}$, индуцирует элементы коммутанта группы H^ω (а именно единицы), следовательно, по лемме 2, все $s_i\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$. Последнее означает, что и на доле $\Delta_{(1)}$ слово V индуцирует элемент коммутанта группы H^ω. Теорема доказана.

Следствие 1 (см. [9, теорема А]). *Для любого простого числа p и любой последовательности подалфавитов ω алфавита $\{1,2,\ldots,p\}$ любая неединичная нормальная подгруппа группы G^ω имеет в ней конечный индекс.*

Доказательство. Достаточно показать, что нормальное замыкание $N(g)$ любого элемента g группы G^ω в группе G^ω имеет в G^ω конечный индекс. Пусть $g=b^\beta h$, $1<\beta<p^2$, $h\in G_2{}^\omega$, тогда коммутатор $x=[a,g]$ отличен от единицы, так как уже $x|_{\Delta_{11}}=c^{-1}(g^{-1}b^{-\beta}ab^\beta g)|_{\Delta_{11}}\neq 1$. Так как $x\in G_2{}^\omega$ и $N(x)\leqslant N(g)$, то все свелось к случаю, когда $g\in G_2{}^\omega$. Пусть элемент g подгруппы $G_2{}^\omega$ на некоторой p^2-й доле $\Delta\gamma$ индуцирует неединичный элемент g_γ группы H^ω.

По следствию 2 из теоремы 1 $N(g_\gamma)$ имеет конечный индекс в группе H^ω. Пусть $G^\omega(\gamma)$ — подгруппа из теоремы 1′, $N_2(g)$ — нормальное замыкание элемента g в подгруппе $G_2{}^\omega$, тогда

$$M^\omega=[G^\omega(\gamma),N_2(g)]\leqslant G^\omega(\gamma)\cap N_2(g)<N(g)$$

и $M^\omega|_{\Delta_\gamma}=[G^\omega(\gamma)|_{\Delta_\gamma},N(g_\gamma)]$ имеет конечный индекс в группе H^ω. Таким образом, $\text{гр}(b^{-i}M^\omega b^i\,|\,i=1,\ldots,p^2)$ имеет в G^ω конечный индекс и содержится в $N(g)$.

Следствие 2. *Группы G^ω и $\underbrace{H^\omega X\ \ldots\ XH^\omega}_{p^2\text{ раз}}$ соизмеримы.*

Следствие 3. *Абелевы нормальные подгруппы групп H^ω и G^ω (в частности, их центры) тривиальны.*

§ 3. Абелевы подгруппы

Теорема 2. *Пусть p — простое число, ω — последовательность подалфавитов алфавита $\{1,2,\ldots,p\}$, G — подгруппа конечного индекса группы H^ω или G^ω. Абелевы подгруппы группы G — это всевозможные прямые суммы не более чем счетного числа циклических p-групп и только они.*

Доказательство. а) Убедимся вначале, что других абелевых подгрупп, кроме указанных в теореме, группа G не содержит. По определению, элемент $a\neq 1$ абелевой p-группы A имеет бесконечную высоту, если для любого целого n уравнение $p^nx=a$ имеет решение в группе A (см. [4, с. 93]). Если абелева p-группа A финитно аппроксимируема, то она изоморфна поддекартову произведению некоторых конечных p-групп A_α. Если $1\neq a\in A$ и $1\neq a_\alpha\in A_\alpha$, то уже корень $|A_\alpha|$-й степени из элемента

a извлечь невозможно, следовательно, группа A не содержит элементов бесконечной высоты. Поскольку группа финитно аппроксимируема, то утверждение этого пункта следует теперь из теоремы Прюфера о счетных абелевых p-группах без элементов бесконечной высоты (см. [4, теорема 10.1.14]).

б) Пусть G — это группа H^ω. Подгруппы $H^\omega(\underbrace{1\ldots 12}_{n})$ группы H^ω (см. теорему 1) попарно различны и попарно перестановочны и, кроме того, изоморфны подгруппам конечного индекса групп $H^{\omega^{n+1}}$, $n=1, 2, \ldots$. Поскольку период любой группы H^ω бесконечен, то из элементов указанных подгрупп можно легко построить любую наперед заданную прямую сумму не более чем счетного числа циклических p-групп. Случай группы G^ω разбирается аналогично.

в) Пусть G — собственная подгруппа конечного индекса группы H^ω или G^ω, а A — счетная прямая сумма циклических p-групп неограниченно растущих порядков. Очевидно, что в A вкладывается любая не более чем счетная прямая сумма циклических p-групп. Доказательство теоремы завершим таким общим замечанием. Если некоторая группа X содержит группу A, определенную выше, то и любая подгруппа конечного индекса Y группы X содержит подгруппу, изоморфную A. В самом деле, подгруппа Y содержит почти всю подгруппу A, а та, в свою очередь, вкладывается в любую свою подгруппу конечного индекса. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть p — простое число, ω — последовательность подалфавитов алфавита $\{1, 2, \ldots, p\}$, G — группа H^ω или G^ω. Централизатор произвольного элемента группы G содержит подгруппу, соизмеримую с некоторой группой H^{ω^n} (в частности, бесконечен).*

Доказательство. Пусть сначала $G=H^\omega$. а) Пусть $h\in G$, $C(h)$ — централизатор элемента h в G. Доказательство теоремы проведем индукцией по длине $|h|$ элемента h (определение $|h|$ см. в доказательстве следствия 2 теоремы 1). Заменяя h сопряженным элементом, можно считать, что либо $|h|=1$, либо $|h|=2n$ и $h=f_1c^{\alpha_1}\ldots f_nc^{\alpha_n}$, где $f_1\neq 1$, $c^{\alpha_n}\neq 1$.

Пусть $|h|=1$, тогда либо $h=c^\alpha$, либо $h\in D^\omega$. Ясно, что

$$C(c^\alpha)\geqslant \text{гр}(gg^c\ldots g^{c^{p-1}}\,|\,g\in H^\omega(1))\simeq H^\omega(1)$$

и по теореме 1 группы $H^\omega(1)$ и H^{ω_1} соизмеримы. Если $h\in D^\omega$, то $h|_{\Delta_2}=c^\alpha$, $\alpha=\sigma_1(h)$. Пусть $H'=H_{(2)}{}^\omega$, $H''=H'|_{\Delta_2}$; $C'(x)$, $C''(x)$ — централизаторы элемента x в подгруппах H' и H''; тогда $C(h)\geqslant C'(h)\simeq C''(c^\alpha)$. А выше мы видели, что подгруппа $C''(c^\alpha)$ группы H^{ω_1} содержит подгруппу, соизмеримую с H^{ω_2}.

Пусть для элементов длины $<2n$ теорема доказана и $|h|=2n$. Если $h\in H_1{}^\omega$, $h|_{\Delta_i}=h_i\neq 1$, $H'=H^\omega(i)$, $H''=H'|_{\Delta_i}$, то $C(h)\geqslant C'(h)\simeq C''(h_i)$, а подгруппа $C''(h_i)$ группы H^{ω_1} содержит подгруппу, соизмеримую, по предположению индукции, с некоторой H^{ω^n}. Прежде чем разбирать оставшийся случай $h\notin H_1{}^\omega$, докажем периодичность группы H^ω — это важно и само по себе (ведь группы G^ω составляют более широкий класс, нежели группы, построенные в [1], хотя идеи работы [1] остаются для них в силе) и будет использовано в дальнейшем.

б) Периодичность произвольного элемента h группы H^ω докажем индукцией по $|h|$. Если $|h|=1$, то $h^p=1$. Пусть уже доказано, что все элементы длины $<2n$ периодические и $|h|=2n$. Если $h\in H_1^{\omega}$, $h|_{\Delta_i}=h_i$, $i=1,\ldots,p$, то $|h_i|<2n$, поэтому все h_i, а значит, и сам элемент h периодические. Если $h=c^{\alpha}g$, $g\in H_1^{\omega}$, $g|_{\Delta_i}=g_i$, $i=1,\ldots,p$, то на каждой доле Δ_i элемент h^p индуцирует элемент $h^1=g_{\alpha}g_{2\alpha}\ldots g_{p\alpha}$ группы H^{ω_1} или элемент, с ним сопряженный. Так как каждый из n слогов f_i, входящих в запись элемента h, только на долях Δ_1 и Δ_2 индуцирует нетривиальные преобразования $f_i^{\omega_1}$ и $c^{\sigma_1(f_i)}$, то $|h^{(1)}|\leqslant 2n$. Если хотя бы для одного слога f_i имеет место сравнение $\sigma_i(f_i)\equiv 0 \pmod p$, то $|h^{(1)}|<2n$. Если $h^{(1)}\in H_1^{\omega_1}$, то $|h_i^{(1)}|<2n$, где $h_i^{(1)}=h^{(1)}\big|_{\Delta_i}$, $i=1,\ldots,p$. Если элемент $h^{(1)}$ не лежит в $H_1^{\omega_1}$, то его p-я степень индуцирует на каждой p-й доле элемент $h^{(2)}$ или с ним сопряженный. Повторяя этот процесс возведения в p-ю степень и проектирования, получим последовательность элементов h, $h^{(1)}$, $h^{(2)},\ldots$ из групп H^{ω}, H^{ω_1}, $H^{\omega_2},\ldots$ соответственно. Поскольку $|h|\geqslant|h^{(1)}|\geqslant\ldots$ и в записи элементов $h^{(i)}$ участвуют одни и те же слоги f_i (различающиеся верхними индексами $\omega,\omega_1,\ldots$), то для любого f_i найдется подалфавит σ_s такой, что $\sigma_s(f_i)\equiv 0 \pmod p$ и уже длина слова h^s будет меньше $2n$.

в) Пусть $|h|=2n$, $h=c^{\alpha}g$, $1\leqslant\alpha\leqslant p$, $g\in H_1^{\omega}$. Если $x\in H_1^{\omega}$, $x|_{\Delta_i}=x_i$, $g|_{\Delta_i}=g_i$ и $[x,h]=1$, то имеют место равенства $x_i=g_i^{-1}x_{i-\alpha}g_i$, $i=1,\ldots,p$, из которых следует, что

$$x_{\alpha}=x_p^{g_{\alpha}},\ x_{2\alpha}=x_p^{g_{\alpha}g_{2\alpha}},\ \ldots,\ x_p=x_p^{g_{\alpha}g_{2\alpha}\cdots g_{p\alpha}}.$$

Обратно, пусть заданы элемент $h=c^{\alpha}g$ и элемент $x_p\in H^{\omega_1}$, перестановочный с произведением $g_{\alpha}g_{2\alpha}\ldots g_{p\alpha}=h^{(1)}$. Если, кроме того, элемент x_p принадлежит нормальной подгруппе конечного индекса $M^{\omega_1}=H^{\omega}(p)|_{\Delta_p}$ группы H^{ω_1}, то по выписанным выше формулам мы можем найти элементы $x_1,\ldots,x_{p-1}$, также принадлежащие подгруппе M^{ω_1}, а затем и элемент x, принадлежащий подгруппе гр$(c^{-i}H^{\omega}(p)c^i\,|\,i=1,\ldots,p)$ группы H^{ω}, перестановочный с элементом h и индуцирующий на p-й доле Δ_i преобразование x_i. Таким образом, чтобы доказать утверждение для элемента h группы H^{ω}, достаточно доказать его для элемента $h^{(1)}$ группы H^{ω_1}. Перед нами три возможности: 1) $|h^{(1)}|<2n$, тогда работает предположение индукции, 2) $h^{(1)}\in H_1^{\omega_1}$, этот случай разобран в пункте а), 3) $|h^{(1)}|=2n$, $h^{(1)}\notin H_1^{\omega_1}$, тогда по приведенной схеме переходим к элементу $h^{(2)}$ и т. д.; в силу пункта б), на некотором конечном шаге обязательно представится одна из первых двух возможностей.

В случае, когда $G=G^{\omega}$, доказательство аналогично. Теорема доказана.

§ 4. Подгруппы, порождаемые парами сопряженных элементов

Группа G называется сопряженно бипримитивно конечной [7], если для любой ее конечной подгруппы K в фактор-группе $N_G(K)/K$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Теорема 4. *При любом простом $p>2$ и любом ω группы G^{ω} и H^{ω} содержат бесконечные подгруппы, порождаемые парой сопряженных элементов простого порядка, и, следовательно, не удовлетворяют определению сопряженной бипримитивной конечности уже при $K=1$.*

Доказательство. а) Достаточно найти такое $x\in H^{\omega}$, что подгруппа гр$(c,x^{-1}cx)$ бесконечна. Действительно, тогда любой элемент y

из группы G^ω, индуцирующий на доле Δ_{pp} преобразование x, задает необходимую бесконечную подгруппу гр$(bab^{-1}, y^{-1}bab^{-1}y)$ уже в группе G^ω.

б) Пусть $f=d_1\ldots d_p=f_i d_i$, $i=1, \ldots, p$. Подгруппа $K^\omega=$гр$(c, d_i, f)=$гр(c, d_i, f_i) p-группы H^ω бесконечна для любых i, p, ω. Действительно, операция p-проектирования, примененная к подгруппе K^ω, на каждой p-й доле отрезка Δ задает группу гр$(d_i^{\omega_1}, f^{\omega_1}, c^{\sigma_1(i)}, c^{\sigma_1(1)}\ldots c^{\sigma_1(p)})$. Таким образом, либо $\sigma_1(i)=1$, либо $|\sigma_1|\neq p$, где $|\sigma_1|$ — мощность подалфавита σ_1. В любом случае эта группа совпадает с подгруппой K^{ω_1} группы H^{ω_1}. Так как это рассуждение можно повторять неограниченно, то б) доказано.

в) Пусть $\sigma_1(i)=1$ и $z=d_i c f_i c^{-1}$ или $d_i c f c^{-1}$. Тогда группа гр(c, z) бесконечна. Действительно, на доле Δ_1 элементы $c^{-1}zc, z, czc^{-1}$ индуцируют в случае $z=d_i c f_i c^{-1}$ преобразования $f_i, d_i c^{\sigma_2(1)}\ldots c^{\sigma_1(i-1)}\ldots c^{\sigma_1(i+1)}\ldots c^{\sigma_1(p)}$, $c^{\sigma_1(i)}$, а в случае $z=d_i c f c^{-1}$ — преобразования $f, d_i c^{\sigma_1(1)}\ldots c^{\sigma_1(p)}, c^{\sigma_1(i)}$. Остается воспользоваться утверждением б).

г) Вернемся к разыскиваемой подгруппе гр$(c, x^{-1}cx)$. Каково бы ни было x, для доказательства бесконечности этой подгруппы достаточно убедиться, что уже элементы $x^{-1}cxc^{-1}$ и $x^{-1}c^2xc^{-2}$ порождают бесконечную подгруппу. Таким образом, достаточно отыскать такой элемент $x\in H^\omega$, что на доле Δ_1 элементы x^{-1}, cxc^{-1}, c^2xc^{-2} индуцируют $1, z, c^m\neq 1$ соответственно, где z — один из элементов пункта в). Пусть $i\in\sigma_2$, $j\in\sigma_1$. Положим

$$x=\begin{cases} d_i^c d_j f_i^c d_j^{-1}, & \text{если } |\sigma_1|\neq p, \\ d_i^c d_j f^c d_j^{-1}, & \text{если } |\sigma_1|=p. \end{cases}$$

Очевидно, при таком выборе элемента x элементы x^{-1}, cxc^{-1}, c^2xc^{-2} индуцируют $d_j d_j^{-1}$, $d_i c^{\sigma_1(j)} f_i c^{-\sigma_1(j)}$, $c^{\sigma_1(i)} c^{\sigma_1(1)}\ldots c^{\sigma_1(i-1)} c^{\sigma_1(i+1)}\ldots c^{\sigma_1(p)}$ в первом случае и $d_j d_j^{-1}$, $d_i c^{\sigma_1(j)} f c^{-\sigma_1(j)}$, $c^{\sigma_1(i)} c^{\sigma_1(1)}\ldots c^{\sigma_1(p)}$ во втором случае. При наших предположениях это будут соответственно преобразования 1, d_i, cf_ic^{-1}, $c^{|\sigma_1|}$ и 1, $d_i c f c^{-1}$, c^{p+1}. Теорема доказана.

Отметим, что утверждение теоремы 4 для групп G^ω при $p=3$ независимо и другим способом получил А. В. Тимофеенко [8].

Автор искренне благодарит Ю. И. Мерзлякова за поддержку в работе и полезные обсуждения.

Литература

1. *Алёшин С. В.* Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах.— Матем. заметки, 1972, т. 11, № 3, с. 319—328.
2. *Григорчук Р. И.* К проблеме Бернсайда о периодических группах.— Функцион. анализ и его прил., 1980, т. 14, № 1, с. 53—54.
3. *Мерзляков Ю. И.* О бесконечных конечно-порожденных периодических группах.— ДАН СССР, 1983, т. 268, № 4, с. 803—805.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
5. Коуровская тетрадь, 9-е изд. Новосибирск, 1984.
6. *Рожков А. В.* Два свойства p-групп Алёшина.— В кн.: 9-й Всесоюзн. симп. по теории групп. М., 1984, с. 55—56.
7. *Шунков В. П.* О достаточных признаках существования в группе бесконечных локально конечных p-групп.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 6, с. 716—737.
8. *Тимофеенко А. В.* О группах типа Алёшина и Голода.— В кн.: Материалы 21-й Всесоюзн. научной студенческой конференции. Новосибирск, 1983, с. 71—76.
9. *Gupta N., Sidki S.* Some infinite p-groups.— Алгебра и логика, 1983, т. 22, № 5, с. 584—589.

Новосибирский государственный университет

Поступила в редакцию 14.VI.1983 и 15.I.1985