

К.В. РОЩИН, А.Н. КУЗЬМЕНКО

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие



**Краснодар
2016**

Министерство образования и науки Российской Федерации
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.В. РОЩИН, А.Н. КУЗЬМЕНКО

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие по выполнению
расчетно-графических работ для студентов
II и III курсов специальности 07.03.01 Архитектура

Краснодар
2016

УДК 624.04 (075.8)

ББК 38.112я73

Р 815

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент

В.А. Гуминский

Кандидат технических наук, доцент

П.О. Русинов

Роцин, К.В., Кузьменко, А.Н.

Р 815 Строительная механика: учеб.-метод. пособие по выполнению расчетно-графических работ / К.В. Роцин, А.Н. Кузьменко. – Краснодар: Кубан. гос. ун-т, 2016. 233 с. 400 экз.

ISBN 978-5-8209-0974-0

Предлагаемое издание содержит методические указания, задания, входящие в состав расчетно-графических работ по курсу строительной механики, примеры их решения, краткие теоретические сведения. Изложены общие требования к оформлению работ.

Адресуется студентам II и III курсов специальности 07.03.01 Архитектура.

УДК 624.04 (075.8)

ББК 38.112я73

ISBN 978-5-8209-0974-0

© Кубанский государственный университет, 2016

© Роцин К.В., Кузьменко А.Н., 2016

ВВЕДЕНИЕ

Строительная механика – одна из основополагающих технических дисциплин, формирующих мышление архитектора и инженера.

Строительные конструкции в условиях эксплуатации подвергаются внешним воздействиям и меняют форму и размеры, т.е. деформируются. При проектировании конструкции приходится определять материал, конфигурацию и размеры элементов, способных оказать сопротивление внешним воздействиям.

Главными требованиями к конструкции выступают противоречащие друг другу надежность (способность выполнять заданные функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в определенных пределах в течение требуемого промежутка времени) и экономичность. Разрешение этого противоречия – важнейший элемент научной методики, обуславливающей развитие механики деформируемого твердого тела – науки о прочности (способности сопротивляться разрушению под действием внешних факторов), жесткости (способности сопротивляться изменению размеров и формы) и устойчивости (способности сохранять определенную начальную форму равновесия).

Основываясь на выводах этой науки и имея собственную направленность – разработку моделей надежности, сформировалась область знания с исторически закрепившимся названием «Сопротивление материалов», изучение которой тоже составит нашу задачу.

Основные понятия сопротивления материалов опираются на законы и теоремы теоретической механики и в первую очередь на законы статики, без знания которых изучение данного предмета становится практически невозможным.

Расчетом приходится пользоваться не только при проектировании новых сооружений, но и во всех тех случаях, когда существующее сооружение должно подвергнуться действию новых, не предусмотренных ранее нагрузок. Расчет помогает выяснить, в какой степени эти нагрузки допустимы, требуется ли произвести усиление сооружения и какое именно.

В России, где жилищное, промышленное и транспортное строительство широко развито и где в безопасности и экономичности сооружений заинтересовано все население, строительная механика выполняет важную и почетную задачу.

Было бы опасным заблуждением смотреть на строительную механику как на чисто математическую дисциплину. Поскольку она имеет дело с прочностью и жесткостью реальных сооружений, сделанных из тех или иных строительных материалов, ее выводы должны быть основаны на изучении и познании действительных свойств этих материалов, т.е. на соответствующим образом поставленных экспериментах.

Тем же путем должны проверяться все допущения, касающиеся самих конструкций, все предположительные свойства, которыми мы наделяем их при выработке соответствующих методов расчета.

Строительная механика – наука экспериментально-теоретическая, призвана обеспечивать строительство современными методами статического и динамического расчета. Основные цели изучения строительной механики будут достигнуты, если студенты сумеют применить полученные теоретические знания в практических расчетах.

Строительная механика широко применяется в инженерной и архитектурской практике.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Каждая расчетно-графическая работа (РГР) по курсу строительной механики в первой части (разд. «Статика») оформляется на стандартных плотных листах бумаги формата А4 (297 x 210 мм). На листе вычерчивается стандартная рамка со штампом произвольной формы (рис. 1). Расчетно-графические работы второй и третьей частей разделов «Сопротивления материалов» и «Строительной механики» обязательно должны иметь обложку – титульный лист установленного образца (рис. 2). Все РГР оформляются на стандартных листах писчей бумаги формата А4. Допускается применение развернутых двойных тетрадных листов в клетку, обрезанных до указанного формата. На лицевой стороне листа вычерчивается стандартная рамка (рис. 3). Обратная сторона листа остается чистой для внесения необходимых исправлений в расчет. Удалять замечания преподавателя или вырывать листы из проверенных расчетно-графических работ не допускается.

Расчетно-графическая работа выполняется чернилами или пастой черного, синего или фиолетового цветов. Допускается распечатка расчетно-графической работы на принтере. Пояснительная записка должна начинаться с записи всех исходных данных задачи. Перед каждой расчетной операцией необходимо дать краткое пояснение смысла и последовательности выполнения этого этапа расчета. Все расчеты должны выполняться с соблюдением правил приближенных вычислений с точностью до двух цифр после запятой, кроме особо оговоренных случаев.

Чертежи в работе должны быть выполнены аккуратно, карандашом или черной ручкой, в выбранном масштабе, с помощью чертежных инструментов. Характерные ординаты эпюр и графиков, оси и другие величины рекомендуется выделять цветом, отличным от основного. На чертежах следует проставлять как буквенные, так и числовые значения размеров, нагрузок и реакций опор.

При исправлении полученной проверенной работы не разрешается стирать вопросы и замечания преподавателя.

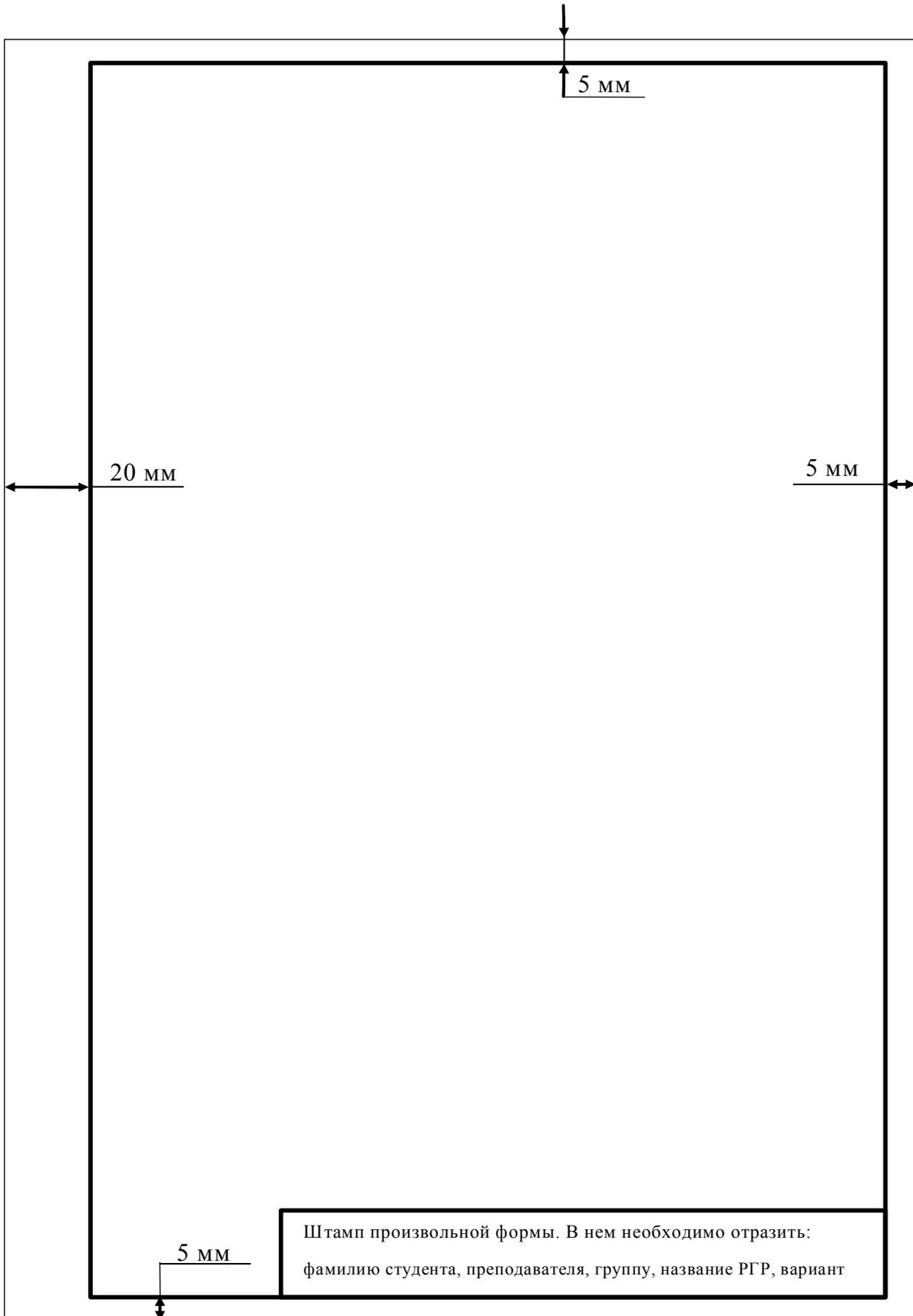


Рис. 1. Стандартная рамка листа РГР 1-го раздела курса «Статика»

Министерство образования и науки Российской Федерации

Кубанский государственный университет

Кафедра архитектуры

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № _____

ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

Название работы

Вариант _____

Выполнил:

студент гр. А-203

ИВАНОВ А.И.

Проверил:

преподаватель

ПЕТРОВ Н.А.

Краснодар

2016

Рис. 2. Пример оформления титульного листа РГР

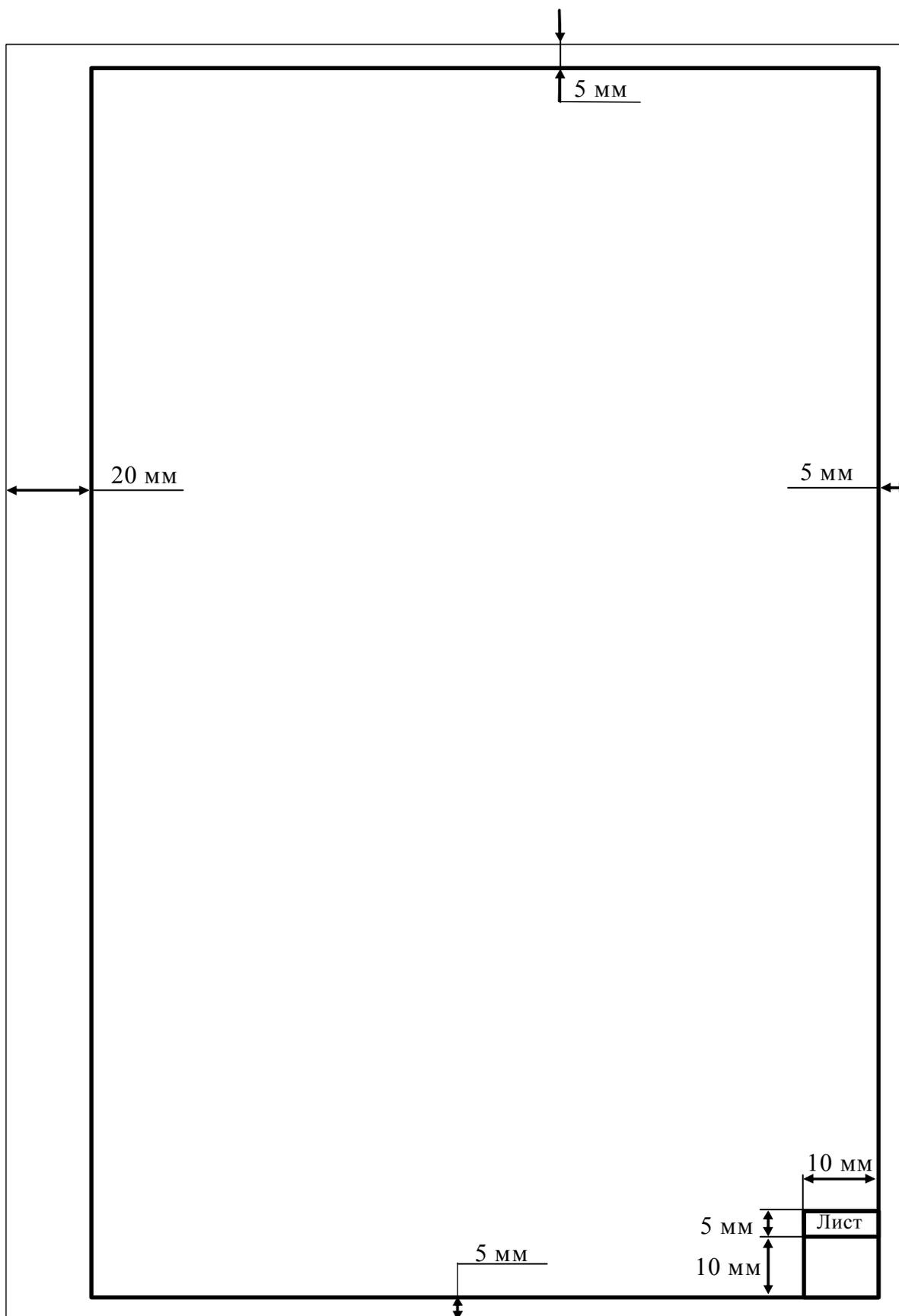


Рис. 3. Стандартная рамка листа РГР 2-го и 3-го разделов курса

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. СТАТИКА

Теоретическая механика наряду с математикой и физикой имеет большое общеобразовательное значение, служит научной базой современной техники, основой других учебных дисциплин, необходимых архитекторам и инженерам.

Главная задача курса теоретической механики – обучение наиболее общим принципам равновесия и движения механических систем, обучение методам и анализу инженерно-технических и архитектурских задач.

Как одна из важнейших физико-механических дисциплин теоретическая механика играет существенную роль в подготовке инженеров и архитекторов любых специальностей. На основных законах и принципах теоретической механики базируются многие общеинженерные дисциплины: сопротивление материалов, гидравлика; дисциплины, необходимые архитекторам: железобетонные и каменные конструкции, конструкции из дерева и пластмасс, металлические конструкции и др.

Современная техника ставит перед инженерами и архитекторами множество задач, решение которых связано с исследованием так называемого механического движения и механического взаимодействия материальных тел. *Механическим движением* называют происходящее с течением времени изменение взаимного положения материальных тел в пространстве. Под механическим взаимодействием понимают те действия материальных тел друг на друга, в результате которых происходит изменение движения этих тел или изменение их формы (деформация). За основную меру действий, приводящих к изменению движения тел, принимают величину, называемую *силой*.

Наука о механическом движении и взаимодействии материальных тел называется *механикой*. С развитием этой науки в ней появился ряд самостоятельных областей, связанных с изучением механики твердых деформируемых тел, жидкостей и газов: теория упругости, теория пластичности, гидромеханика; ряд разделов прикладной механики: сопротивление материалов, статика сооружений, теория машин и механизмов, гидравлика и другие дисциплины. Рассмотрение общих понятий, законов и методов,

присущих каждой из названных дисциплин, и составляет предмет *теоретической* (или *общей*) *механики*.

Теоретическая механика – это наука о законах движения тел и условиях их равновесия под действием приложенных сил.

В основе механики лежат законы, называемые законами классической механики (или законами Ньютона), которые установлены путем обобщения результатов многочисленных опытов и наблюдений и нашли подтверждение в практике человечества.

В механике тела и конструкции рассматриваются упрощенно, без учета их второстепенных характеристик, в виде так называемых расчетных схем.

По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику принято разделять на статику, кинематику и динамику. В *статике* излагается учение о силах и об условиях равновесия материальных тел под действием сил. В *кинematике* рассматриваются общие геометрические свойства движения тел. В *динамике* изучается движение материальных тел под действием сил.

В первой части курса изучается раздел «Статика».

СВЯЗИ И ИХ РЕАКЦИИ

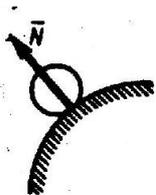
Тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется *свободным* (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие тела, называется *несвободным*. Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называется *связью*. В дальнейшем будем рассматривать связи, реализуемые какими-нибудь телами, и называть связями сами эти тела.

Примеры несвободных тел: груз, лежащий на столе, дверь, подвешенная на петлях, и т. п. Связями в этих случаях будут: для груза — плоскость стола, не дающая грузу перемещаться по вертикали вниз; для двери — петли, не дающие двери отойти от коробки.

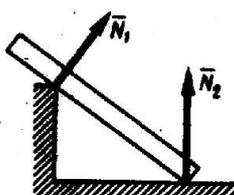
Тело действует на связь с некоторой силой. Одновременно по закону о равенстве действия и противодействия связь будет действовать на тело с такой же по модулю, но противоположно направленной силой. Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называется *реакцией связи*.

Значение реакции связи зависит от других действующих сил и заранее неизвестно. Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу. Когда связь может препятствовать перемещениям тела по нескольким направлениям, направление реакции такой связи тоже заранее неизвестно и должно определяться в результате решения рассматриваемой задачи.

Реакции некоторых основных видов связей



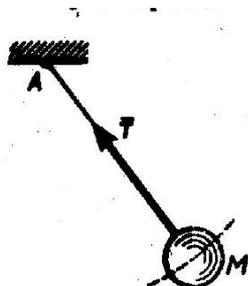
а



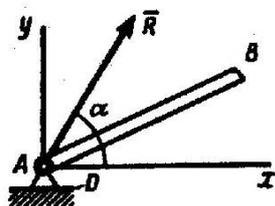
б

1. *Гладкая плоскость (поверхность) или опора*. Такая поверхность не дает телу перемещаться только по направлению общего перпендикуляра (нормали) к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (а). Поэтому реакция N гладкой поверхности или опоры направлена по общей

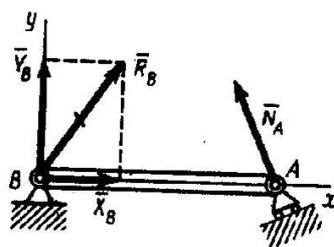
нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания и приложена в этой точке. Когда одна из соприкасающихся поверхностей является точкой (б), то реакция направлена по нормали к другой поверхности.



2. *Гибкие нити и стержни.* Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити, не дает телу M удаляться от точки подвеса нити по направлению AM . Поэтому реакция T натянутой нити направлена вдоль нити к точке ее подвеса.



3. *Неподвижный цилиндрический шарнир (подшипник).* Шарнир осуществляет такое соединение двух тел, при котором одно тело может вращаться по отношению к другому вокруг общей оси (например, как две половины ножниц). Если тело AB прикреплено с помощью такого шарнира к неподвижной опоре D , то точка A тела не может при этом переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному оси шарнира. Следовательно, реакция R цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, т. е. в плоскости Axy . Для силы R в этом случае заранее неизвестны ни ее модуль R , ни направление (угол α).

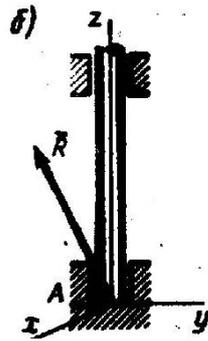
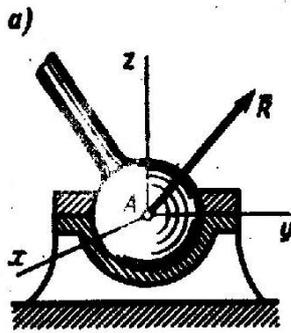


При решении задач будем реакцию R_B изображать ее составляющими X_B и Y_B , по направлениям координатных осей. Если мы, решив задачу, найдем X_B и Y_B , то тем самым будет определена и реакция R_B по модулю

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}.$$

4. *Подвижная шарнирная опора* (см. рисунок выше). Реакция N_A такой опоры направлена по нормали к поверхности, на которую опираются катки подвижной опоры.

5. *Сферический шарнир и подпятник.* Тела, соединенные сферическим шарниром, могут как угодно поворачиваться одно относительно другого вокруг центра шарнира. Примером служит



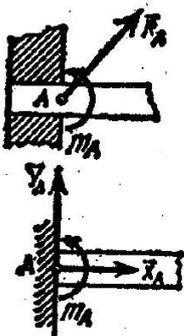
прикрепление фотоаппарата к штативу с помощью шаровой пяты. Если тело прикреплено с помощью такого шарнира к неподвижной опоре (а), то точка А тела, совпадаю-

а б

щая с центром шарнира, не может при этом совершить никакого перемещения в пространстве.

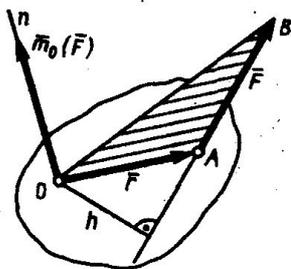
Следовательно, реакция R сферического шарнира может иметь любое направление в пространстве. Для нее заранее неизвестны ни ее модуль R , ни углы с осями $Axuz$.

Произвольное направление в пространстве может иметь и реакция R подпятника (подшипника с упором) (б).



6. Жесткая заделка. Рассматривая заделанный конец балки и стену как одно целое, жесткую заделку изображают так, как показано на рисунке. В этом случае действует неизвестная реакция R_A , приложенная в центре, и момент m_A . Силу R_A можно изобразить ее составляющими X_A и Y_A . Таким образом, для нахождения реакции жесткой заделки надо определить три неизвестные величины X_A , Y_A , m_A .

Сила, приложенная к телу в какой-нибудь одной его точке, называется *сосредоточенной*. Силы, действующие на какую-либо часть поверхности тела, называются *распределенными*. При статических расчетах эту систему сил заменяют равнодействующей $Q = aq$, равной площади прямоугольника, приложенной в центре тяжести прямоугольника.



При действии силы на тело, имеющее неподвижную точку (центр), эффект действия силы характеризуется ее моментом.

Момент силы относительно центра $m_0(\bar{F})$ – величина, равная произведению модуля силы на длину плеча: $m_0(\bar{F}) = \pm Fh$, где

F – модуль силы; h – плечо силы F относительно центра O , кратчайшее расстояние между линией действия силы \vec{F} и центром O .

Условно принято считать, что вращение тела под действием силы по часовой стрелке – положительно.

Основные виды нагрузок, виды связей и реакций представлены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Виды нагрузок

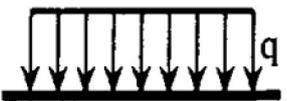
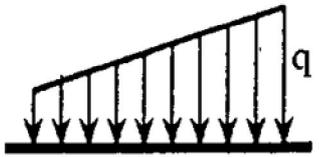
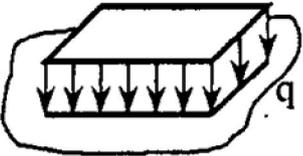
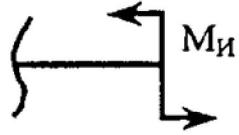
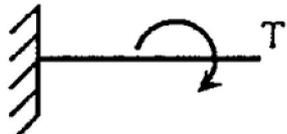
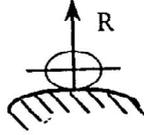
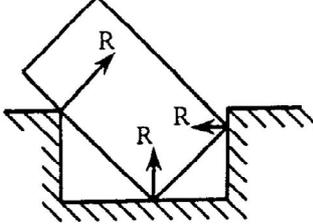
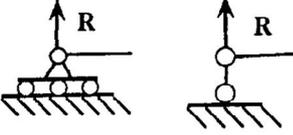
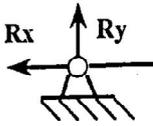
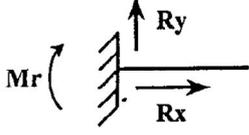
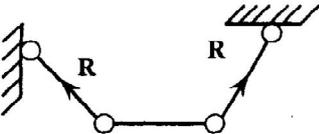
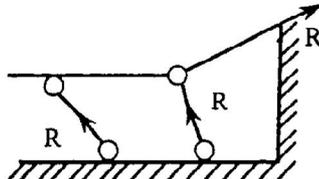
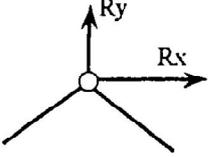
Нагрузка	Единицы измерения	Условное обозначение нагрузки
Сосредоточенная сила	Н	
Равномерно распределенная нагрузка по длине	Н/м	
Неравномерно распределенная нагрузка по длине	Н/м	
Нагрузка, распределенная по площади	Н/м ²	
Момент силы или пары сил	Н·м	
Вращающий момент	Н·м	

Таблица 2

Виды связей

Наименование видов связей	Реакции	Направление
1	2	3
Касание двух поверхностей		По нормали к касательной в точке касания
Касание ребра и поверхности		По нормали к поверхностям в точке касания
Шарнирно-подвижная опора		Перпендикулярно опорной поверхности (одна реакция)
Шарнирно-неподвижная опора		Две взаимно перпендикулярные реакции
Жесткая заделка		Две взаимно перпендикулярные реакции и момент
Нерастяжимая нить		Вдоль нити
Жесткий невесомый стержень		Вдоль оси стержня
Шарнирное соединение двух тел		Две взаимно перпендикулярные реакции

РАВНОВЕСИЕ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и ее главный момент относительно любого центра были равны нулю, т. е. чтобы выполнялись условия $\bar{R} = 0$, $\bar{M}_O = 0$, где O — любой центр.

Аналитические условия равновесия плоской системы сил

1. Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из двух координатных осей и сумма их моментов относительно любого центра, лежащего в плоскости действия сил, были равны нулю

$$\sum F_{xi} = 0, \quad \sum F_{yi} = 0, \quad \sum m_O(F_i) = 0.$$

2. Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно каких-нибудь двух центров A и B и сумма их проекций на одну из осей, не перпендикулярную прямой AB , были равны нулю

$$\sum m_A(F_i) = 0, \quad \sum m_B(F_i) = 0, \quad \sum F_{xi} = 0.$$

3. Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех этих сил относительно любых трех центров A , B и C , не лежащих на одной прямой, были равны нулю

$$\sum m_A(F_i) = 0, \quad \sum m_B(F_i) = 0, \quad \sum m_C(F_i) = 0.$$

Расчетно-графическая работа № 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР В БАЛКАХ

Номер варианта задания выдается в виде двузначного числа. По нему выбираются номер строки исходных данных (табл. 3) и номера трех схем балок (табл. 4). Работы, выполненные не по варианту, преподавателем не рецензируются.

Для заданных балок (табл. 4) согласно номерам задач по варианту при числовых значениях размеров и нагрузок по строке табл. 3 требуется:

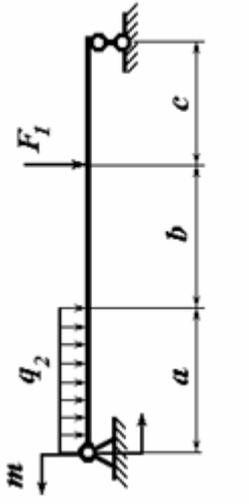
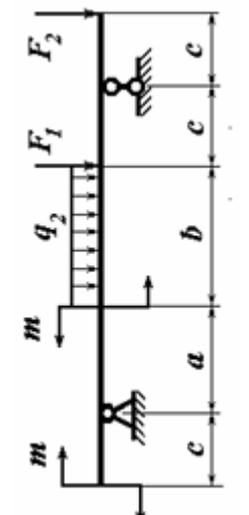
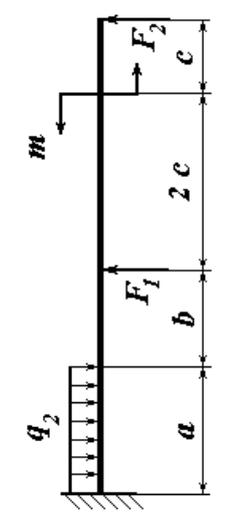
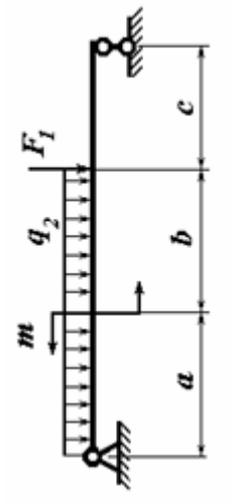
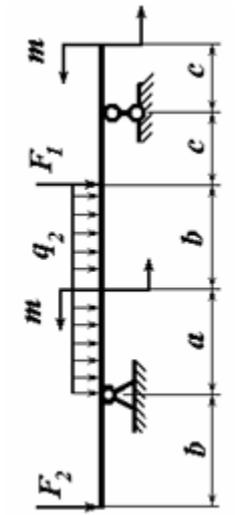
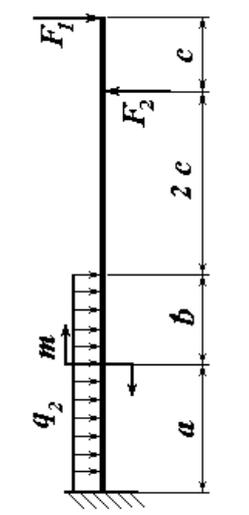
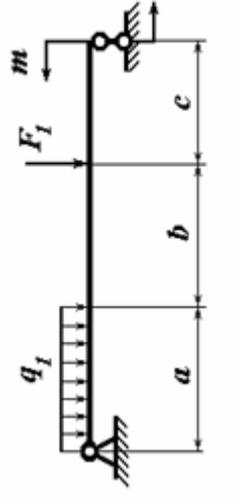
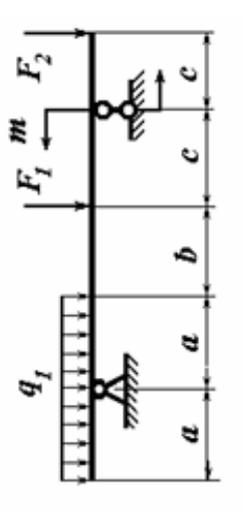
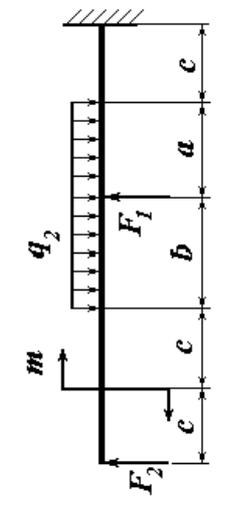
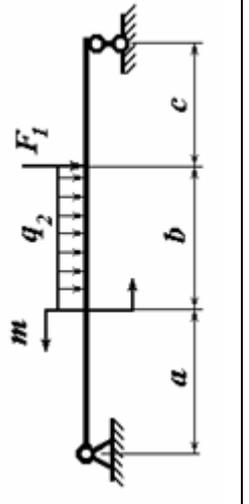
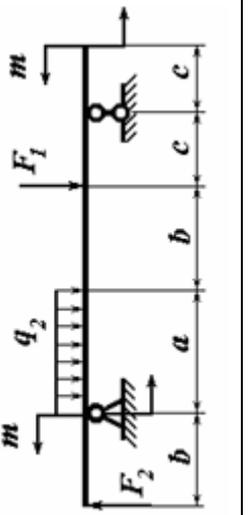
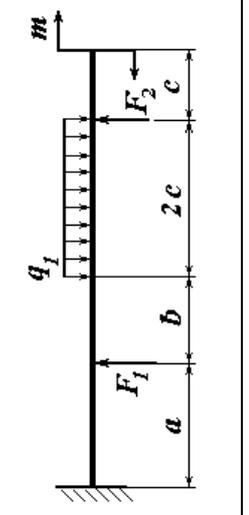
- 1) записать уравнения равновесия для определения опорных реакций в общем виде;
- 2) определить опорные реакции, подставив в уравнения соответствующие числовые значения;
- 3) выполнить проверку найденных опорных реакций.

Таблица 3

Исходные данные к РГР № 1

№	a , м	b , м	c , м	F_1 , кН	F_2 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	m , кНм
1	3	2	1	25	15	6	2	40
2	2	1,5	2	30	25	4	3	45
3	3,5	1	3	20	35	5	4	50
4	2,5	2,5	2,5	35	30	3	5	55
5	2	2	1,5	15	20	2	6	60
6	2,5	1,5	3,5	10	15	4	2	35
7	3,5	2,5	3	15	25	5	3	30
8	2,5	2	2,5	20	35	6	4	45
9	2	1,5	2	30	20	3	5	55
10	3	1	1,5	15	10	2	6	35
11	3,5	2	1	25	30	6	3	40
12	3	2	1	25	15	6	2	40
13	2	1	2	30	25	4	3	45
14	3,5	2,5	3	20	35	5	4	50
15	2,5	2	2	35	30	3	2	55
16	2	1,5	3	15	15	2	3	40
17	2,5	2,5	2,5	10	25	4	4	45
18	3,5	2	1,5	15	35	5	5	50
19	2,5	1,5	3,5	20	30	6	6	55
20	2	1	3	30	20	3	2	60
21	3	2	2,5	15	15	2	3	35
22	3,5	1,5	1	25	25	6	4	30
23	2,5	1	1,5	25	35	4	3	45
24	2,5	2,5	1,5	35	20	5	2	55
25	2	1	3	10	35	4	3	35
26	3	2	2,5	15	30	6	2	40
27	2,5	1,5	2	20	25	2	4	45
28	3,5	1,5	1,5	25	20	3	5	50
29	3	2	1	30	15	5	6	55
30	2,5	2,5	1,5	25	10	6	2	60
31	3	2,5	1	25	40	5	2	50
32	2	1,5	2	40	25	4	3	55
33	3	2	1	50	30	3	6	50
34	3	2,5	1,5	45	25	5	4	40
35	2,5	3	1	60	30	3	6	60
36	3	2	1	50	40	2	4	35

Таблица 4

№ вар.	Двухопорная балка	Двухопорная балка с консолями	Консольная балка
1			
2			
3			
4			

5				
6				
7				
8				

9			
10			
11			
12			

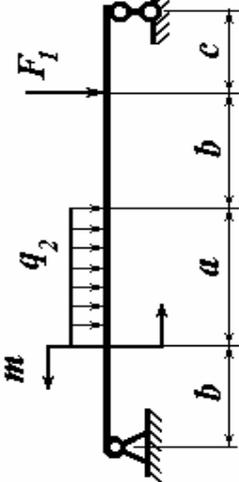
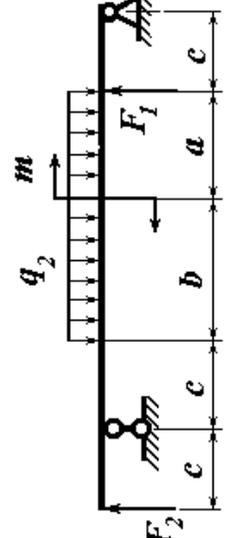
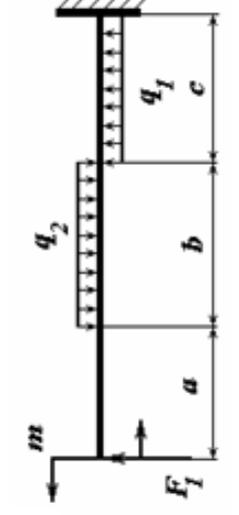
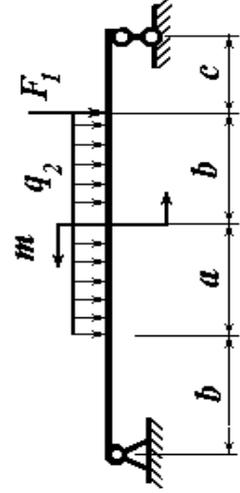
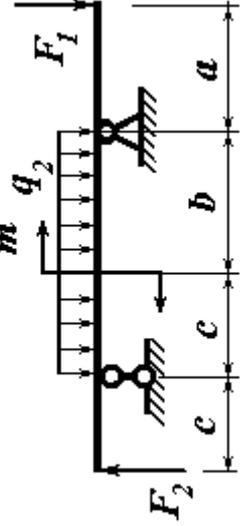
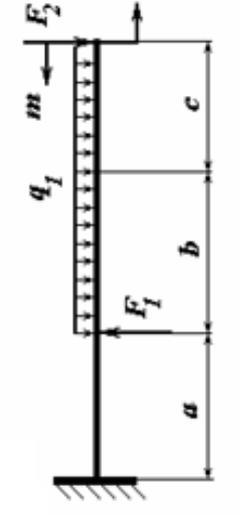
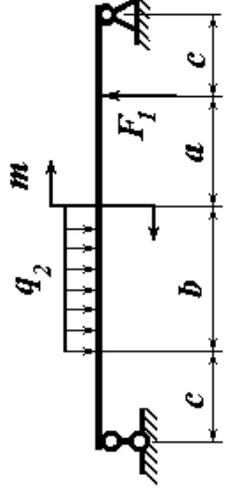
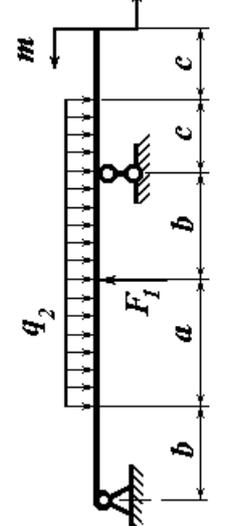
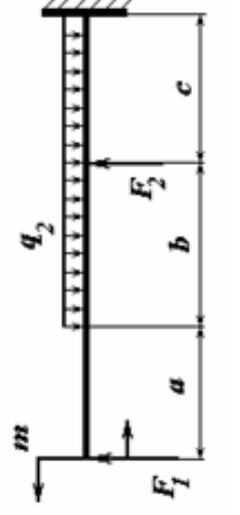
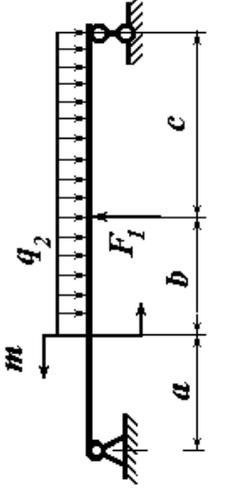
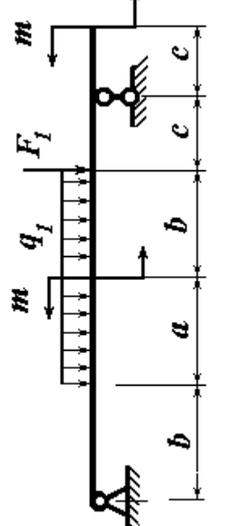
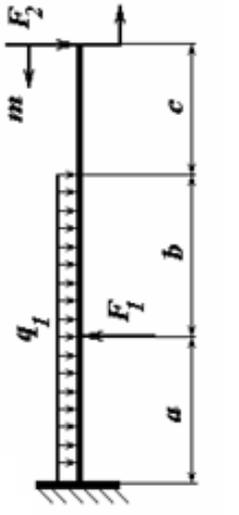
13			
14			
15			
16			

17			
18			
19			
20			

		<p>21</p>
		<p>22</p>
		<p>23</p>
		<p>24</p>

25			
26			
27			
28			

29	
30	
31	
32	

33			
34			
35			
36			

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 1

Пример 1. Для заданной двухопорной балки (рис. 4) требуется записать уравнения равновесия, определить опорные реакции и сделать проверку.

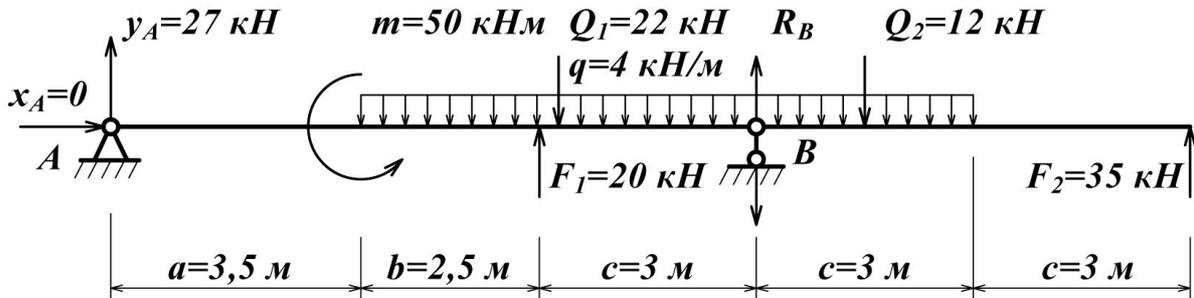


Рис. 4. Заданная двухопорная балка

В точке А (неподвижный шарнир) возникает две реакции – вертикальная Y_A и горизонтальная X_A . Горизонтальная реакция X_A равна 0, так как в балке больше нет горизонтальных сил. В точке В (подвижный шарнир) возникает одна вертикальная реакция R_B .

1. Найдем вертикальную реакцию R_B . Сумма моментов всех сил относительно точки А равна 0:

$$\sum M_A(F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Предположим, что реакция R_B направлена вверх. Заменяем равномерно распределенную нагрузку q сосредоточенной силой Q , равной $Q = q(b + c + c) = 4(2,5 + 3 + 3) = 34$ кН.

$$-M - F_1(a + b) + Q\left(a + \frac{b + 2c}{2}\right) - R_B(a + b + c) - F_2(a + b + 3c) = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем R_B :

$$\begin{aligned} & -50 - 20(3,5 + 2,5) + 34\left(3,5 + 8,5/2\right) - R_B(3,5 + 2,5 + 3) + \\ & + 12(3,5 + 2,5 + 3/2) - 3,5 \cdot 15 = 0; \\ & -431,5 - 9R_B = 0; \\ & R_B = -48 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Так как значение реакции получилось отрицательным, то направление реакции нужно изменить на противоположное.

2. Найдем Y_A . Сумма моментов всех сил относительно точки В равна 0:

$$\Sigma M_B(F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде:

$$-F_2 2c + Q_2 c/2 - Q_1 \left(\frac{b+c}{2}\right) + F_1 c - M + Y_A (a + b + c) = 0.$$

Здесь равномерно распределенная нагрузка q делится шарниром В на две части, поэтому каждая из частей создает момент в противоположные стороны. Заменим каждую из частей сосредоточенными силами Q_1 и Q_2 . Также можно выделить и единую Q .

Подставим числовые данные в уравнение, найдем Y_A :

$$-35 \cdot 6 + 12 \cdot 1,5 - 22 \cdot 5,5/2 + 20 \cdot 3 - 50 + 9 Y_A = 0;$$

$$-210 + 18 - 60,5 + 60 - 50 = -9 Y_A;$$

$$Y_A = 27 \text{ кН}.$$

3. Сделаем проверку. Сумма проекций всех сил на ось y равна 0:

$$\Sigma y_i = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде:

$$Y_A + F_1 - Q_1 + Q_2 + R_B + F_2 = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение:

$$27 + 20 - 34 - 48 + 35 = 0;$$

$0 = 0$, следовательно, опорные реакции определены верно.

Пример 2. Для заданной консольной балки (рис. 5) требуется записать уравнения равновесия, определить опорные реакции и сделать проверку вычислений.

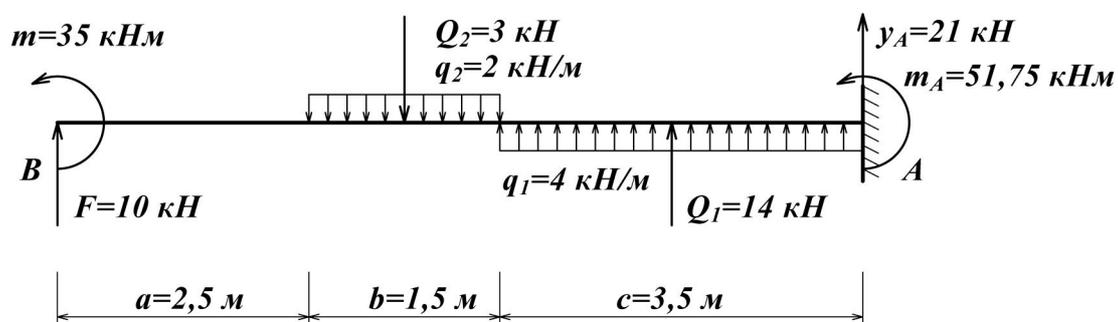


Рис. 5. Заданная консольная балка

В жесткой заделке возникает три реакции – вертикальная, горизонтальная и реактивный момент. Горизонтальная реакция H_A равна 0, так как в балке больше нет горизонтальных сил.

1. Найдем M_A . Сумма моментов всех сил относительно точки А равна 0:

$$\Sigma M_A(F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Направление момента первоначально примем против часовой стрелки.

$$-M_A + q_1 c c/2 - q_2 b (c + b/2) + F (c + b + a) - M = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем: $-M_A + 4 \cdot 3,5 \cdot 3,5/2 - 2 \cdot 1,5 \cdot (3,5 + 1,5/2) + 10 (3,5 + 1,5 + 2,5) - 35 = 0$;
 $-M_A + 24,5 - 12,75 + 75 - 35 = 0$;

$$M_A = 51,75 \text{ кНм.}$$

2. Найдем вертикальную реакцию Y_A . Сумма моментов всех сил относительно произвольно взятой точки В равна 0 (с учетом найденного момента M_A):

$$\Sigma M_B(F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Предположим, что реакция Y_A направлена вверх.

$$M - Q_2 (a + b/2) + Q_1 (a + b + c/2) + M_A + Y_A (a + b + c) = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем Y_A :

$$35 - 9,75 + 80,5 + 51,75 + 7,5 Y_A = 0;$$

$$7,5 Y_A = -157,5;$$

$$Y_A = -21 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции получилось отрицательным, то направление реакции нужно изменить на противоположное.

3. Сделаем проверку. Сумма проекций всех сил на ось у равна 0:

$$\Sigma y_i = 0.$$

Запишем уравнение в общем виде:

$$Y_A + Q_1 - Q_2 + F = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение:

$$-21 + 14 - 3 + 10 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Расчетно-графическая работа № 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР В РАМАХ

Номер варианта задания выдается в виде двузначного числа. По нему выбираются номер двух задач (рам) и номер строки исходных данных. Работы, выполненные не по варианту, преподавателем не рецензируются.

Для заданных рам (табл. 6) при числовых значениях размеров и нагрузок по строке табл. 5 требуется:

- 1) записать уравнения равновесия для определения опорных реакций;
- 2) определить опорные реакции;
- 3) выполнить проверку найденных опорных реакций.

Т а б л и ц а 5

Исходные данные к РГР № 2

№ вар.	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	M , кНм
1	15	6	2	40
2	25	4	3	45
3	35	5	4	50
4	30	3	5	55
5	20	2	6	60
6	15	4	2	35
7	25	5	3	30
8	35	6	4	45
9	20	3	5	55
10	10	2	6	35
11	30	6	3	40
12	15	6	2	40
13	25	4	3	45
14	35	5	4	50
15	30	3	2	55
16	15	2	3	40
17	25	4	4	45
18	35	5	5	50
19	30	6	6	55
20	20	3	2	60
21	15	2	3	35
22	25	6	4	30
23	35	4	3	45
24	20	5	2	55
25	35	4	3	35
26	30	6	2	40
27	25	2	4	45
28	20	3	5	50
29	15	5	6	55
30	10	6	2	60
31	20	10	3	35
32	25	8	2	25
33	35	7	4	45
34	15	8	5	55
35	10	6	6	65
36	20	8	3	60

Задания к РГР № 2

1		
2		
3		
4		

5		
6		
7		
8		

9		
10		
11		
12		

13		
14		
15		
16		

17		
18		
19		
20		

21		
22		
23		
24		

25		
26		
27		
28		

29		
30		
31		
32		

33		
34		
35		
36		

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 2

Для заданной двухопорной рамы (рис. 6) требуется записать уравнения равновесия, определить опорные реакции и сделать проверку правильности вычислений.

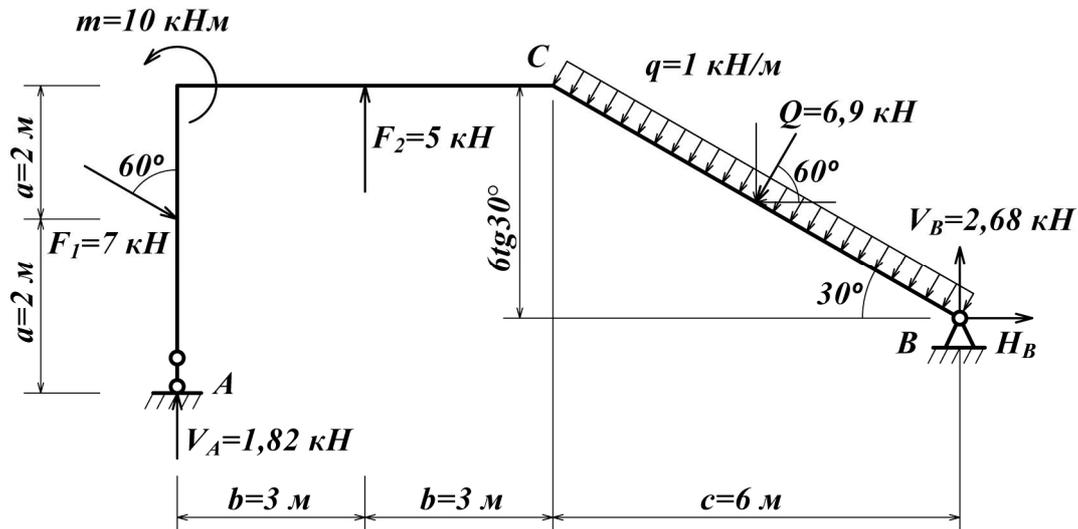


Рис. 6. Заданная рама

Найдем Q : $Q = 6/\cos 30^\circ \cdot 1 = 6,9 \text{ кН/м}$.

В точке А (подвижный шарнир) возникает одна вертикальная реакция V_A .

В точке В (неподвижный шарнир) возникает две реакции – вертикальная V_B и горизонтальная H_B .

1. Найдем V_A . Сумма моментов всех сил относительно точки В равна 0:

$$\Sigma M_B (F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Предположим, что реакция V_A направлена вверх.

$$V_A (b + b + c) - F_1 \cos 60^\circ (b + b + c) + F_1 \sin 60^\circ (6 \operatorname{tg} 30^\circ - a) - M + F_2 (b + c) - Q \cdot 6/2 \cdot \cos 30^\circ = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем V_A :

$$V_A (3 + 3 + 6) - 7 \cdot 0,5 (3 + 3 + 6) + 7 \cdot 0,866 (6 \cdot 0,577 - 2) - 10 + 5 \cdot 9 - 6,9 \cdot 6/1,732 = 0;$$

$$12 V_A = 22,04;$$

$$V_A = 1,84 \text{ кН}.$$

2. Найдем V_B . Сумма проекций всех сил на ось у равна 0:

$$\Sigma y_i = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Предположим, что реакция V_B направлена вверх.

$$V_A + F_2 - F_1 \cos 60^\circ - Q \sin 60^\circ + V_B = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем V_B

$$1,84 + 5 - 7 \cdot 0,5 - 6,9 \cdot 0,866 + V_B = 0;$$

$$V_B = 2,64 \text{ кН.}$$

3. Найдем H_B . Сумма проекций всех сил на ось x равна 0:

$$\sum x_i = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Предположим, что реакция H_B направлена вправо.

$$F_1 \sin 60^\circ - Q \cos 60^\circ + H_B = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение, найдем H_B :

$$7 \cdot 0,866 - 6,9 \cdot 0,5 + H_B = 0;$$

$$H_B = -2,61 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции получилось отрицательным, то направление реакции нужно изменить на противоположное.

4. Сделаем проверку. Сумма моментов всех сил относительно точки C равна 0:

$$\sum M_C(F_i) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде:

$$V_A \cdot 2b - F_1 \cos 60^\circ \cdot 2b - F_1 \sin 60^\circ \cdot 2 - M + F_2 b + Q \cdot 6/2 \cos 30^\circ - V_B c - H_B \cdot 6 \operatorname{tg} 30^\circ = 0.$$

Подставим числовые данные в уравнение:

$$1,84 \cdot 6 - 7 \cdot 0,5 \cdot 6 - 7 \cdot 0,866 \cdot 2 - 10 + 5 \cdot 3 + 6,9 \cdot 6/1,732 - 2,64 \cdot 6 + 2,61 \cdot 6 \cdot 0,577 = 0;$$

$$11,04 - 21 - 12,12 - 10 + 15 + 23,9 - 15,84 + 9,04 = 0;$$

$$0,02 \approx 0.$$

Расчетно-графическая работа № 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Номер варианта задания выдается в виде двузначного числа. По нему выбираются номер строки исходных данных (табл. 7) и номер схемы составной балки и рамы (табл. 8, 9). Работы, выполненные не по варианту, преподавателем не рецензируются.

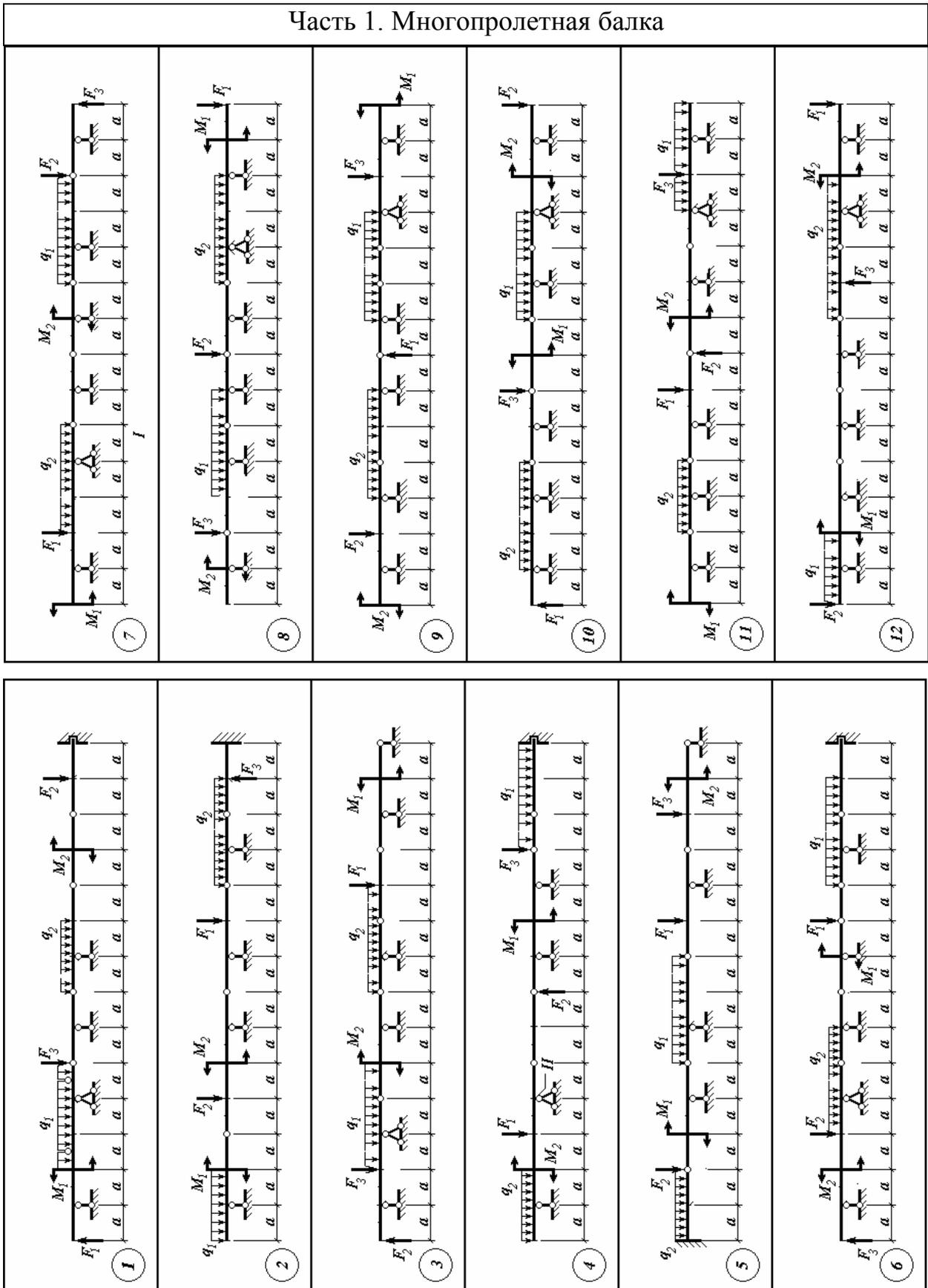
Конструкция состоит из частей. Для заданных балок и рам при числовых значениях размеров и нагрузок по строке табл. 7 требуется:

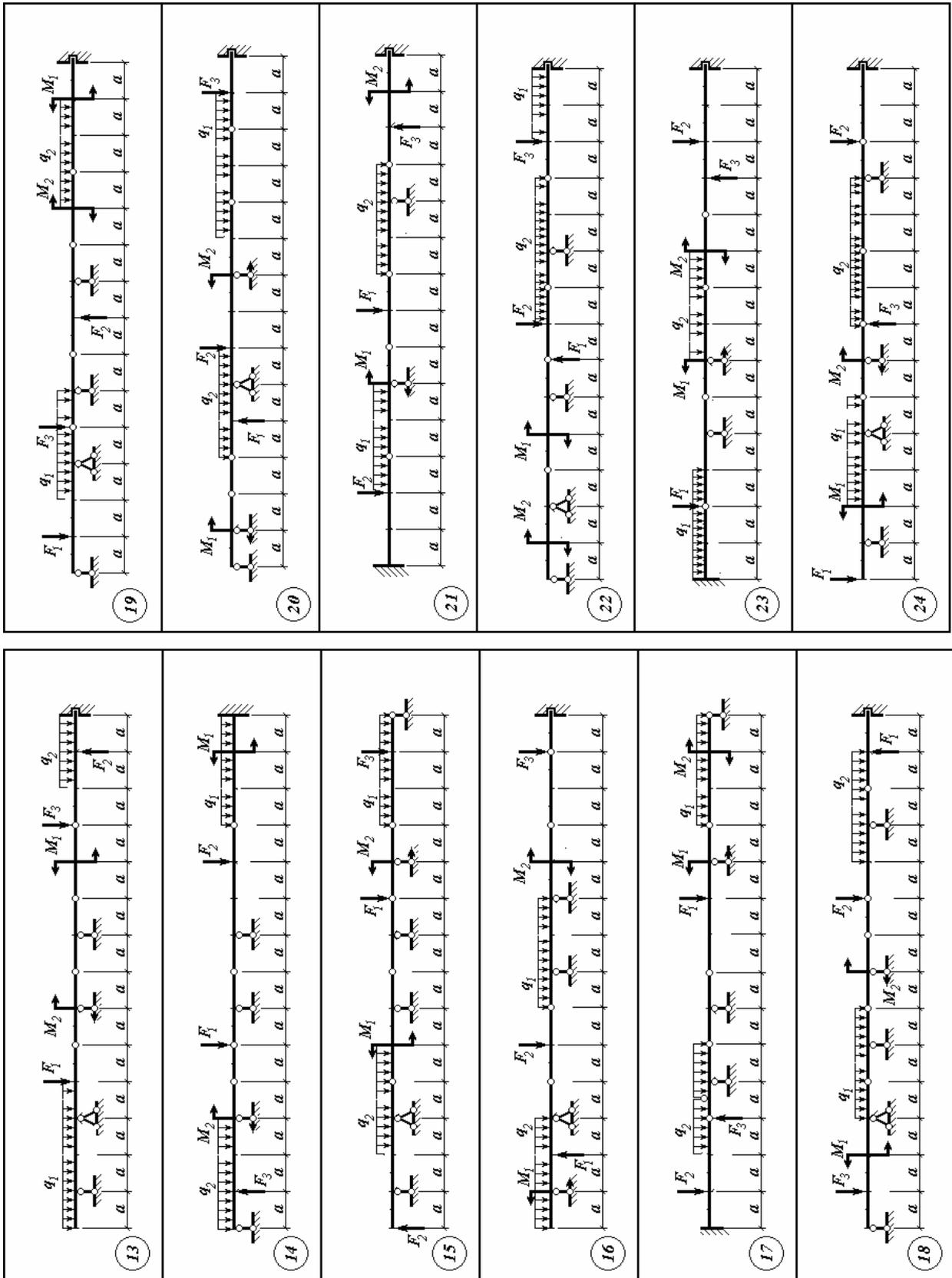
- 1) записать уравнения равновесия для определения опорных реакций для каждой части конструкции;
- 2) определить опорные реакции;
- 3) выполнить проверку найденных опорных реакций;
- 4) определить давления в промежуточных шарнирах.

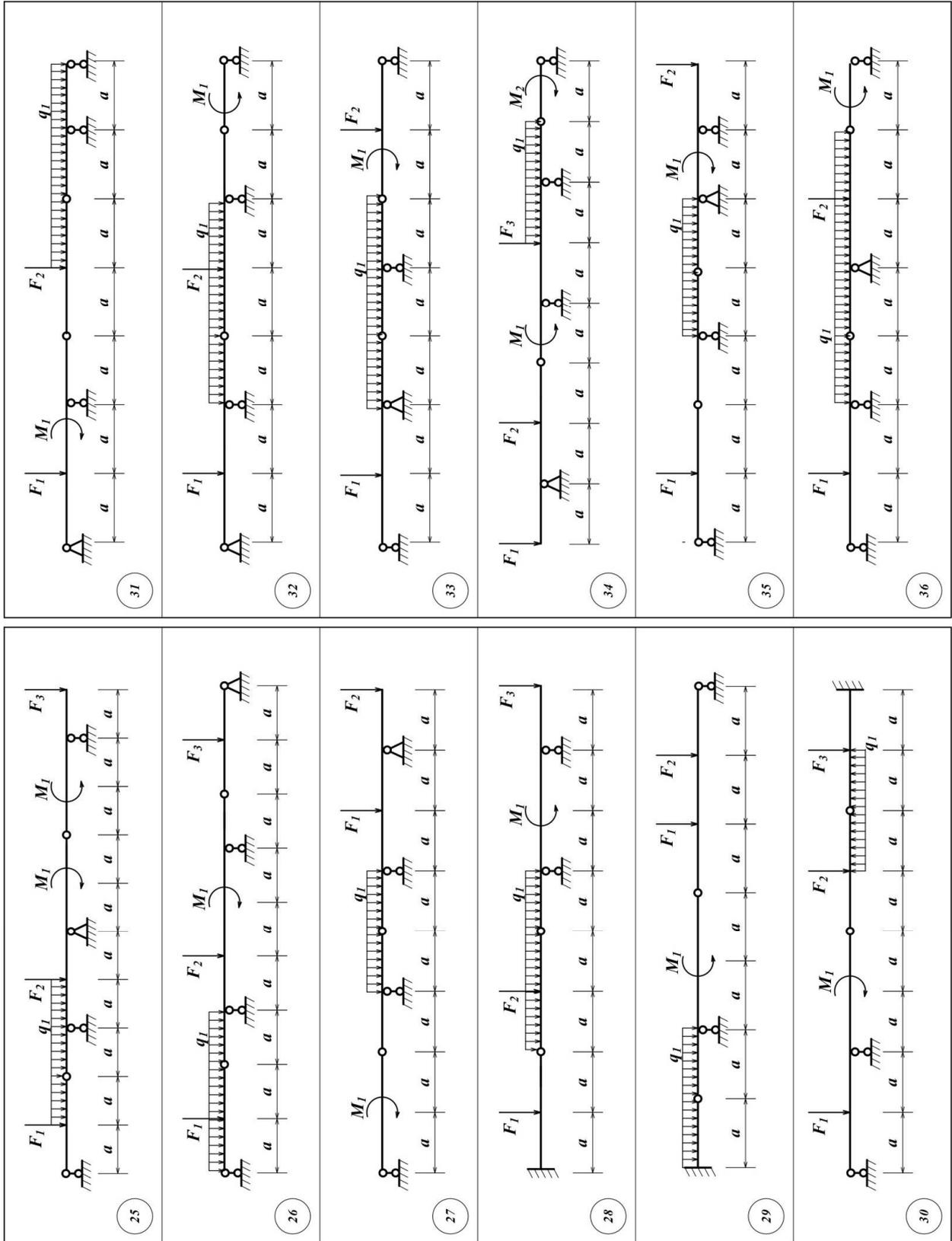
Исходные данные к РГР № 3

№ вар.	a (м)	M_1, M (кНм)	M_2 (кНм)	F_1, P_1 (кН)	F_2, P_2 (кН)	F_3, P_3 (кН)	q_1, q (кН/м)	q_2 (кН/м)
1	1,1	10	20	30	10	40	5	10
2	2,1	20	40	15	30	10	8	6
3	2,0	15	10	10	20	30	7	5
4	1,2	25	20	20	20	25	8	6
5	1,9	30	30	15	20	20	9	4
6	1,4	15	10	20	35	20	9	3
7	1,5	20	40	20	30	25	10	6
8	1,3	25	20	20	15	30	2	10
9	1,6	10	30	15	20	30	2	4
10	1,8	30	20	40	15	10	4	8
11	2,2	15	10	15	40	10	6	7
12	1,7	20	40	10	15	40	7	8
13	2,5	25	30	15	10	40	4	5
14	3,0	30	20	15	20	25	7	6
15	2,4	25	10	20	15	25	8	6
16	2,7	15	10	20	25	30	3	4
17	2,8	10	20	25	10	35	8	3
18	1,0	30	30	35	20	10	10	2
19	2,6	15	40	40	25	10	6	10
20	2,9	30	40	25	15	30	2	8
21	2,5	20	30	15	25	35	4	9
22	1,6	25	20	35	40	20	6	4
23	1,1	20	10	25	15	40	5	6
24	2,4	15	20	15	35	35	5	6
25	2,6	15	40	40	25	30	6	4
26	2,9	30	40	25	30	40	10	5
27	2,7	15	10	20	50	30	3	10
28	2,8	10	20	25	20	30	2	8
29	2,0	15	10	10	60	35	6	3
30	1,2	25	20	20	20	30	10	6
31	1,1	10	20	30	10	30	5	4
32	2,1	20	40	20	30	10	3	6
33	2,0	15	10	10	40	30	7	7
34	1,2	25	20	20	20	40	8	5
35	1,9	30	30	50	20	20	6	4
36	1,4	15	10	20	30	20	8	3

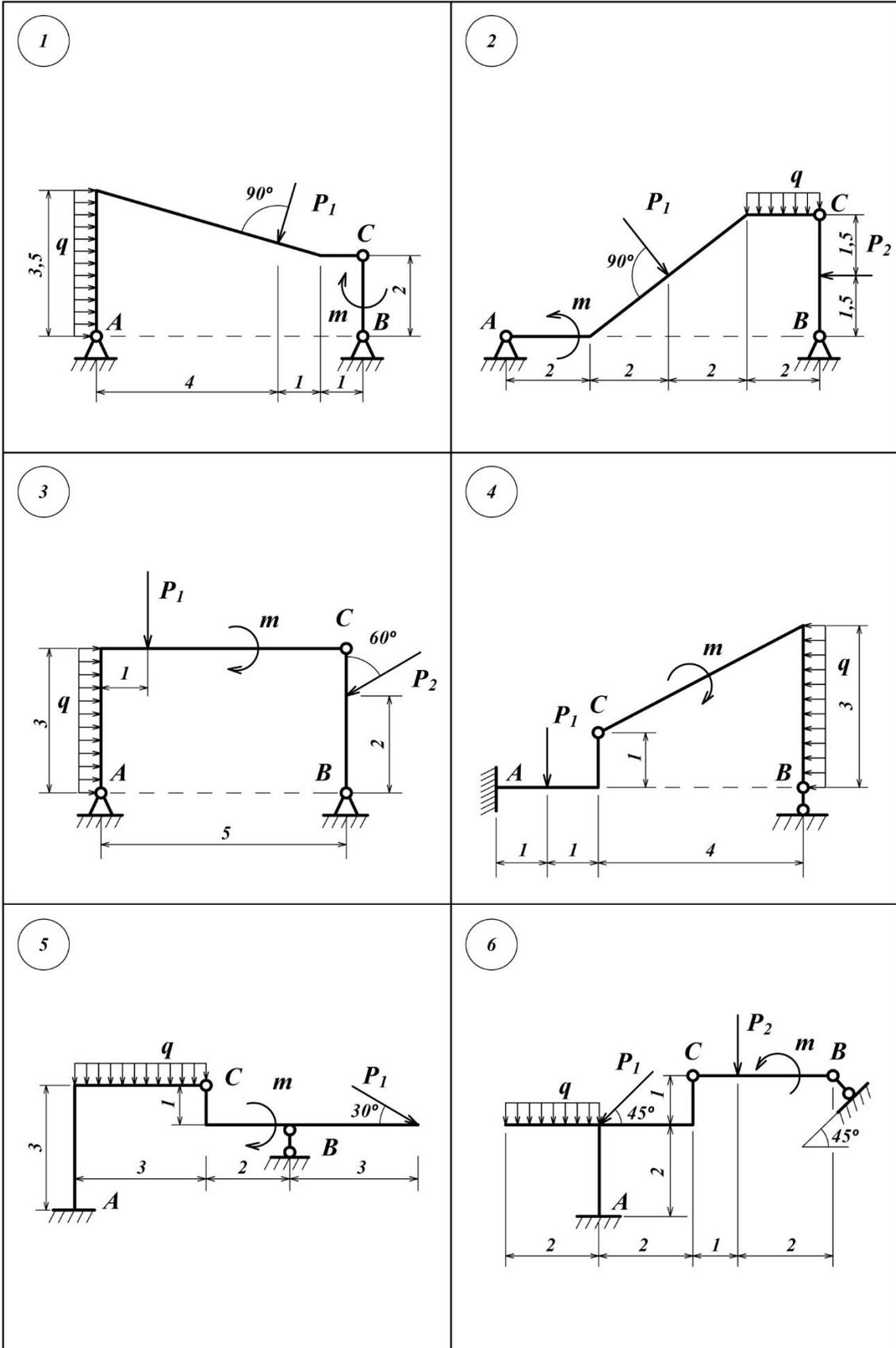
Часть 1. Многопролетная балка

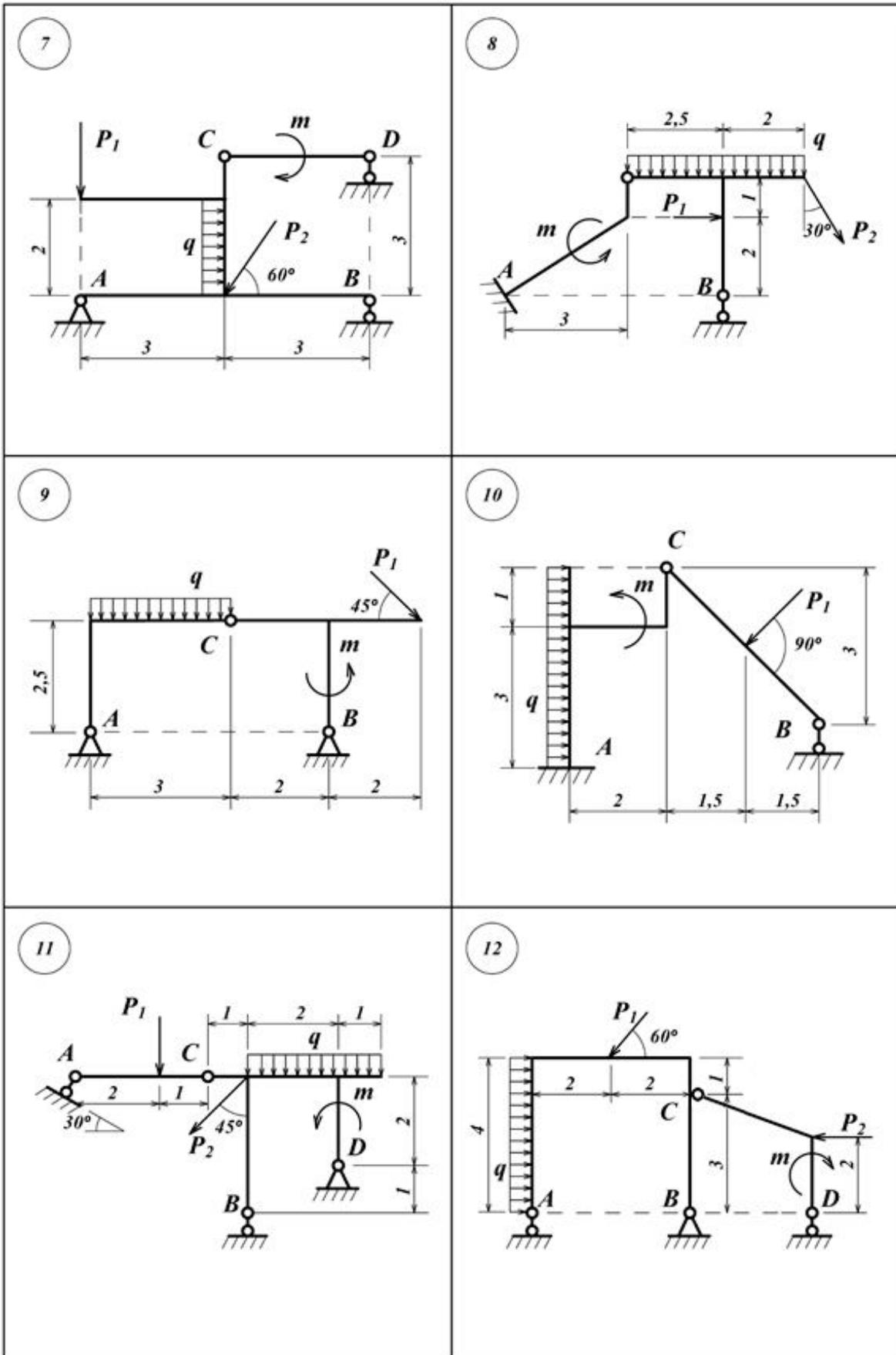


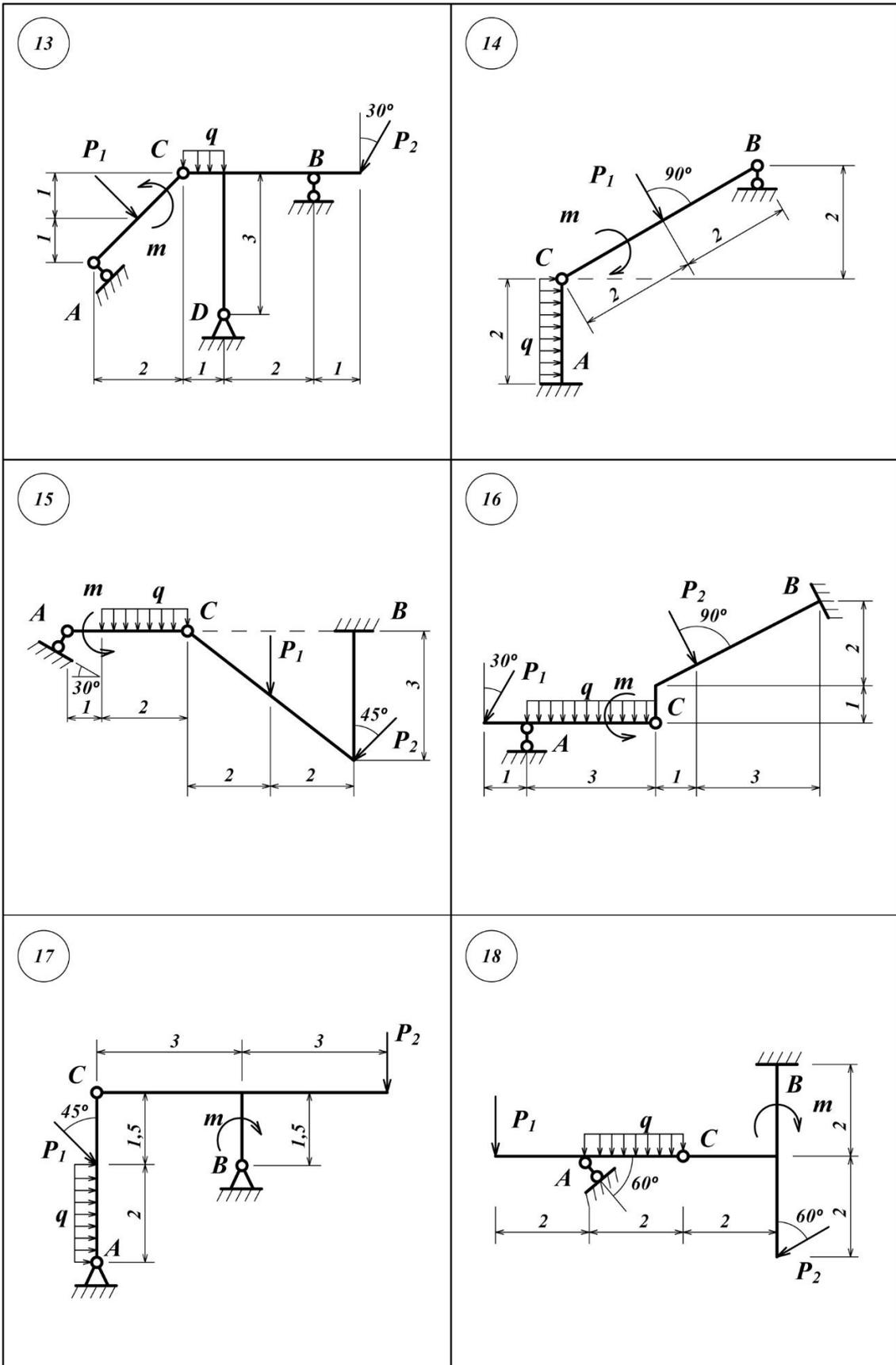




Часть 2. Составная рама

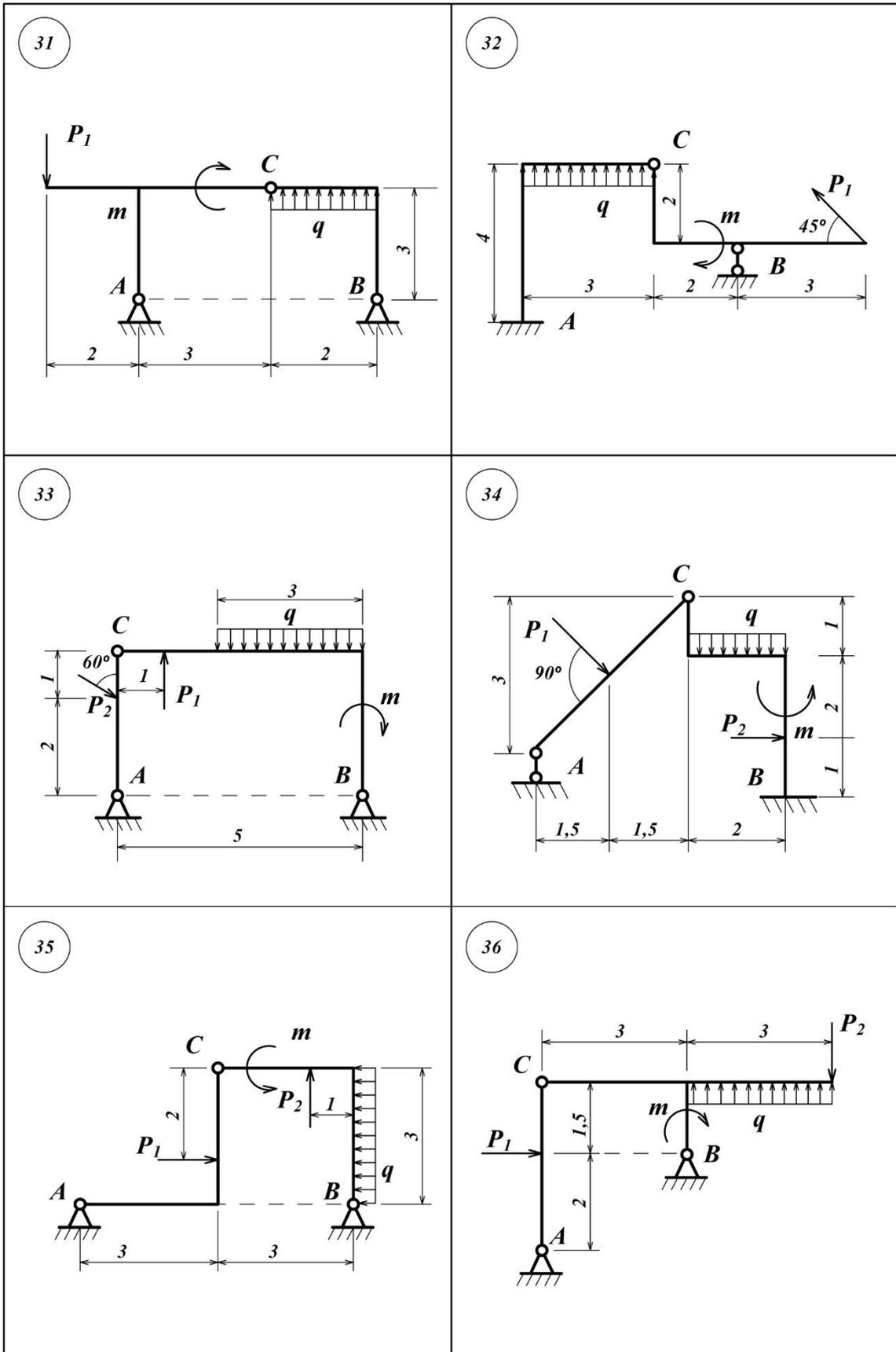






<p>19</p>	<p>20</p>
<p>21</p>	<p>22</p>
<p>23</p>	<p>24</p>

<p>25</p>	<p>26</p>
<p>27</p>	<p>28</p>
<p>29</p>	<p>30</p>



ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 3

Пример 1. Определим реакции опор и давления в промежуточных шарнирах многопролетной балки (рис. 7, а). Чтобы рассчитать такую балку, необходимо построить этажную схему взаимодействия элементов, разрезав балку по местам расположения шарниров (рис. 7, б) на простые балки. Причем очень важно при этом следить, чтобы каждая простая балка имела две опоры (не больше). Расставив на этажной схеме порядок расчета (сверху вниз), пронумеровав каждую цифрами, можно считать, что шарнирная балка подготовлена к расчету.

Далее начинают расчет по этажной схеме с верхней балки, рассматривая ее отдельно. Определяют для нее реакции в опорах. Затем рассматривают балки 2 и 3 (рис. 7, б).

При этом необходимо помнить, что нагрузки с вышележащей балки передаются на нижележащую через опорные реакции вышележащей балки, численно равные, но противоположно направленные.

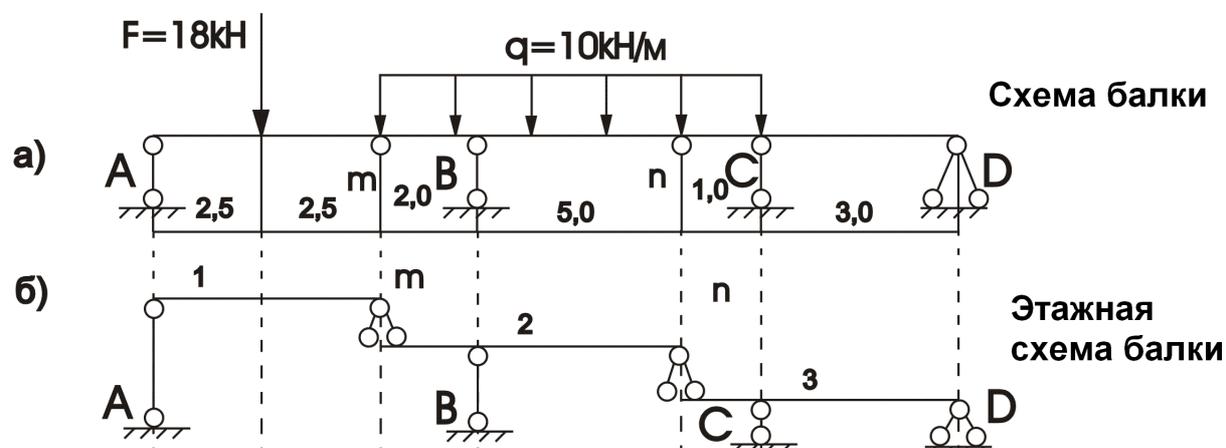
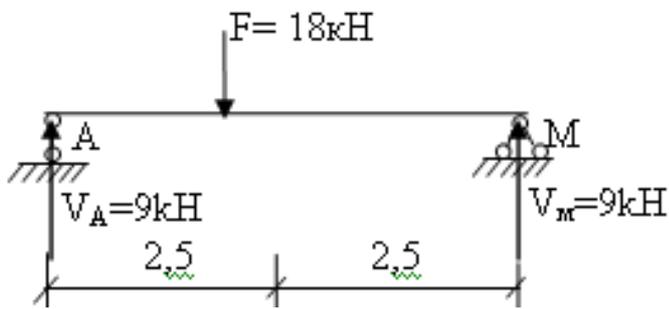


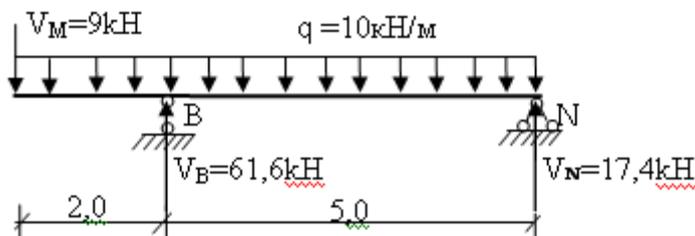
Рис. 7. Пример решения многопролетной балки

Балка 1



Так как нагрузка симметрична, то $V_A = V_M = F/2 = 18/2 = 9$ кН.

Балка 2



С первой балки переносим реакцию $V_M = 9$ кН – с обратным направлением.

$$\sum M_B = 0.$$

$$-V_M \cdot 2 + q \cdot 7 \cdot 1,5 - V_N \cdot 5 = 0;$$

$$V_N = [-9 \cdot 2 + 10 \cdot 7 \cdot 1,5] / 5 = 17,4 \text{ кН (знак } V_M \text{ поменять).}$$

$$\sum M_N = 0.$$

$$-V_M \cdot 7 - q \cdot 7 \cdot 3,5 + V_B \cdot 5 = 0;$$

$$V_B = [9 \cdot 7 + 10 \cdot 7 \cdot 3,5] / 5 = 61,6 \text{ кН.}$$

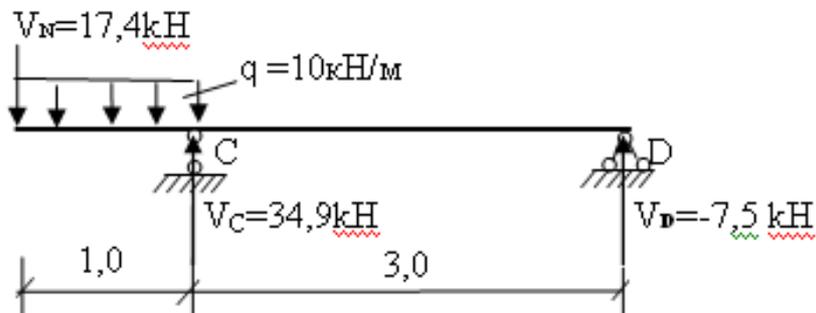
Проверка: $\sum Y = 0.$

$$-V_M + V_B - q \cdot 7 + V_N = 0;$$

$$-9 + 61,6 - 70 + 17,4 = 0.$$

Балка 3

С балки 2 перенесем реакцию V_N с противоположным направлением.



$$\sum M_C = 0.$$

$$-V_N \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 0.5 - V_D \cdot 3 = 0;$$

$$V_D = [-17.4 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 0.5] / 3 = -7.5 \text{ kN}.$$

$$\sum M_D = 0.$$

$$-V_N \cdot 4 - q \cdot 1 \cdot 3.5 + V_C \cdot 3 = 0;$$

$$V_C = [17.4 \cdot 4 + 10 \cdot 1 \cdot 3.5] / 3 = 34.9 \text{ kN}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0.$$

$$-V_N - q \cdot 1 + V_C + V_D = 0;$$

$$-17.4 - 10 \cdot 1 + 34.9 + (-7.5) = 0.$$

Найденные реакции в промежуточных шарнирах и есть опорные давления составных частей балок.

Пример 2. Определим реакции опор и давления в промежуточном шарнире распорной рамы (рис. 8).

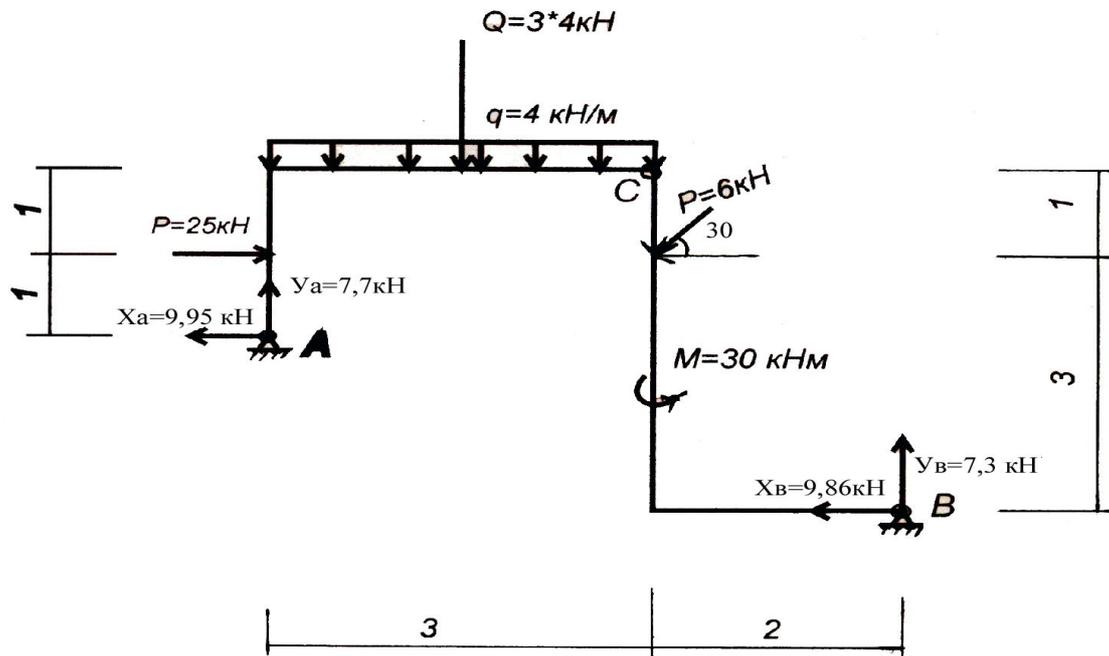


Рис. 8. Заданная рама

1. Первая часть задачи решается при помощи системы двух уравнений с двумя неизвестными, так как в любом случае в уравнение реакций войдет не менее двух неизвестных, а именно:

$$\sum m_A(F_i) = 0;$$

$$P_1 \cdot 1 + Q \cdot 1,5 + P_2 \sin 30^\circ \cdot 3 - P_2 \cos 30^\circ \cdot 1 - M + X_B \cdot 2 - Y_B \cdot 5 = 0;$$

$$25 + 18 + 9 - 5,22 - 30 + 2X_B - 5Y_B = 0;$$

$$16,87 + 2X_B - 5Y_B = 0.$$

$$\sum m_C^{mp}(F_i) = 0;$$

$$P_2 \cos 30^\circ \cdot 1 - M + X_B \cdot 4 - Y_B \cdot 2 = 0;$$

$$5,22 - 30 + 4X_B - 2Y_B = 0;$$

$$24,78 - 4X_B + 2Y_B = 0.$$

Составим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 16,87 + 2X_B - 5Y_B = 0; \\ 24,78 - 4X_B + 2Y_B = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 33,56 + 4X_B - 10Y_B = 0; \\ 24,78 - 4X_B + 2Y_B = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16,78 + 2X_B - 5Y_B = 0; \\ 8Y_B = 58,34; \end{cases} \quad \begin{cases} Y_B = 7,3; \\ 2X_B = 19,72; \end{cases} \quad \begin{cases} Y_B = 7,3 \text{ кН}; \\ X_B = 9,86 \text{ кН}. \end{cases}$$

2. Для нахождения реакции опоры в точке А проводим аналогичные предыдущим действия: выражаем неизвестные реакции через сумму моментов относительно точки В и через сумму моментов относительно точки С левой части рамы.

$$\sum m_B(F_i) = 0;$$

$$M + P_2 \cos 30^\circ \cdot 3 + P_2 \sin 30^\circ \cdot 2 + Q \cdot 3,5 - P_1 \cdot 3 - Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 2 = 0;$$

$$30 + 15,66 + 6 + 42 - 75 - 5Y_A + 2X_A = 0;$$

$$18,66 - 5Y_A + 2X_A = 0.$$

$$\sum m_C^{лев}(F_i) = 0;$$

$$Q \cdot 1,5 + P_1 \cdot 1 - Y_A \cdot 3 - X_A \cdot 2 = 0;$$

$$18 + 25 - 3Y_A - 2X_A = 0;$$

$$43 - 3Y_A - 2X_A = 0.$$

$$\begin{cases} 18,66 - 5Y_A + 2X_A = 0; \\ 43 - 3Y_A - 2X_A = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 8Y_A = 61,66; \\ 43 - 3Y_A = 2X_A; \end{cases} \quad \begin{cases} Y_A = 7,7 \text{ кН}; \\ X_A = 9,95 \text{ кН}. \end{cases}$$

3. Проверка:

$$\sum X = 0;$$

$$\sum Y = 0;$$

$$P_1 - X_A - P_2 \cos 30^\circ - X_B = 0;$$

$$Y_A - Q - P_2 \sin 30^\circ + Y_B = 0;$$

$$25 - 9,95 - 5,22 - 9,85 = 0;$$

$$7,7 - 12 - 3 + 7,3 = 0;$$

$$-0,02 \approx 0.$$

$$0 = 0.$$

4. Определим давление в промежуточном шарнире С (рис. 9).

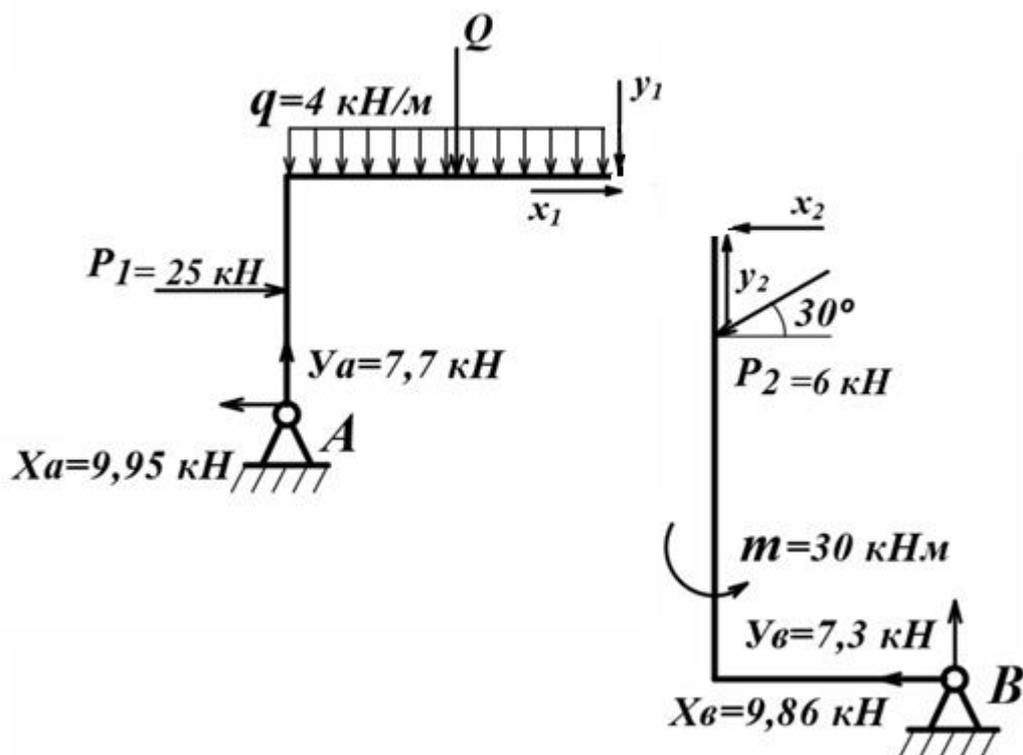


Рис. 9. Определение давления в промежуточном шарнире С

Врезной шарнир препятствует горизонтальному и вертикальному перемещению, поэтому в нем действуют две реакции – вертикальная и горизонтальная, которые равны между собой при разделении конструкции, но противоположно направлены. $X_1 = X_2$ – горизонтальные и $Y_1 = Y_2$ – вертикальные.

Найдем Y_1 :

$$\sum Y^{\text{ЛЕВ}} = 0;$$

$$-Y_1 - Q + Y_A = 0;$$

$$Y_1 = -12 + 7,7;$$

$$Y_1 = -4,3 \text{ кН.}$$

Найдем X_1 :

$$\sum X^{\text{ЛЕВ}} = 0;$$

$$X_1 - X_A + P_1 = 0;$$

$$X_1 = 9,95 - 25;$$

$$X_1 = -15,05 \text{ кН.}$$

Для проверки найдем Y_2 :

$$\sum Y^{\text{ПР}} = 0;$$

$$Y_2 - P_2 \sin 30^\circ + Y_B = 0;$$

$$Y_2 = 6 \cdot 0,5 - 7,3;$$

$$Y_2 = -4,3 \text{ кН.}$$

Для проверки найдем X_2 :

$$\sum X^{\text{ПР}} = 0;$$

$$-P_2 - P_2 \cos 30^\circ - X_B = 0;$$

$$X_2 = -6 \cdot 0,866 - 9,86;$$

$$X_2 = -15,056 \text{ кН.}$$

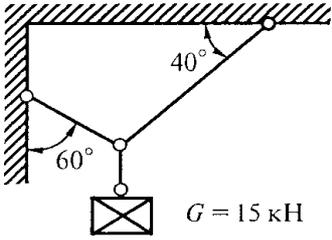
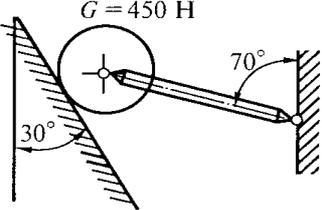
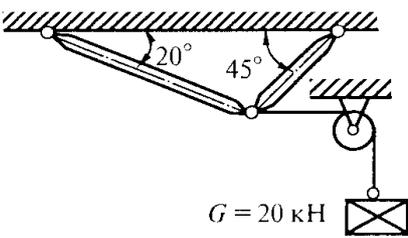
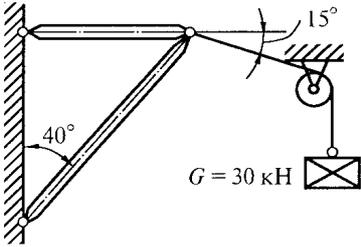
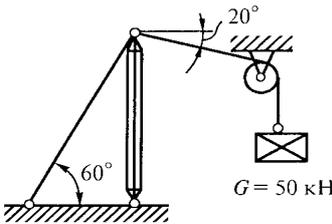
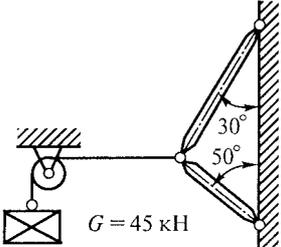
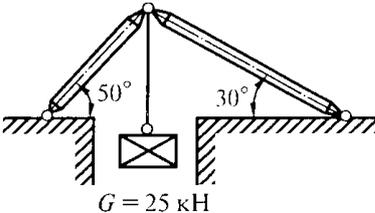
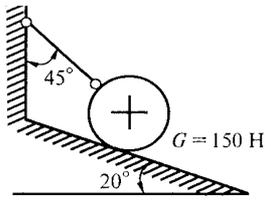
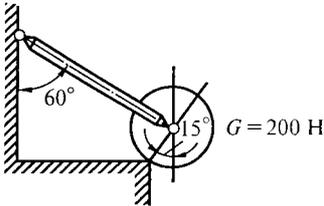
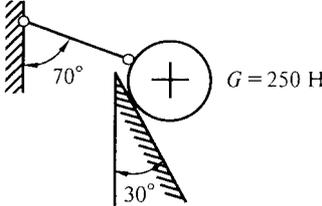
Расчетно-графическая работа № 4

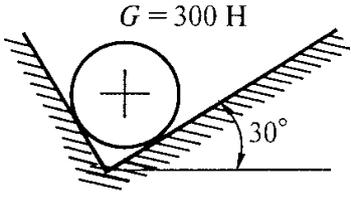
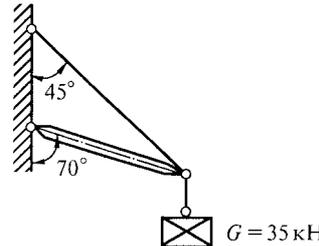
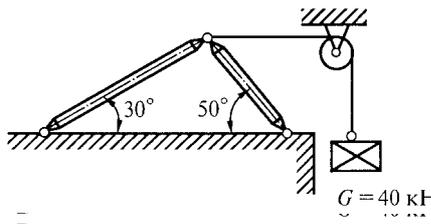
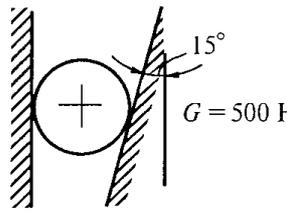
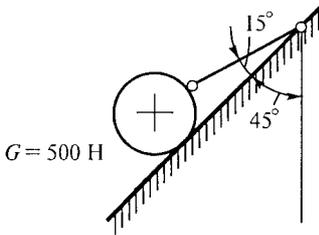
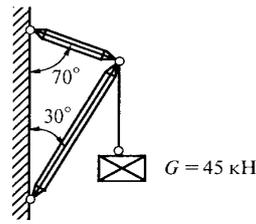
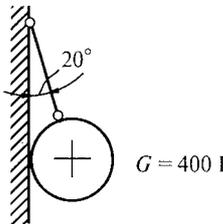
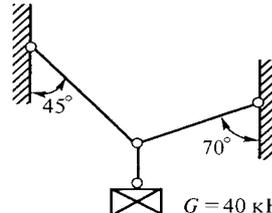
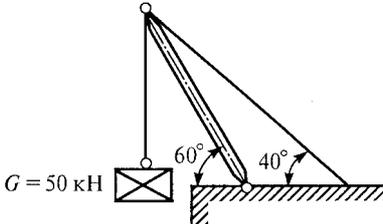
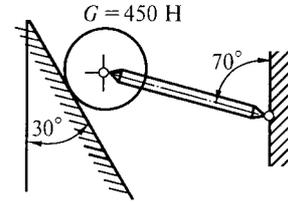
ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР СИСТЕМЫ СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

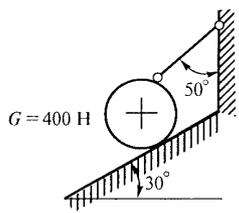
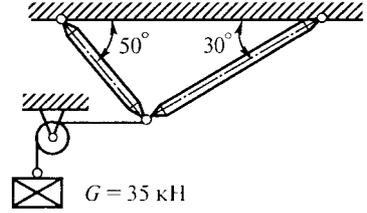
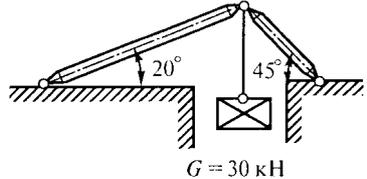
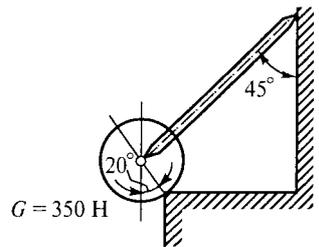
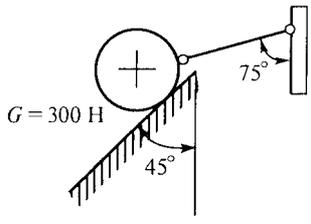
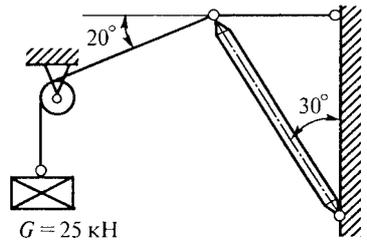
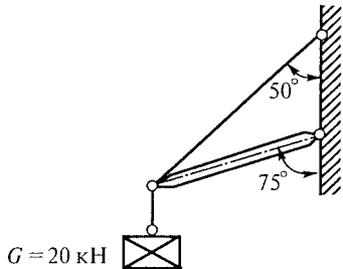
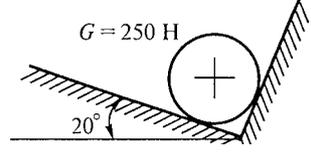
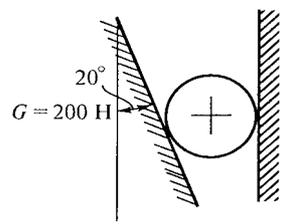
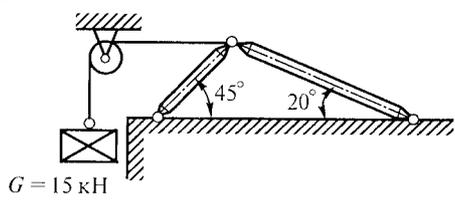
Номер варианта задания выдается в виде двузначного числа. По нему выбираются номер схемы данной конструкции.

Для заданной конструкции сходящихся сил (табл. 10) требуется определить величину и направление реакций связей по данным из вариантов аналитически и графически. Результаты сравнить.

Таблица 10

<p>1</p>  <p>$G = 15 \text{ кН}$</p>	<p>2</p>  <p>$G = 450 \text{ Н}$</p>
<p>3</p>  <p>$G = 20 \text{ кН}$</p>	<p>4</p>  <p>$G = 30 \text{ кН}$</p>
<p>5</p>  <p>$G = 50 \text{ кН}$</p>	<p>6</p>  <p>$G = 45 \text{ кН}$</p>
<p>7</p>  <p>$G = 25 \text{ кН}$</p>	<p>8</p>  <p>$G = 150 \text{ Н}$</p>
<p>9</p>  <p>$G = 200 \text{ Н}$</p>	<p>10</p>  <p>$G = 250 \text{ Н}$</p>

<p>11</p>  <p>$G = 300 \text{ H}$</p> <p>30°</p>	<p>12</p>  <p>45°</p> <p>70°</p> <p>$G = 35 \text{ кН}$</p>
<p>13</p>  <p>30°</p> <p>50°</p> <p>$G = 40 \text{ кН}$</p>	<p>14</p>  <p>15°</p> <p>$G = 500 \text{ H}$</p>
<p>15</p>  <p>15°</p> <p>45°</p> <p>$G = 500 \text{ H}$</p>	<p>16</p>  <p>70°</p> <p>30°</p> <p>$G = 45 \text{ кН}$</p>
<p>17</p>  <p>20°</p> <p>$G = 400 \text{ H}$</p>	<p>18</p>  <p>45°</p> <p>70°</p> <p>$G = 40 \text{ кН}$</p>
<p>19</p>  <p>60°</p> <p>40°</p> <p>$G = 50 \text{ кН}$</p>	<p>20</p>  <p>$G = 450 \text{ H}$</p> <p>30°</p> <p>70°</p>

<p>21</p>  <p>$G = 400 \text{ H}$</p>	<p>22</p>  <p>$G = 35 \text{ кН}$</p>
<p>23</p>  <p>$G = 30 \text{ кН}$</p>	<p>24</p>  <p>$G = 350 \text{ H}$</p>
<p>25</p>  <p>$G = 300 \text{ H}$</p>	<p>26</p>  <p>$G = 25 \text{ кН}$</p>
<p>27</p>  <p>$G = 20 \text{ кН}$</p>	<p>28</p>  <p>$G = 250 \text{ H}$</p>
<p>29</p>  <p>$G = 200 \text{ H}$</p>	<p>30</p>  <p>$G = 15 \text{ кН}$</p>

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 4

Определить величину и направление реакций связей для схемы, приведенной на рис. 10, *а*, под действием груза $G = 30$ кН. Проверить правильность определения реакций.

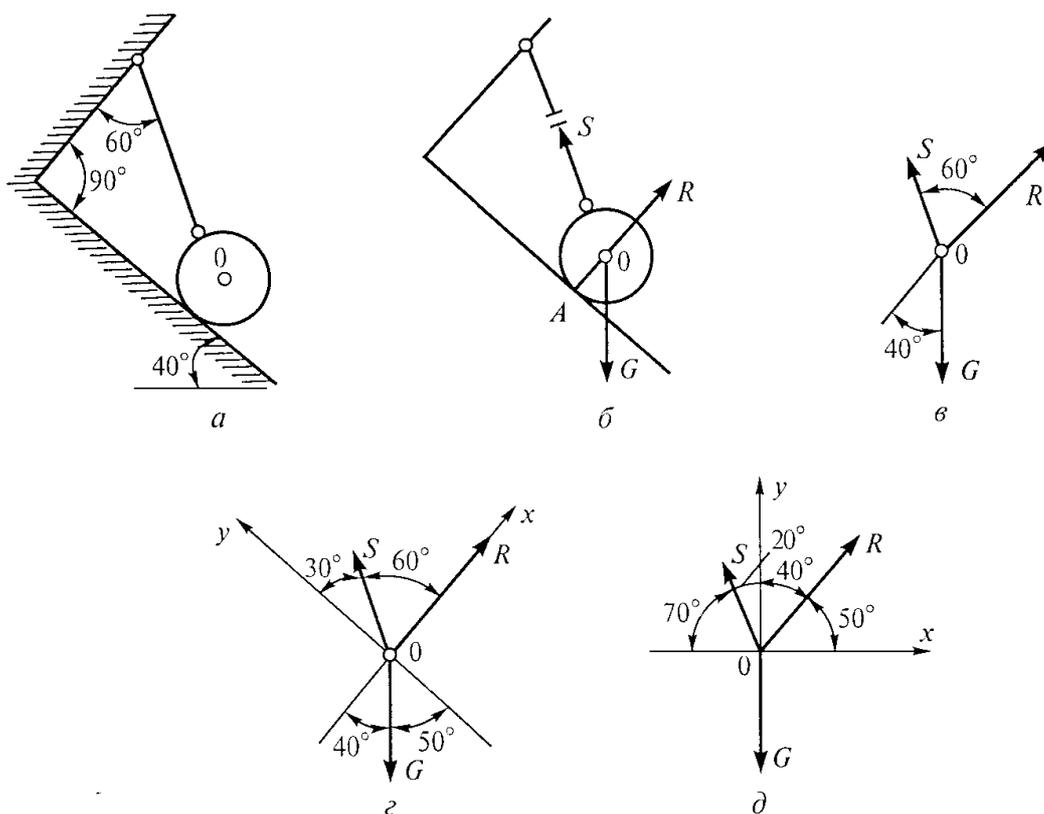


Рис. 10. Пример выполнения РГР-4

Решение. 1. В задаче рассматривается равновесие тела, опирающегося на плоскость и подвешенного на нити. Заменим тело точкой O , совпадающей с центром тяжести.

2. Приложим к точке O активную силу, которой является собственный вес тела G . Направим ее вниз (рис. 10, *б*).

3. Мысленно отбросим связи — плоскость и нить. Заменим их действие в точке O реакциями связей. Реакция плоскости (обозначим ее R) проходит по нормали к плоскости в точке A , а реакция или усилие в нити (обозначим ее S) — по нити от точки. Обе реакции и вес тела или линии их действия должны пересекаться в точке O .

Изобразим действующие силы в виде системы трех сходящихся сил на отдельном чертеже (рис. 10, в).

4. Выберем положение системы координат. Начало координат совмещаем с точкой O . Ось x совмещаем с направлением линии действия реакции R , а ось y направим перпендикулярно оси x (рис. 10, з). Определим углы между осями координат и реакциями R и S . Обычно рис. 10, а и 10, б не выполняют отдельно, а сразу от рис. 10, а переходят к рис. 10, з. Можно было ось y совместить с усилием S и ось x направить по углом 90° , тогда решение было бы другим.

5. Составим сумму проекций всех сил на оси координат:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= R + S \cos 60^\circ - G \cos 40^\circ = 0; \\ \Sigma Y &= S \cos 30^\circ - G \cos 50^\circ = 0.\end{aligned}$$

Решим систему уравнений. Из второго уравнения находим:

$$S = \frac{G \cos 50^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{30 \cdot 0,643}{0,866} = 22,27 \text{ кН} .$$

Из первого уравнения находим:

$$R = G \cos 40^\circ - S \cos 60^\circ = 30 \cdot 0,766 - 22,27 \cdot 0,5 = 11,84 \text{ кН}.$$

6. Проверим решение, для чего расположим оси координат, как показано на рис. 10, д. Составим уравнения равновесия для вновь принятых осей:

$$\begin{aligned}\Sigma X &= R \cos 50^\circ - S \cos 70^\circ = 0; \\ \Sigma Y &= R \cos 40^\circ + S \cos 20^\circ - G = 0.\end{aligned}$$

Решим систему уравнений способом подстановки. Из первого уравнения найдем R :

$$R = S \frac{\cos 70^\circ}{\cos 50^\circ}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение:

$$S \frac{\cos 70^\circ}{\cos 50^\circ} \cos 40^\circ + S \cos 20^\circ - G = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned}S \frac{G}{(\cos 70^\circ / \cos 50^\circ) \cos 40^\circ + \cos 20^\circ} &= \frac{30}{(0,342 / 0,643) 0,766 + 0,94} = \\ &= 22,27 \text{ кН}.\end{aligned}$$

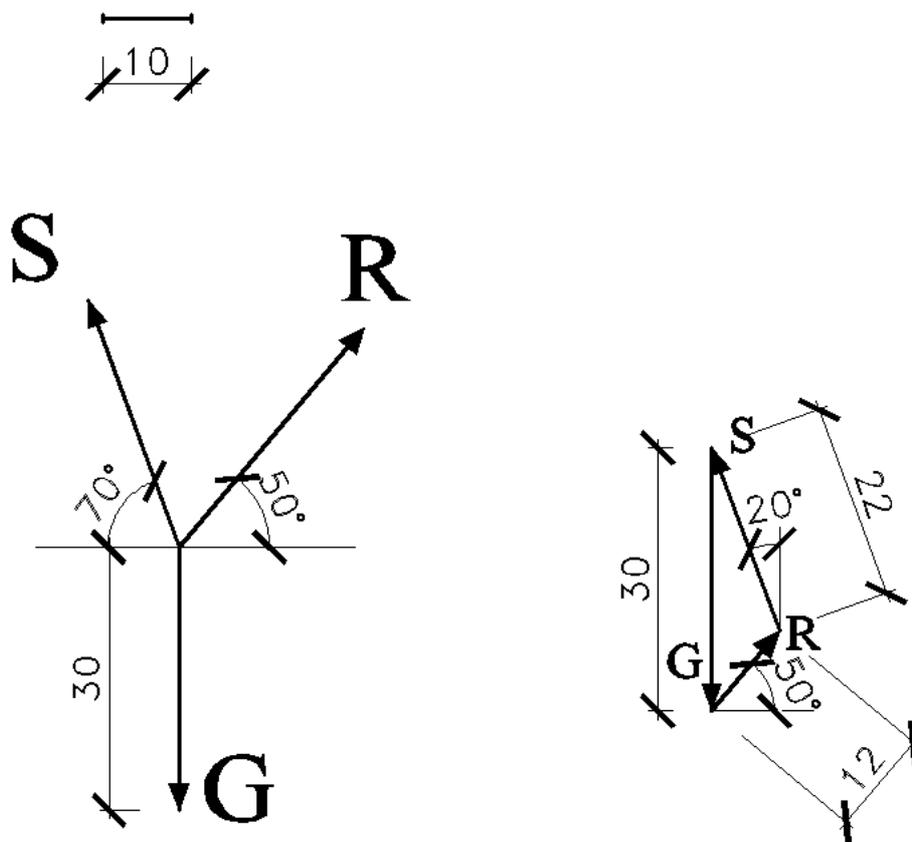
Теперь найдем R : $R = 22,27 \frac{0,342}{0,643} = 11,84$ кН.

Очевидно, что при расположении осей, как показано на рис. 10, д, вычисления оказались более сложными.

Ответ: $R = 11,84$ кН; $S = 22,27$ кН.

Для решения задачи графическим методом выберем масштаб (условно 10 единиц равно 10 кН).

Откладываем отрезки в масштабе по направлению действия силы с учетом известных углов, затем замыкаем силовой треугольник.



По результатам измерений с учетом масштаба получаем:

$R = 12 \approx 11,84$ кН; $S = 22 \approx 22,27$ кН.

Результаты, полученные обоими способами, совпали с учетом допускаемой погрешности измерений, значит, расчеты выполнены верно.

РАСПОРНЫЕ СИСТЕМЫ. ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ

Аркой называется распорная система, имеющая форму кривого стержня, обращенного выпуклостью в направлении действия основной нагрузки. *Трехшарнирная арка* – это статически определимая распорная система, состоящая из двух полуарок, соединенных между собой и с поверхностью земли шарнирами (рис. 11). Опорные шарниры обычно называют пятовыми, а средний – ключевым. *Трехшарнирные рамы* представляют собой статически определимые распорные системы, составленные из прямолинейных стержней.

Характерная особенность распорных систем состоит в наличии горизонтальных составляющих опорных реакций при действии вертикальной нагрузки.

Трехшарнирные арки и рамы могут иметь опорные шарниры на одном и на разных уровнях.

В трехшарнирных арках и рамах одна из шарнирно-неподвижных опор может быть заменена шарнирно-подвижной с вертикальным опорным стержнем. В этом случае для обеспечения геометрической неизменяемости вводится затяжка, которая и воспринимает распор.

Для трехшарнирных арок с опорами на одном уровне характерными величинами являются длина пролета l , определяемая расстоянием между опорами, и стрела подъема f , определяемая расстоянием по нормали от прямой, соединяющей опоры, до ключевого шарнира.

Расчетно-графическая работа № 5

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ АРОК

Номер варианта задания выдается в виде числа. По нему выбираются номер схемы арки (табл. 12) и номер строки исходных данных (табл. 11). Работы, выполненные не по варианту, преподавателем не рецензируются.

Содержание работы:

1) определить опорные реакции данной арки и выполнить их проверку;

2) определить величину распора H .

Уравнения очертания оси арки при расположении начала координат на левом конце кривой:

– квадратная парабола $y = \frac{4xf}{l^2}(l-x)$;

– окружность $y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} + f - R$; $R = \frac{l^2 + 4f^2}{8f}$;

– эллипс $y = \frac{2f}{l}\sqrt{x(l-x)}$;

– синусоида $y = f \sin \frac{\pi x}{l}$ (под функцией $\sin \pi = 180^\circ$).

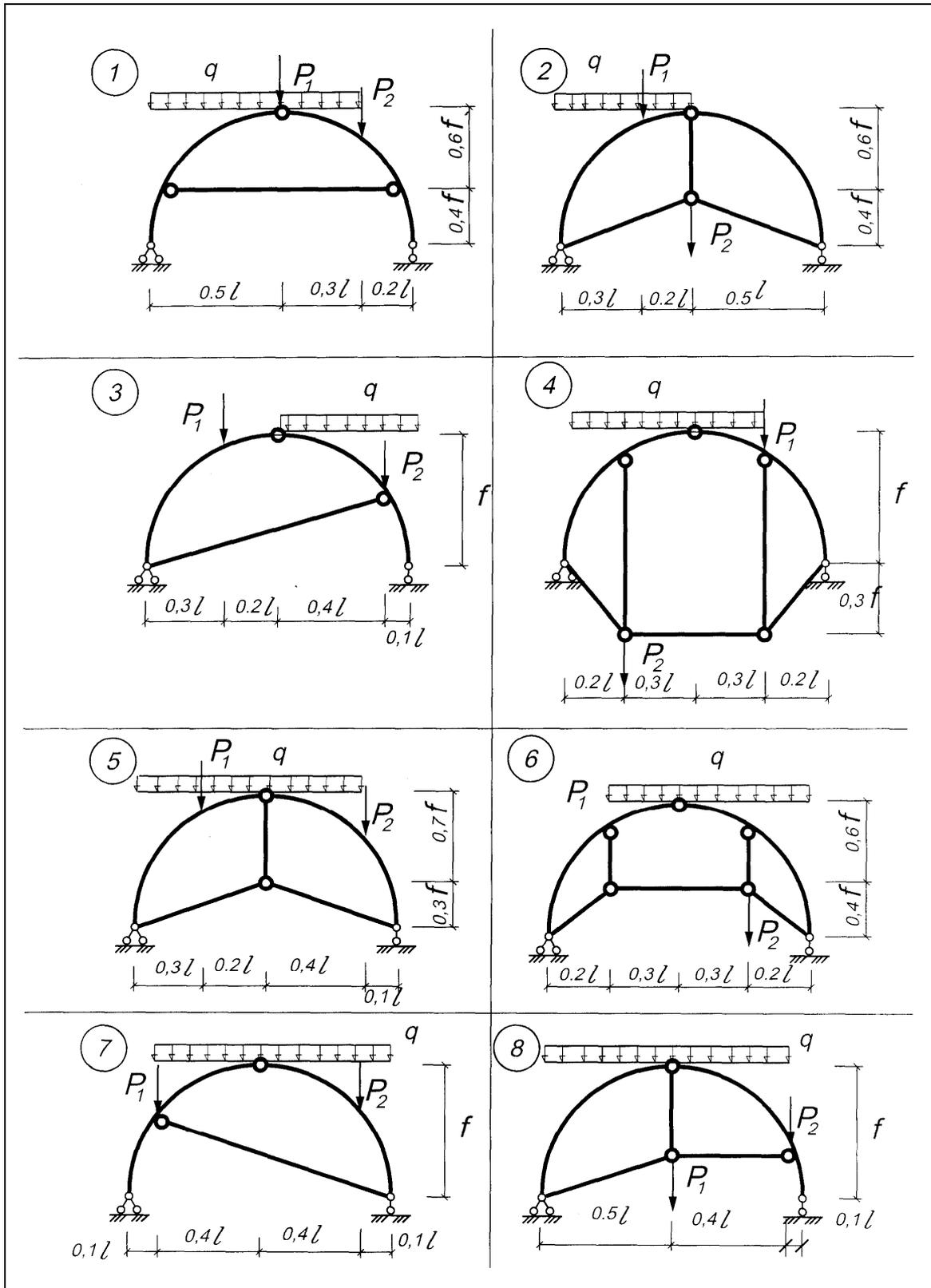
Примечание: l – расстояние между опорами арки;
 f – стрела подъёма.

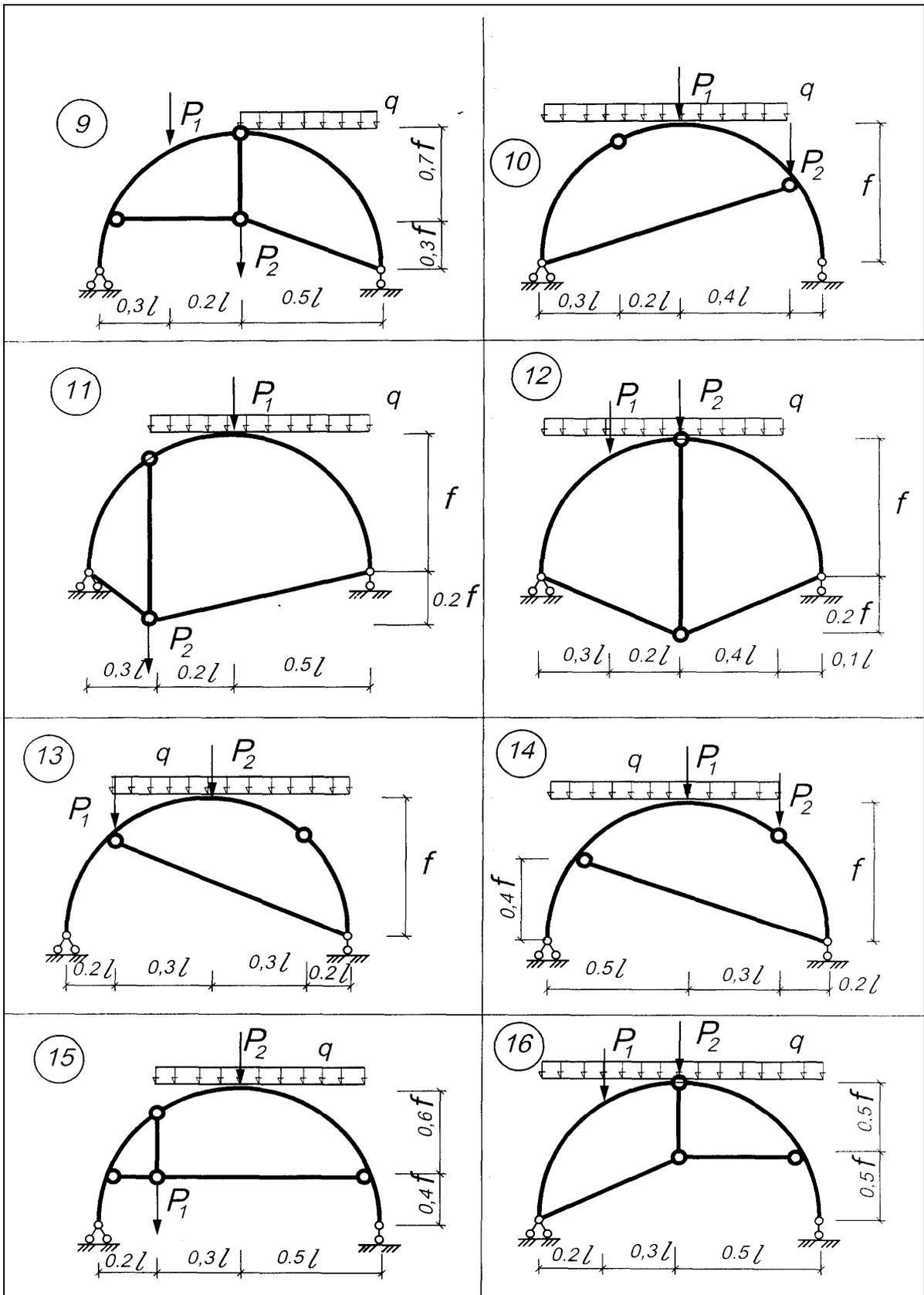
Т а б л и ц а 11

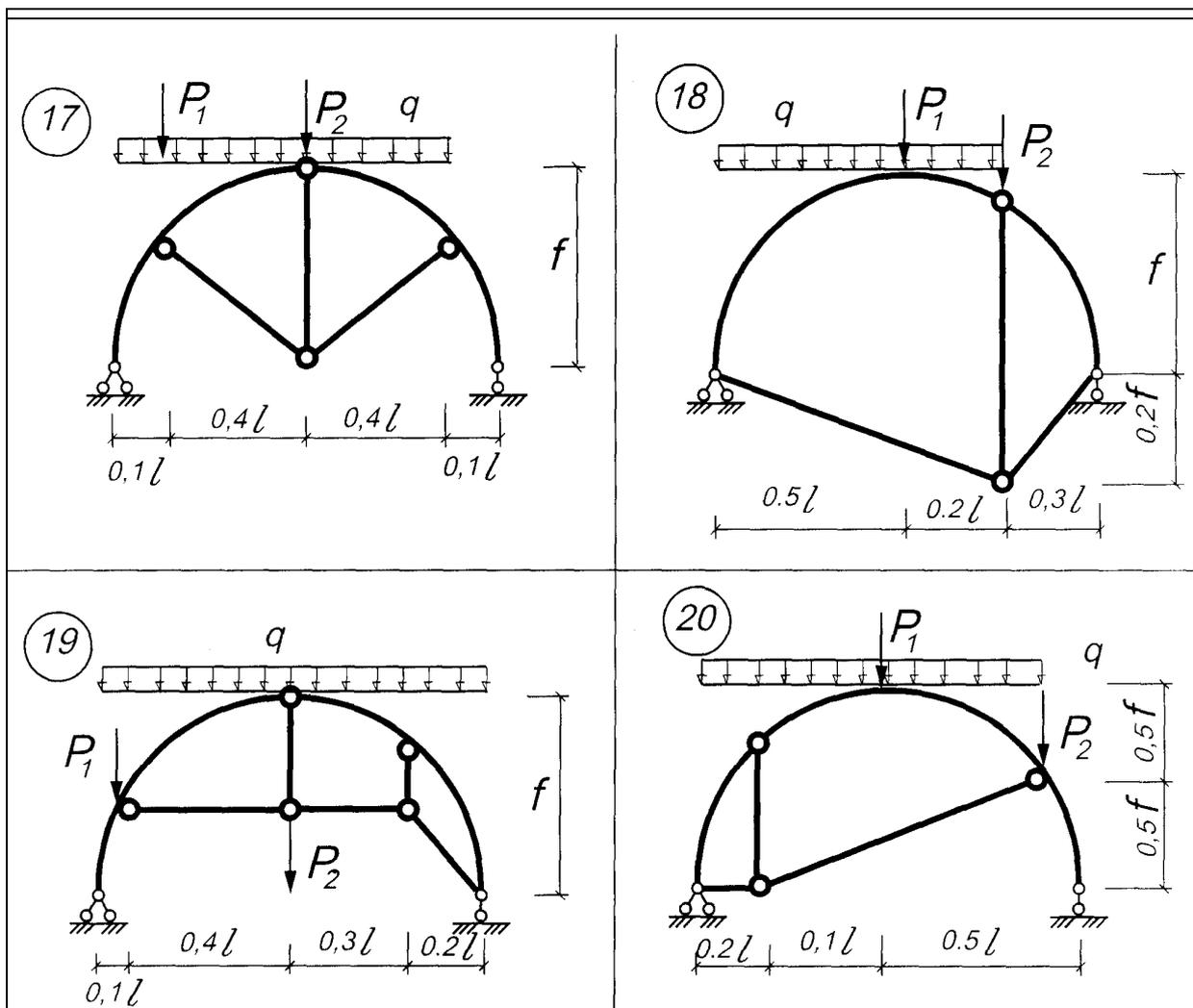
Исходные данные для расчета арок

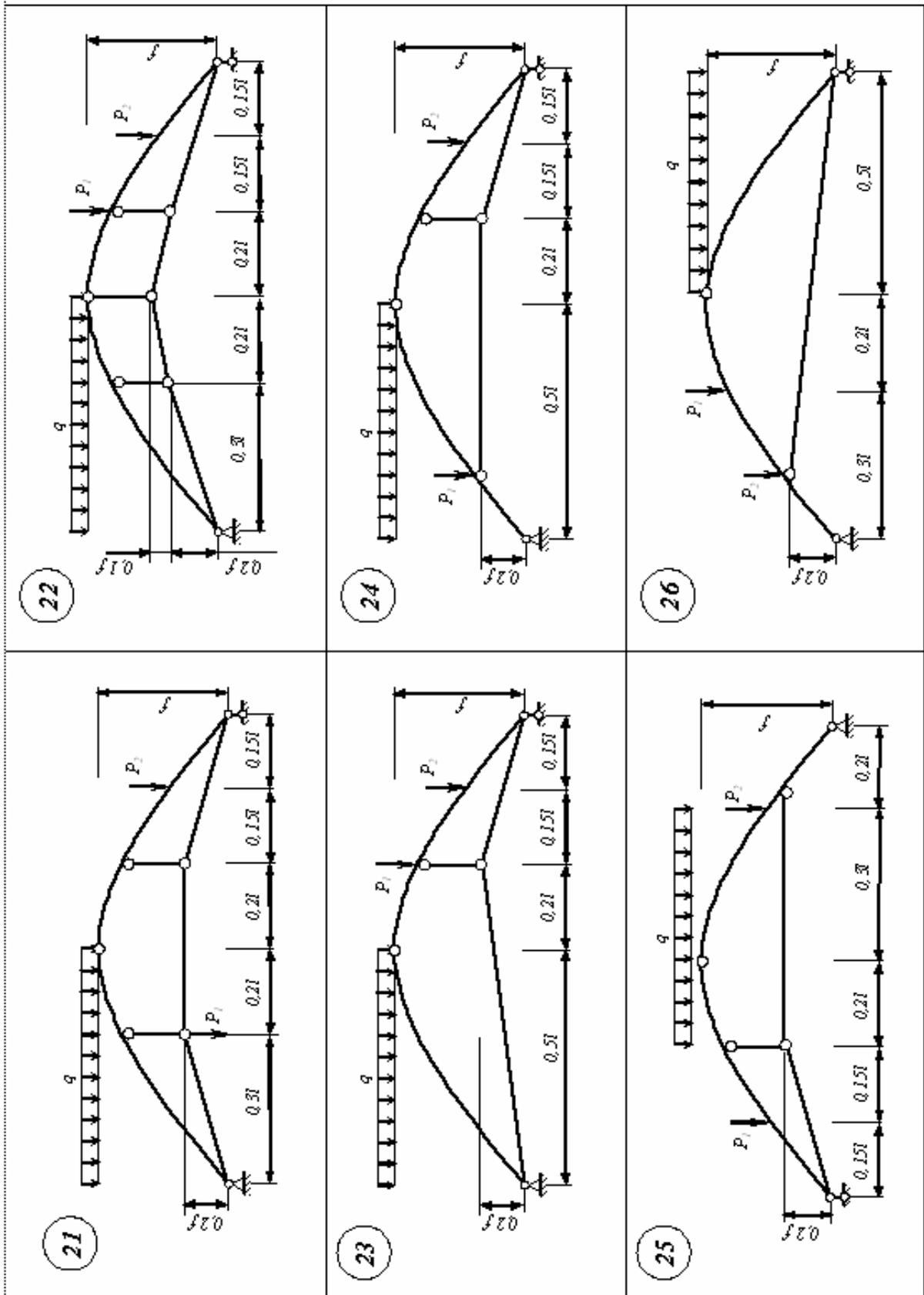
Номер строки	Уравнение очертания оси	Размеры, м		Внешние нагрузки		
		l	f	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м
1	Парабола	20	5,0	10	30	4,0
2	Окружность	22	6,6	12	26	6,0
3	Синусоида	24	7,0	14	18	5,0
4	Эллипс	26	8,2	16	14	3,0
5	Парабола	28	9,4	18	10	7,0
6	Окружность	30	10,2	20	30	8,0
7	Синусоида	20	6,2	22	26	7,0
8	Эллипс	22	7,4	24	18	3,0
9	Парабола	24	8,6	26	14	5,0
10	Окружность	26	9,4	28	10	4,0
11	Синусоида	28	10,0	30	12	6,0
12	Эллипс	30	11,2	10	16	4,0
13	Парабола	20	7,0	12	20	6,0
14	Окружность	22	8,4	14	24	5,0
15	Синусоида	24	9,2	16	28	3,0
16	Эллипс	26	8,0	18	30	7,0
17	Парабола	28	10,2	20	26	8,0
18	Окружность	30	12,4	22	18	7,0
19	Синусоида	20	7,8	24	14	3,0
20	Эллипс	22	8,4	26	22	5,0
21	Парабола	24	9,6	28	14	4,0
22	Окружность	26	10,2	30	10	6,0
23	Синусоида	28	11,4	10	12	7,0
24	Эллипс	30	12,6	12	16	8,0
25	Парабола	20	7,8	14	20	7,0
26	Окружность	22	9,2	16	24	3,0
27	Синусоида	24	9,8	18	28	5,0
28	Эллипс	26	11,4	20	30	6,0
29	Парабола	28	12,2	22	26	5,0
30	Окружность	30	13,4	24	22	3,0
31	Синусоида	20	8,2	26	18	4,0
32	Эллипс	22	9,4	28	14	6,0

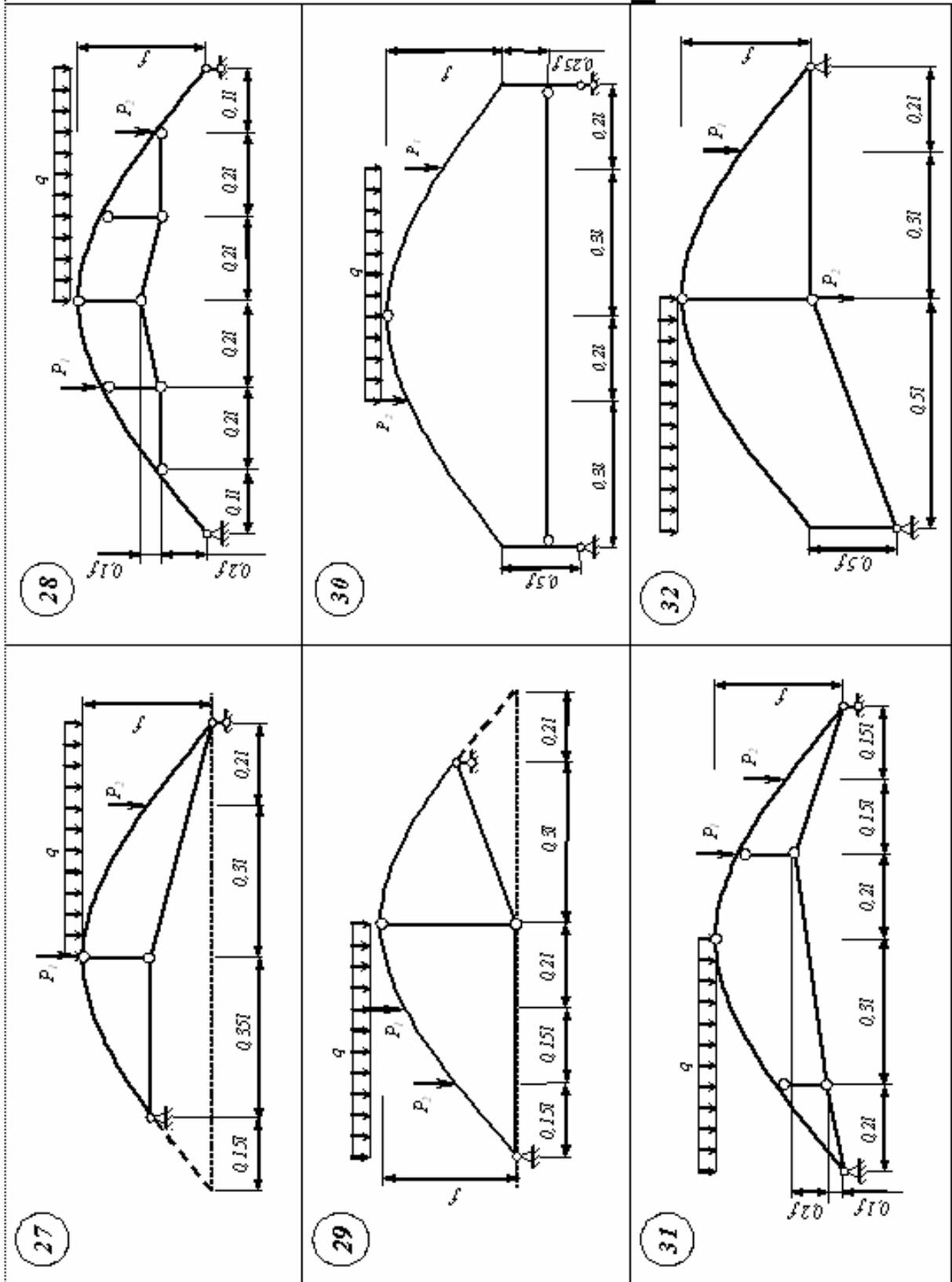
Задания к расчетно-графической работе № 5











ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 5

Арка имеет затяжку, которая воспринимает горизонтальную реакцию H , называемую *распором* (рис. 11). В опорных шарнирах A и B , называемых *пятовыми*, возникают вертикальные реакции V_A и V_B соответственно. Предположим, что V_A и V_B направлены вверх.

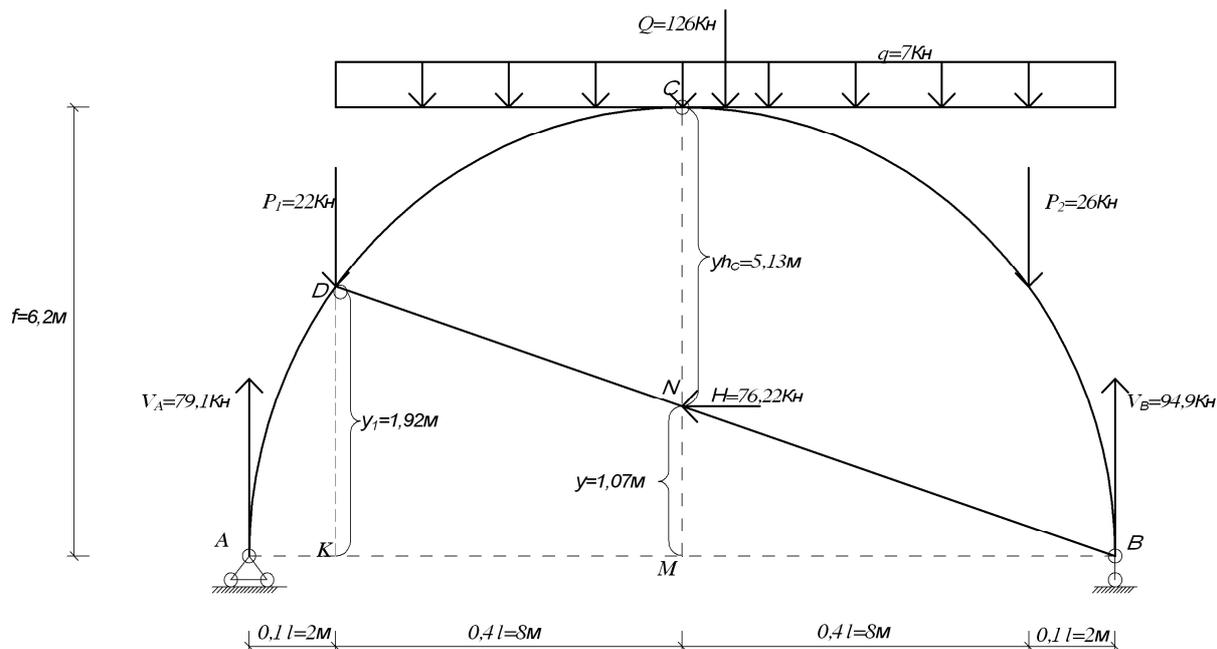


Рис. 11. Заданная арка

Дано:

$l = 20$ м – длина пролета;

$f = 6,2$ м – стрела подъема;

$P_1 = 22$ кН;

$P_2 = 26$ кН;

$q = 7$ кН/м;

$y = f \sin \frac{\pi x}{l}$ – уравнение очертания оси арки.

Найдем равнодействующую $Q = 0,9lq = 0,9 \cdot 20 \cdot 7 = 126$ кН.

1. Чтобы найти V_B , надо составить сумму моментов всех сил относительно точки A :

$$\Sigma m_A(F_i) = 0.$$

Запишем уравнение в общем виде:

$$P_1 \cdot 0,1l + Q \left(\frac{0,9l}{2} + 0,1l \right) + P_2 \cdot 0,9l - V_B l = 0.$$

Подставим числа:

$$22 \cdot 0,1 \cdot 20 + 126 \cdot 11 + 26 \cdot 0,9 \cdot 20 - V_B \cdot 20 = 0;$$

$$V_B = 94,9 \text{ кН.}$$

2. Аналогично нахождению реакции V_B найдем V_A . Для этого составим сумму моментов всех сил относительно точки В:

$$\Sigma m_B(F_i) = 0.$$

$$P_2 \cdot 0,1l + Q \left(\frac{0,9l}{2} \right) + P_1 \cdot 0,9l - V_A l = 0;$$

$$26 \cdot 0,1 \cdot 20 + 126 \cdot 9 + 22 \cdot 0,9 \cdot 20 - V_A \cdot 20 = 0;$$

$$V_A = 79,1 \text{ кН.}$$

3. Чтобы проверить полученные результаты, составим такое уравнение, чтобы в него вошли обе неизвестные V_A и V_B . Например, уравнение суммы проекций всех сил на ось y :

$$\Sigma y = 0.$$

В общем виде:

$$V_A - P_1 - Q - P_2 + V_B = 0.$$

Подставим числа:

$$79,1 - 22 - 126 - 26 + 94,9 = 0;$$

$$0 = 0 - \text{верно.}$$

4. Для того чтобы найти распор H , составим уравнение суммы моментов всех сил правой или левой части относительно врезного шарнира C , называемого *ключевым*. Для этого нам надо знать расстояние y_H^C , т.е. плечо от распора H до шарнира C (NC).

Треугольник BKD подобен треугольнику BMN , следовательно, найдя $KD = y_1$, найдем и $MN = y$.

Найдем y_1 . Воспользуемся уравнением $y = f \sin \frac{\pi x}{l}$ (x – расстояние от A до точки пересечения нужной нам стороны с осью x , в нашем случае x – расстояние AK). Подставим данные в уравнение: $y = 6,2 \sin \frac{180 \cdot 2}{20} = 1,92 \text{ м.}$

Из подобия треугольников составим уравнение:

$$\frac{KD}{KB} = \frac{MN}{MB}, \text{ т.е. } \frac{y_1}{0,9l} = \frac{y}{0,5l};$$

$$y = \frac{y_1 \cdot 0,5l}{0,9l} = 1,07 \text{ м.}$$

Так как $MC = MN + NC = f$, $NC = y_H^C = MC - MN = f - y = 6,2 - 1,07 = 5,13$ м, то, зная плечо, мы можем составить уравнение

$$\Sigma m_C^{ПР} = 0.$$

В общем виде:

$$\frac{q \cdot 0,5l \cdot 0,5l}{2} + P_2 \cdot 0,4l - V_B \cdot 0,5l + H \cdot y_H^C = 0.$$

Подставим числа:

$$\frac{7 \cdot 0,5 \cdot 20 \cdot 0,5 \cdot 20}{2} + 26 \cdot 0,4 - 94,9 \cdot 0,5 \cdot 20 + H \cdot 5,13 = 0;$$

$$H = 76,22 \text{ кН.}$$

Таким образом, $V_A = 79,1$ кН, $V_B = 94,9$ кН, а распор $H = 76,22$ кН.

2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Сопротивление материалов – наука, занимающаяся вопросами прочности, жесткости и устойчивости частей различных сооружений и машин, входящая составной частью в научную дисциплину «Механика деформируемого твердого тела». При проектировании различных инженерных сооружений приходится определять размеры отдельных элементов конструкций. Эта задача решается на основе расчетов, цель которых – создание долговечного и экономичного сооружения.

В отличие от теоретической механики сопротивление материалов рассматривает задачи, где наиболее существенны свойства деформируемых тел, а законы движения тела как жесткого целого не только отступают на второй план, но в ряде случаев не берутся в расчет.

Знание сопротивления материалов позволяет создать простые приемы расчета наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Необходимость довести решение каждой практической задачи до некоторого числового результата заставляет в ряде случаев прибегать к упрощающим гипотезам – предположениям, которые оправдываются в дальнейшем путем сопоставления расчетных данных с экспериментом.

Наука о сопротивлении материалов призвана дать ответ на вопрос о *степени надежности* элементов конструкций. Параметрами надежности служат *деформации* и *напряжения*, для которых устанавливаются границы, обеспечивающие прочность, жесткость и устойчивость элементов.

Элемент считается *прочным*, если под действием внешних силовых воздействий или несиловых факторов не разрушается. Если деформации элемента не превышают некоторых заданных пределов, то элемент считается *жестким*. Под *устойчивостью* элемента понимают его способность сохранять первоначальную форму равновесия. Таким образом, основными задачами сопротивления материалов являются расчеты элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Наука о сопротивлении материалов имеет широкое применение в инженерной и архитектурской практике.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ

При расчетах элементов конструкций используются различные геометрические характеристики. Так, например, чаще всего используется площадь поперечного сечения стержня. Оказывается, при различных деформациях характеристики площади недостаточно. Необходимо использовать другие, более сложные геометрические характеристики. Последнее утверждение можно проиллюстрировать на следующем примере-эксперименте.

Возьмем пластмассовую линейку длиной 20...25 см, заждем ее в левой руке так, чтобы больший размер поперечного сечения располагался горизонтально, и надавим правой рукой на другом конце (расчетная схема – консольная балка с силой на конце). Линейка изогнется, и правый ее конец переместится в вертикальном направлении. Затем повторим тот же опыт, но линейку повернем на 90° относительно продольной оси – теперь больший размер поперечного сечения располагается вертикально. Линейка изогнется, и правый ее конец тоже переместится в вертикальном направлении, но на значительно меньшее значение.

Следовательно, при одной и той же площади поперечного сечения стержня, но при разном расположении его линейка-стержень сопротивляется изгибу по-разному. Это позволяет сделать вывод о том, что площадь поперечного сечения не может характеризовать сопротивляемость стержня изгибу и, как будет видно далее, при изучении перемещений при изгибе придется вводить другие геометрические характеристики.

Основными геометрическими характеристиками являются площадь поперечного сечения, статический момент площади (сечения), момент инерции, центробежный момент, момент сопротивления, радиус инерции. Их изучению посвящена расчетно-графическая работа № 6.

Расчетно-графическая работа № 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

В состав работы входят две задачи: сечение, составленное из прокатных профилей, и сечение, составленное из элементарных геометрических фигур (табл. 13 – 15).

При выполнении работы в пояснительной записке должны быть отражены следующие этапы расчета.

1. Вычисление геометрических характеристик поперечного сечения, составленного из прокатных профилей.

1.1. Определение геометрических характеристик элементов составного сечения.

1.2. Определение положения центра тяжести сечения.

1.3. Вычисление координат центров тяжести элементов сечения в системе центральных осей.

1.4. Проверка правильности определения центра тяжести.

1.5. Вычисление осевых и центробежного моментов инерции заданного сечения относительно центральных осей.

1.6. Определение положения главных центральных осей.

1.7. Вычисление главных центральных моментов инерции.

1.8. Вычисление главных радиусов инерции и моментов сопротивления заданного поперечного сечения.

2. Вычисление геометрических характеристик поперечного сечения, составленного из элементарных геометрических фигур.

2.1. Определение геометрических характеристик элементов составного сечения.

2.2. Определение положения центра тяжести сечения.

2.3. Вычисление координат центров тяжести элементов сечения в системе центральных осей.

2.4. Проверка правильности определения центра тяжести.

2.5. Определение положения главных центральных осей.

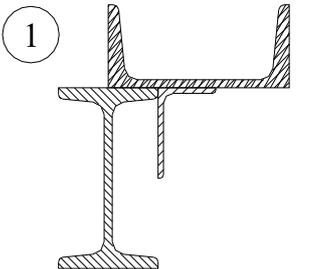
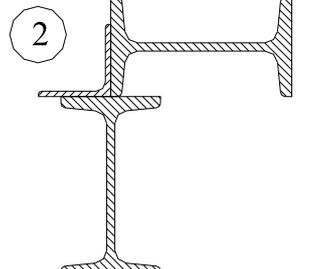
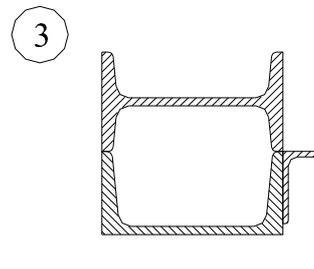
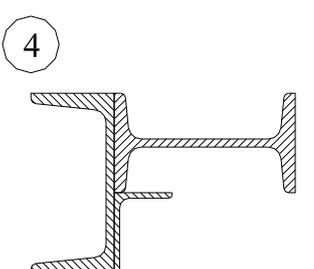
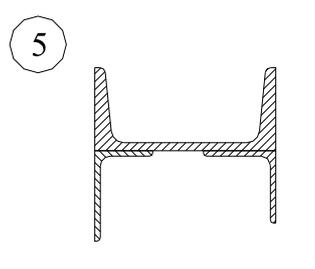
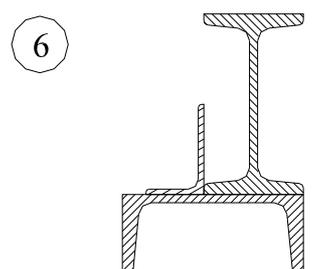
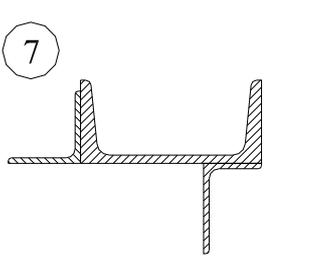
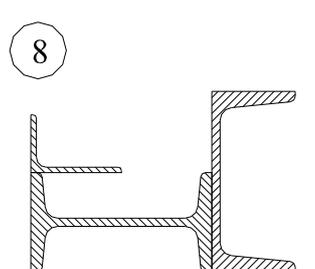
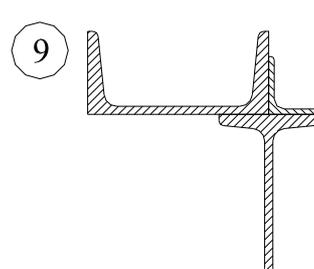
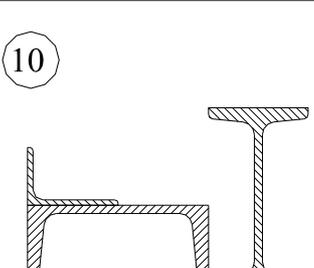
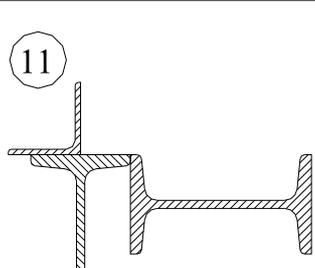
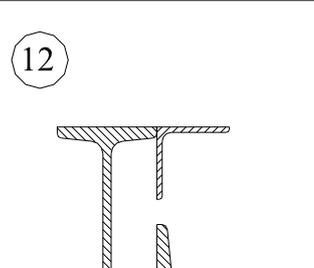
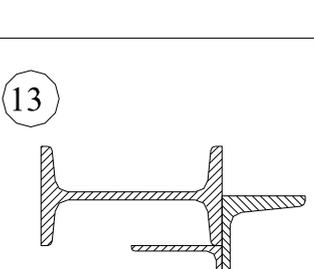
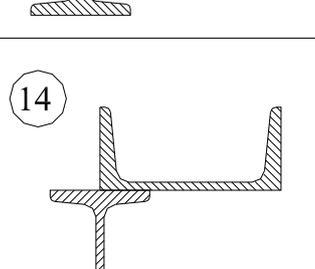
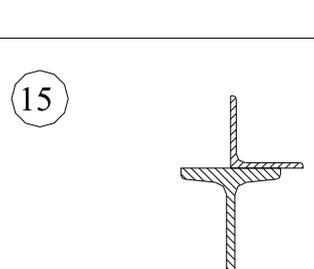
2.6. Вычисление главных центральных моментов инерции сечения.

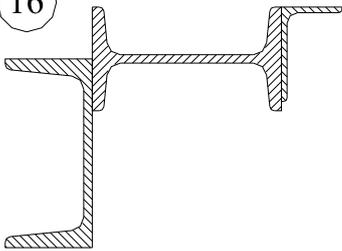
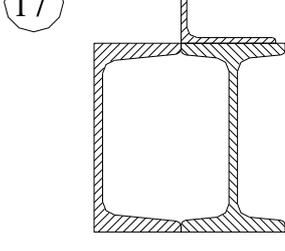
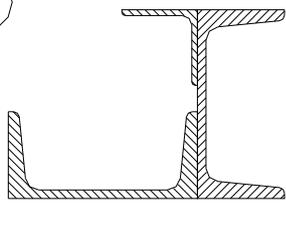
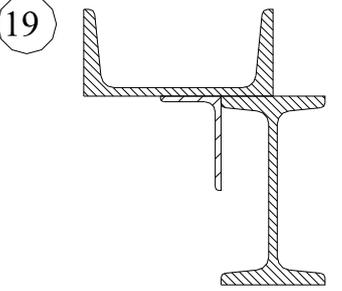
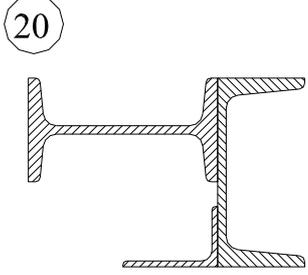
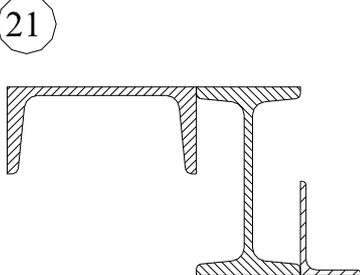
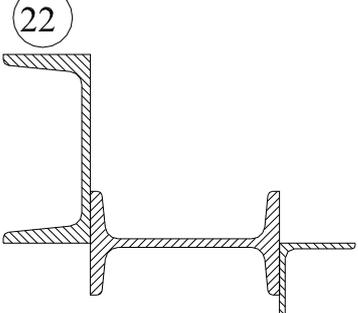
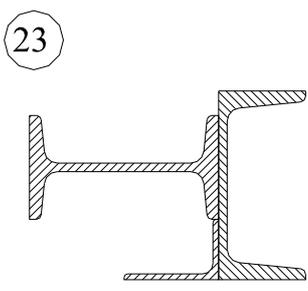
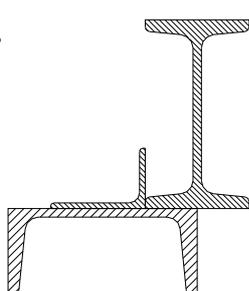
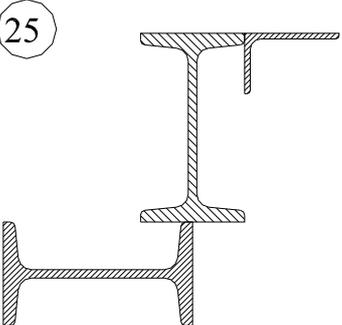
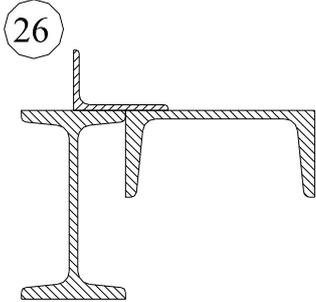
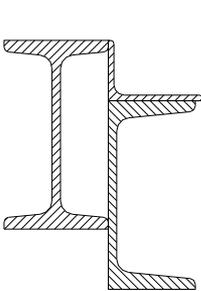
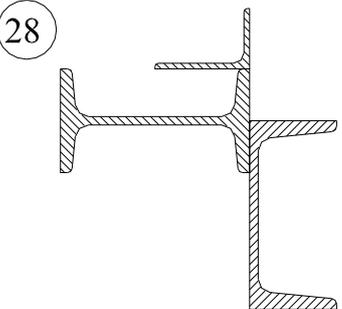
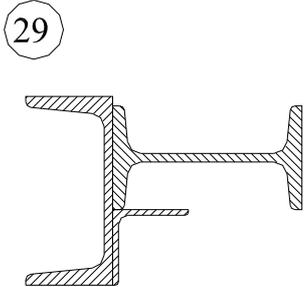
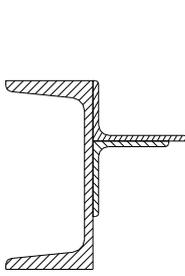
2.7. Вычисление главных радиусов инерции и моментов сопротивления заданного поперечного сечения.

Исходные данные к РГР № 6

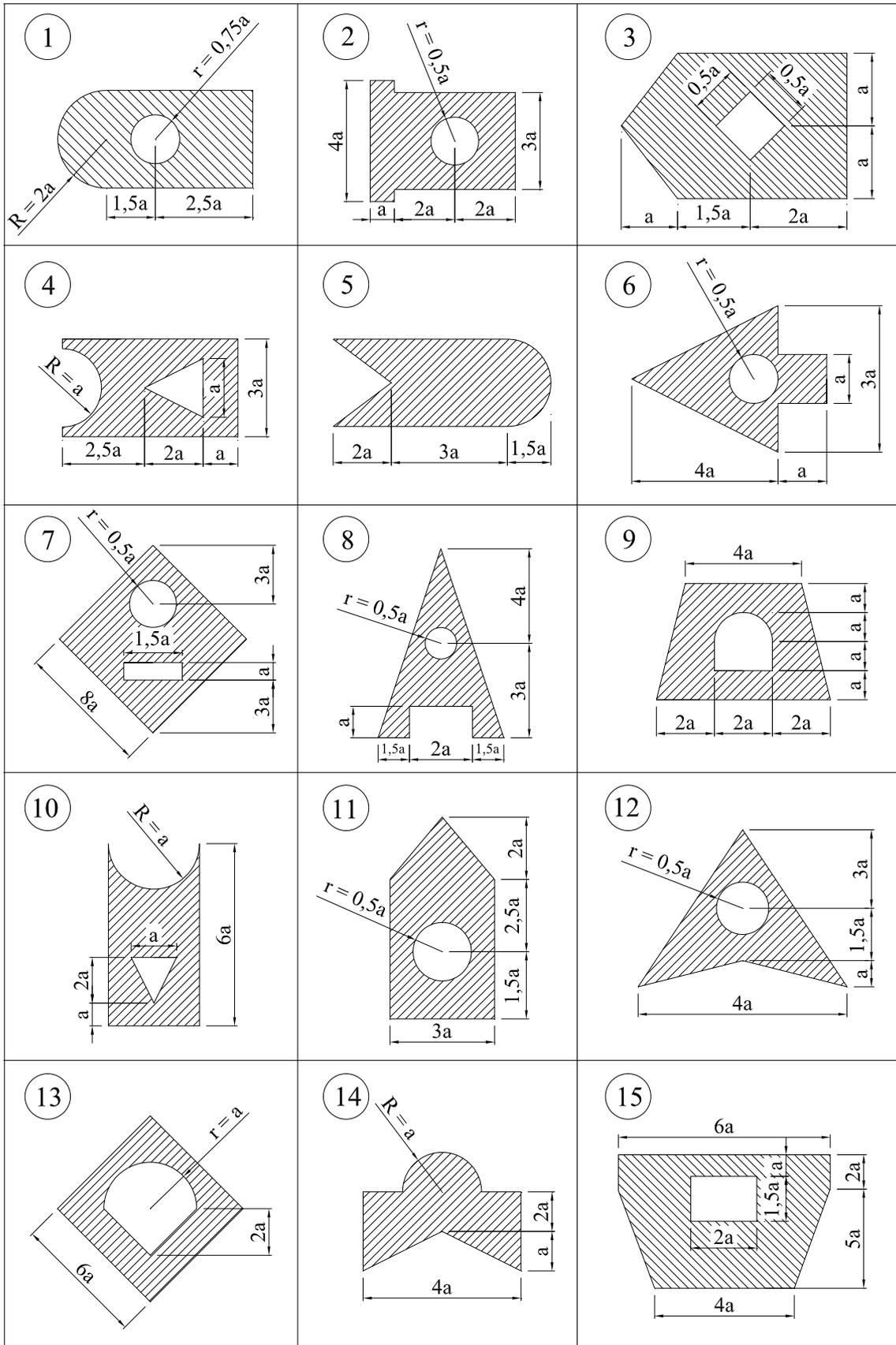
№ вар.	Задача № 1				Задача № 2 а, см
	Двутавр №	Швеллер №	Уголок неравнобокий	Уголок равнобокий	
1	18	18	80×50×5	80×80×6	2,0
2	20	20	90×56×6	90×90×6	3,0
3	22	22	100×63×6	100×100×7	3,5
4	24	24	125×80×8	125×125×8	2,5
5	10	10	50×32×3	50×50×3	3,0
6	12	12	56×36×4	56×56×4	2,5
7	14	14	63×40×4	63×63×4	3,5
8	16	16	75×50×5	75×75×5	2,5
9	27	27	140×90×8	140×140×9	2,0
10	30	30	160×100×9	160×160×10	4,0
11	33	33	180×110×10	180×180×11	4,5
12	36	36	200×125×12	200×200×12	4,0
13	40	40	250×160×12	250×250×16	2,0
14	10	10	50×32×4	50×50×4	4,5
15	12	12	56×36×5	56×56×5	2,5
16	14	14	63×40×5	63×63×5	2,0
17	16	16	75×50×6	75×75×6	2,5
18	18a	18	80×50×6	80×80×7	3,5
19	20a	20	90×56×8	90×90×7	3,5
20	22a	22	100×63×8	100×100×8	3,0
21	24a	24	125×80×10	125×125×9	4,0
22	27a	27	140×90×10	140×140×10	3,5
23	30a	30	160×100×10	160×160×11	3,5
24	36	33	180×110×12	180×180×12	2,5
25	40	36	200×125×14	200×200×14	2,0
26	45	40	250×160×16	250×250×16	3,0
27	12	10	50×32×4	50×50×3	3,5
28	10	12	56×36×5	56×56×4	4,5
29	16	14	63×40×6	63×63×6	3,0
30	14	16	75×50×8	75×75×7	2,5

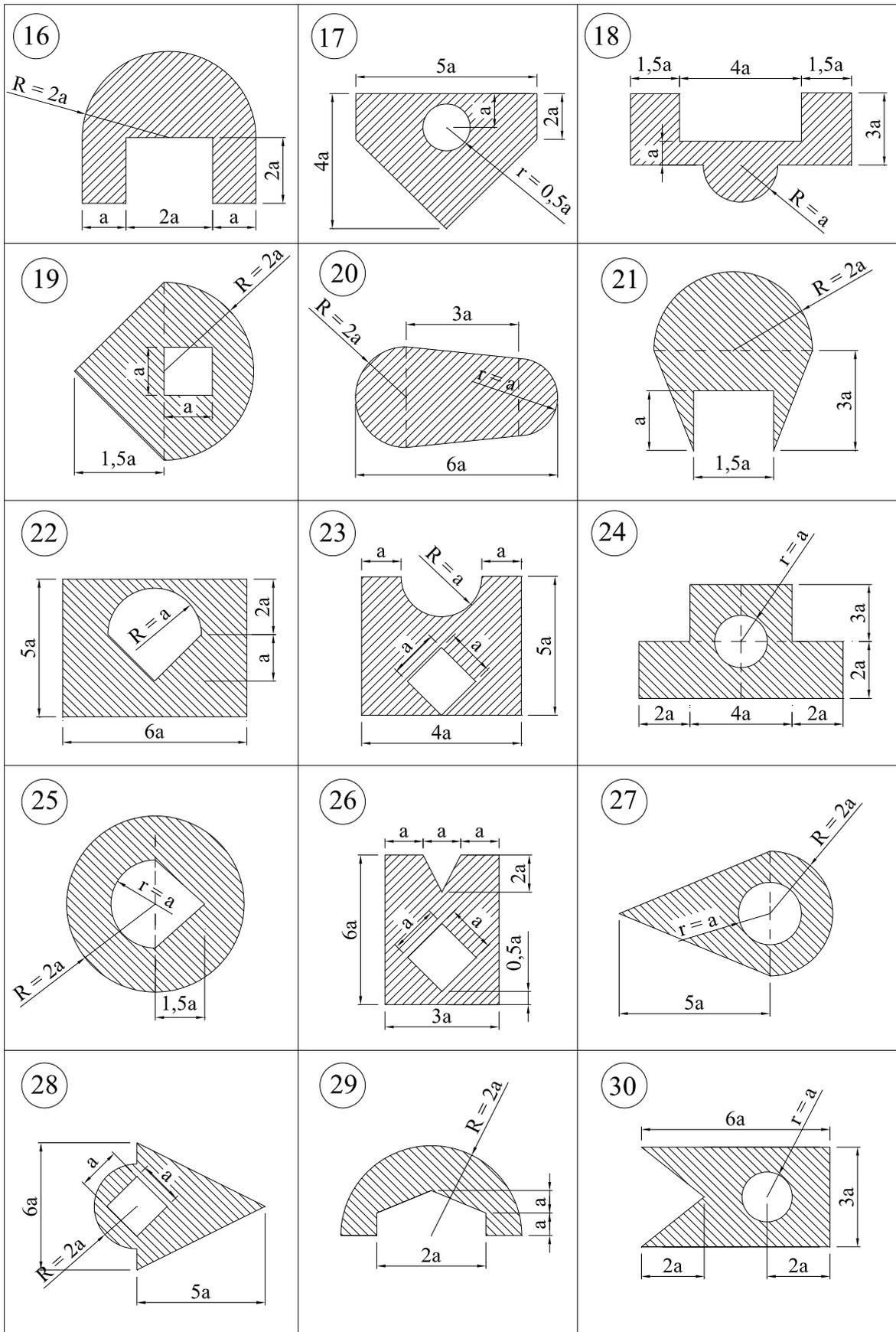
Расчетные схемы к задаче № 1 РГР-6

<p>1</p> 	<p>2</p> 	<p>3</p> 
<p>4</p> 	<p>5</p> 	<p>6</p> 
<p>7</p> 	<p>8</p> 	<p>9</p> 
<p>10</p> 	<p>11</p> 	<p>12</p> 
<p>13</p> 	<p>14</p> 	<p>15</p> 

<p>16</p> 	<p>17</p> 	<p>18</p> 
<p>19</p> 	<p>20</p> 	<p>21</p> 
<p>22</p> 	<p>23</p> 	<p>24</p> 
<p>25</p> 	<p>26</p> 	<p>27</p> 
<p>28</p> 	<p>29</p> 	<p>30</p> 

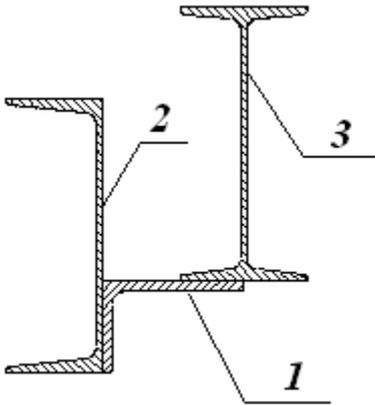
Расчетные схемы к задаче № 2 РГР-6





ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 6

Часть 1. Вычисление геометрических характеристик поперечного сечения, составленного из прокатных профилей



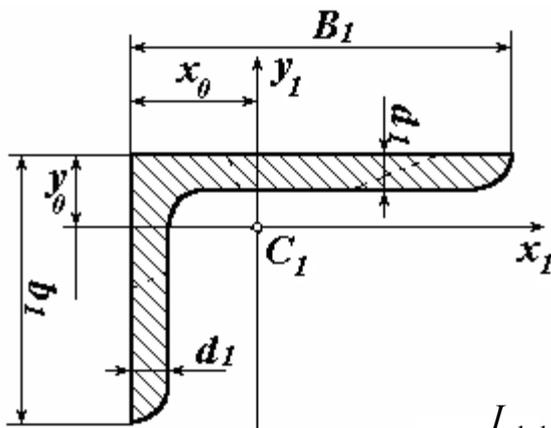
Заданное поперечное сечение состоит из трех элементов:

- 1 – неравнобокий уголок 140×90×10;
- 2 – швеллер № 27;
- 3 – двутавр № 30.

1.1. Определение геометрических характеристик элементов сечения.

Используя сортамент прокатной стали (табл. 16-19), находим геометрические характеристики каждого из элементов в отдельности.

А) Элемент № 1 – неравнобокий уголок 140×90×10.



$$\begin{aligned}
 B_1 &= 14 \text{ см}; \\
 b_1 &= 9 \text{ см}; \\
 d_1 &= 1 \text{ см}; \\
 I_{x1} &= 145,5 \text{ см}^4; \\
 I_{y1} &= 444,5 \text{ см}^4; \\
 A_1 &= 22,24 \text{ см}^2; \\
 x_0 &= 4,58 \text{ см}, \quad y_0 = 2,12 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{x_1 y_1} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x1} + I_{y1} - 2I_{\min})^2 - (I_{x1} - I_{y1})^2} = \\
 &= + \frac{1}{2} \sqrt{(145,5 + 444,5 - 2 \cdot 85,51)^2 - (145,5 - 444,5)^2} = 146,75 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Упрощенно знак центробежного момента I_{xy} определяется по координатным четвертям в зависимости от расположения уголка (равнобокого и неравнобокого), как показано на рис. 12.

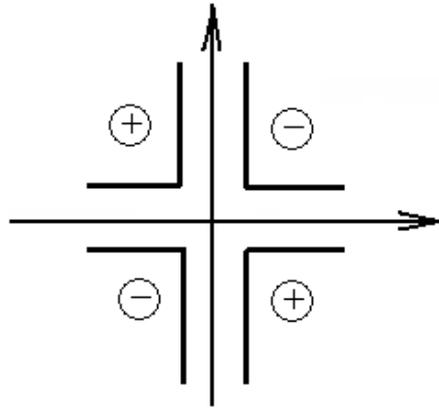
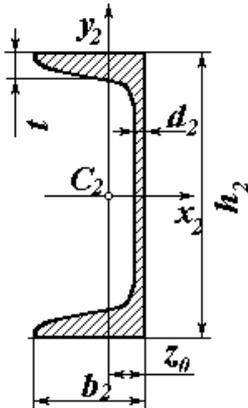


Рис. 12. Определение знака центробежного момента уголка

Центробежный момент равнобокого уголка определяется аналогично по формуле $I_{xy} = \pm \frac{|I_{x0} - I_{y0}|}{2}$, где I_{x0} и I_{y0} – значения моментов инерции относительно главных центральных осей равнобокого уголка (см. табл. 16).

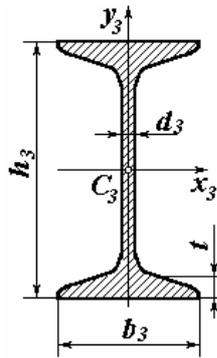
Б) Элемент № 2 – швеллер № 27.



$$\begin{aligned}
 h_2 &= 27 \text{ см}; \\
 b_2 &= 9,5 \text{ см}; \\
 d_2 &= 0,6 \text{ см}; \\
 I_{x_2} &= 4160 \text{ см}^4; \\
 I_{y_2} &= 262 \text{ см}^4; \\
 A_2 &= 35,2 \text{ см}^2; \\
 I_{x_2 y_2} &= 0; \\
 z_0 &= 2,47 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

Известно, что если одна из осей элемента (в данном случае x_2) является осью симметрии, то эта ось главная, а центробежный момент относительно главной оси равен нулю.

В) Элемент № 3 – двутавр № 30.



$$\begin{aligned} h_3 &= 30 \text{ см}; \\ b_3 &= 13,5 \text{ см}; \\ d_3 &= 0,65 \text{ см}; \\ I_{x_3} &= 7080 \text{ см}^4; \\ I_{y_3} &= 337 \text{ см}^4; \\ A_3 &= 46,5 \text{ см}^2; \\ I_{x_3 y_3} &= 0. \end{aligned}$$

1.2. Вычисление координат центра тяжести сечения.

Выбираем вспомогательную систему координат (ξ, η) , совмещая ее оси с осями одного из элементов. Определяем координаты центров тяжести элементов сечения в новой системе координат (рис. 13).

$$\begin{aligned} \xi_1 &= z_0 + x_0 = 2,47 + 4,58 = 7,05 \text{ см}; & \eta_1 &= 0; \\ \xi_2 &= 0; & \eta_2 &= 27/2 - 9 + 2,12 = 6,62 \text{ см}; \\ \xi_3 &= z_0 + B_1 = 2,47 + 14 = 16,47 \text{ см}. & \eta_3 &= 30/2 + 2,12 = 17,12 \text{ см}. \end{aligned}$$

Вычисляем координаты положения центра тяжести всего сечения:

$$\begin{aligned} \xi_c &= \frac{A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{22,24 \cdot 7,05 + 35,2 \cdot 0 + 46,5 \cdot 16,47}{22,24 + 35,2 + 46,5} = 8,88 \text{ см}; \\ \eta_c &= \frac{A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{22,24 \cdot 0 + 35,2 \cdot 6,62 + 46,5 \cdot 17,12}{22,24 + 35,2 + 46,5} = 9,9 \text{ см}. \end{aligned}$$

По полученным координатам наносим точку C – центр тяжести сечения и проводим через нее центральные оси X и Y (рис. 13).

1.3. Вычисление координат центров тяжести элементов сечения в системе центральных осей.

$$\begin{aligned} a_1 &= \eta_1 - \eta_c = 0 - 9,9 = -9,9 \text{ см}; & b_1 &= \xi_1 - \xi_c = 7,05 - 8,88 = -1,83 \text{ см}; \\ a_2 &= \eta_2 - \eta_c = 6,62 - 9,9 = -3,28 \text{ см}; & b_2 &= \xi_2 - \xi_c = 0 - 8,88 = -8,88 \text{ см}; \\ a_3 &= \eta_3 - \eta_c = 17,12 - 9,9 = 7,22 \text{ см}. & b_3 &= \xi_3 - \xi_c = 16,47 - 8,88 = 7,59 \text{ см}. \end{aligned}$$

1.4. Проверка правильности определения центра тяжести.

Условие: статический момент относительно центральных осей равен нулю.

$$\begin{aligned} S_X &= A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 0; \\ S_X &= 22,24(-9,9) + 35,2(-3,28) + 46,5 \cdot 7,22 = 335,73 - 335,68 = 0,05 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

Погрешность вычислений: $\frac{0,05}{335,68}100\% = 0,014\% < 5\%$.

$$S_Y = A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 = 0;$$

$$S_Y = 22,24(-1,83) + 35,2(-8,88) + 46,5 \cdot 7,59 = 352,94 - 353,18 = -0,24 \text{ см}^3.$$

Погрешность вычислений: $\frac{0,24}{352,94}100\% = 0,06\% < 5\%$.

1.5. Вычисление осевых и центробежного моментов инерции заданного сечения относительно центральных осей.

$$J_X = J_{x_1} + a_1^2 A_1 + J_{x_2} + a_2^2 A_2 + J_{x_3} + a_3^2 A_3 = 145,5 + (-9,9)^2 22,24 + 4160 + (-3,28)^2 35,2 + 7080 + 7,22^2 \cdot 46,5 = 16367,91 \text{ см}^4.$$

$$J_Y = J_{y_1} + b_1^2 A_1 + J_{y_2} + b_2^2 A_2 + J_{y_3} + b_3^2 A_3 = 444,5 + (-1,83)^2 22,24 + 262 + (-8,88)^2 35,2 + 337 + 7,59^2 \cdot 46,5 = 6572,43 \text{ см}^4.$$

$$I_{XY} = I_{x_1 y_1} + a_1 b_1 A_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 b_2 A_2 + I_{x_3 y_3} + a_3 b_3 A_3 = 146,75 + (-9,9) \times (-1,83) 22,24 + 0 + (-3,28)(-8,88) 35,2 + 0 + 7,22 \cdot 7,59 \cdot 46,5 = 4123,11 \text{ см}^4.$$

1.6. Определение положения главных центральных осей.

Воспользуемся формулой $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{XY}}{I_Y - I_X}$. Отсюда

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2I_{XY}}{I_Y - I_X} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot 4123,11}{6572,43 - 16367,91} \right) = -20^\circ 05'.$$

Поворачиваем центральную систему координат на полученный угол, тогда получаем главные центральные оси – U и V . Если угол отрицательный, то поворот системы координат производится по часовой стрелке, иначе – против.

1.7. Вычисление главных центральных моментов инерции.

Так как $I_X > I_Y$, то ось U – ось максимума, а ось V – ось минимума.

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_X + J_Y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_X - J_Y)^2 + 4I_{XY}^2},$$

$$J_{\max} = J_U = \frac{16367,91 + 6572,43}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(16367,91 - 6572,43)^2 + 4 \cdot 4123,11^2} = 17872,35 \text{ см}^4;$$

$$J_{\min} = J_V = \frac{16367,91 + 6572,43}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(16367,91 - 6572,43)^2 + 4 \cdot 4123,11^2} = 5067,99 \text{ см}^4.$$

Проверки правильности вычислений.

1) Условие: сумма осевых моментов инерции при повороте центральных осей не изменяется: $J_X + J_Y = J_U + J_V$;

$$16367,91 + 6572,43 = 17872,35 + 5067,99;$$

$$22940,34 \text{ см}^4 = 22940,34 \text{ см}^4 - \text{верно.}$$

2) Условие: центробежный момент инерции относительно главных центральных осей равен нулю:

$$I_{UV} = \frac{J_X - J_Y}{2} \sin 2\alpha + I_{XY} \cos 2\alpha =$$

$$= \frac{16367,91 - 6572,43}{2} \sin 2(-20^\circ 05') + 4123,11 \cdot \cos 2(-20^\circ 05') = 0,003 \approx 0.$$

3) Главные центральные моменты инерции сечения возможно вычислить также по другим формулам:

$$I_{\max} = I_U = I_X \sin^2 \alpha + I_Y \cos^2 \alpha + I_{XY} \sin 2\alpha = 16367,91 \cdot \sin^2(-20^\circ 05') +$$

$$+ 6572,43 \cdot \cos^2(-20^\circ 05') + 4123,11 \cdot \sin 2(-20^\circ 05') = 17872,49 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = I_V = I_X \cos^2 \alpha + I_Y \sin^2 \alpha - I_{XY} \sin 2\alpha = 16367,91 \cdot \cos^2(-20^\circ 05') +$$

$$+ 6572,43 \cdot \sin^2(-20^\circ 05') - 4123,11 \cdot \sin 2(-20^\circ 05') = 5067,81 \text{ см}^4.$$

1.8. Вычисление главных радиусов инерции и моментов сопротивления заданного поперечного сечения.

Находим величину главных радиусов инерции сечения:

$$i_{\max} = i_U = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{17872,35}{22,4 + 35,2 + 46,5}} = 13,11 \text{ см};$$

$$i_{\min} = i_V = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{5067,99}{103,94}} = 6,98 \text{ см}.$$

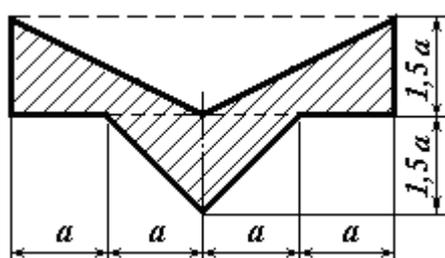
Моментом сопротивления сечения относительно главных осей U и V называется отношение осевого момента инерции к расстоянию до наиболее удаленной точки. Следовательно, для вычисления моментов сопротивления необходимо спроецировать на главные оси наиболее удаленные точки сечения и определить отрезки U_{\max} и V_{\max} , используя масштаб чертежа (рис. 13).

$$W_U = \frac{J_U}{|V_{\max}|} = \frac{17872,35}{24,8} = 720,66 \text{ см}^3;$$

$$W_V = \frac{J_V}{|U_{\max}|} = \frac{5067,99}{19,6} = 258,57 \text{ см}^3.$$

Часть 2. Вычисление геометрических характеристик поперечного сечения, составленного из элементарных геометрических фигур

Заданное поперечное сечение состоит из трех элементарных геометрических фигур:



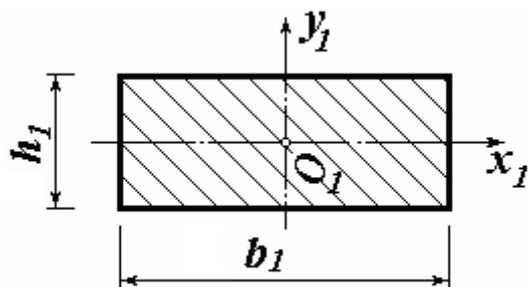
- 1 – прямоугольник $4a \times 1,5a$;
- 2 – вырезанный треугольник;
- 3 – треугольник равнобедренный.

$$a = 3 \text{ см.}$$

2.1. Определение геометрических характеристик элементов сечения

Разбиваем заданное сечение на элементарные геометрические фигуры и, используя известные формулы, находим геометрические характеристики каждого элемента в отдельности.

А) Элемент № 1 – прямоугольник.



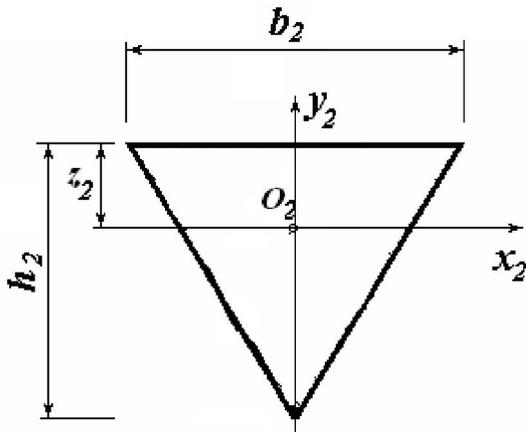
$$I_{x_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{12 \cdot 4,5^3}{12} = 91,13 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{4,5 \cdot 12^3}{12} = 648 \text{ см}^4;$$

$$A_1 = b_1 h_1 = 12 \cdot 4,5 = 54 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_1 y_1} = 0.$$

Б) Элемент № 2 – вырезанный треугольник.



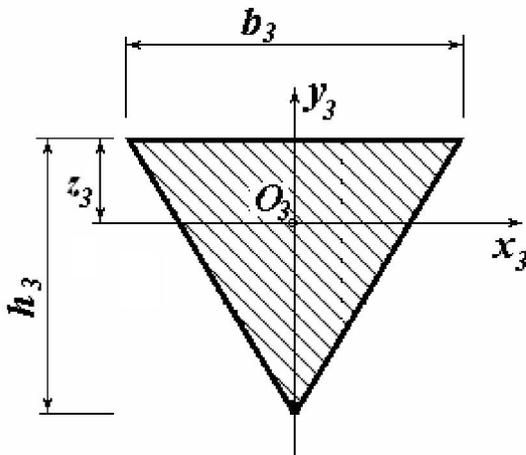
$$I_{x_2} = -\frac{b_2 h_2^3}{36} = -\frac{12 \cdot 4,5^3}{36} = -30,37 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_2} = -\frac{h_2 b_2^3}{48} = -\frac{4,5 \cdot 12^3}{48} = -162 \text{ см}^4;$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} b_2 h_2 = -\frac{1}{2} 12 \cdot 4,5 = -27 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_2 y_2} = 0, \quad z_2 = \frac{h_2}{3} = \frac{4,5}{3} = 1,5 \text{ см.}$$

В) Элемент № 3 – равнобедренный треугольник.



$$I_{x_3} = \frac{b_3 h_3^3}{36} = \frac{6 \cdot 4,5^3}{36} = 15,19 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_3} = \frac{h_3 b_3^3}{48} = \frac{4,5 \cdot 6^3}{48} = 20,25 \text{ см}^4;$$

$$A_3 = \frac{1}{2} b_3 h_3 = \frac{1}{2} 6 \cdot 4,5 = 13,5 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_3 y_3} = 0, \quad z_3 = \frac{h_3}{3} = \frac{4,5}{3} = 1,5 \text{ см.}$$

2.2. Определение положения центра тяжести сечения.

Выбираем вспомогательную систему координат (ξ, η) , совмещая ее оси с осями одного из элементов. Определяем координаты центров тяжести элементов сечения в новой системе координат (рис. 14):

$$\xi_1 = 0; \quad \eta_1 = z_3 + \frac{h_1}{2} = 1,5 + \frac{4,5}{2} = 3,75 \text{ см};$$

$$\xi_2 = 0; \quad \eta_2 = z_3 + h_1 - z_2 = 1,5 + 4,5 - 1,5 = 4,5 \text{ см};$$

$$\xi_3 = 0; \quad \eta_3 = 0.$$

$$\xi_c = \frac{A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 0.$$

$$\eta_c = \frac{A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{54 \cdot 3,75 + (-27) 4,5 + 13,5 \cdot 0}{54 - 27 + 13,5} = 2 \text{ см.}$$

По полученным координатам наносим точку C – центр тяжести и проводим через нее центральные оси X и Y (рис. 14).

2.3. Вычисление координат центров тяжести элементов сечения в системе центральных осей.

$$\begin{aligned} a_1 = \eta_1 - \eta_c = 3,75 - 2 = 1,75 \text{ см}; & & b_1 = \xi_1 - \xi_c = 0; \\ a_2 = \eta_2 - \eta_c = 4,5 - 2 = 2,5 \text{ см}; & & b_2 = \xi_2 - \xi_c = 0; \\ a_3 = \eta_3 - \eta_c = 0 - 2 = -2 \text{ см}. & & b_3 = \xi_3 - \xi_c = 0. \end{aligned}$$

2.4. Проверка правильности определения центра тяжести.

Условие: статический момент относительно центральных осей равен нулю.

$$S_X = A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 = 54 \cdot 1,75 + (-27) \cdot 2,5 + 13,5(-2) = 0,$$

$$S_Y = A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3 = 0.$$

2.5. Определение положения главных центральных осей.

Так как ось Y является осью симметрии сечения, следовательно, эта ось главная. Центральная ось X , перпендикулярная главной оси Y , также главная ось инерции составного сечения.

2.6. Вычисление главных центральных моментов инерции.

$$J_X = J_{x1} + a_1^2 A_1 + J_{x2} + a_2^2 A_2 + J_{x3} + a_3^2 A_3 = 91,13 + 1,75^2 \cdot 54 + (-30,37) + 2,5^2 \cdot (-27) + 15,19 + (-2)^2 \cdot 13,5 = 126,58 \text{ см}^4.$$

$$J_Y = J_{y1} + b_1^2 A_1 + J_{y2} + b_2^2 A_2 + J_{y3} + b_3^2 A_3 = 648 + 0 - 162 + 0 + 20,25 + 0 = 506,25 \text{ см}^4.$$

$$I_{\max} = I_Y = 506,25 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = I_X = 126,58 \text{ см}^4.$$

2.7. Вычисление главных радиусов инерции и моментов сопротивления заданного поперечного сечения.

Находим величину главных радиусов инерции сечения:

$$i_{\max} = i_Y = \sqrt{\frac{J_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{506,25}{54 - 27 + 13,5}} = 1,77 \text{ см};$$

$$i_{\min} = i_X = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{126,58}{40,5}} = 3,54 \text{ см}.$$

Моменты сопротивления: $W_X = \frac{J_X}{|Y_{\max}|} = \frac{126,58}{2 + 3} = 25,32 \text{ см}^3;$

$$W_Y = \frac{J_Y}{|X_{\max}|} = \frac{506,25}{6} = 84,38 \text{ см}^3,$$

где X_{\max} и Y_{\max} – наиболее удаленные точки сечения.

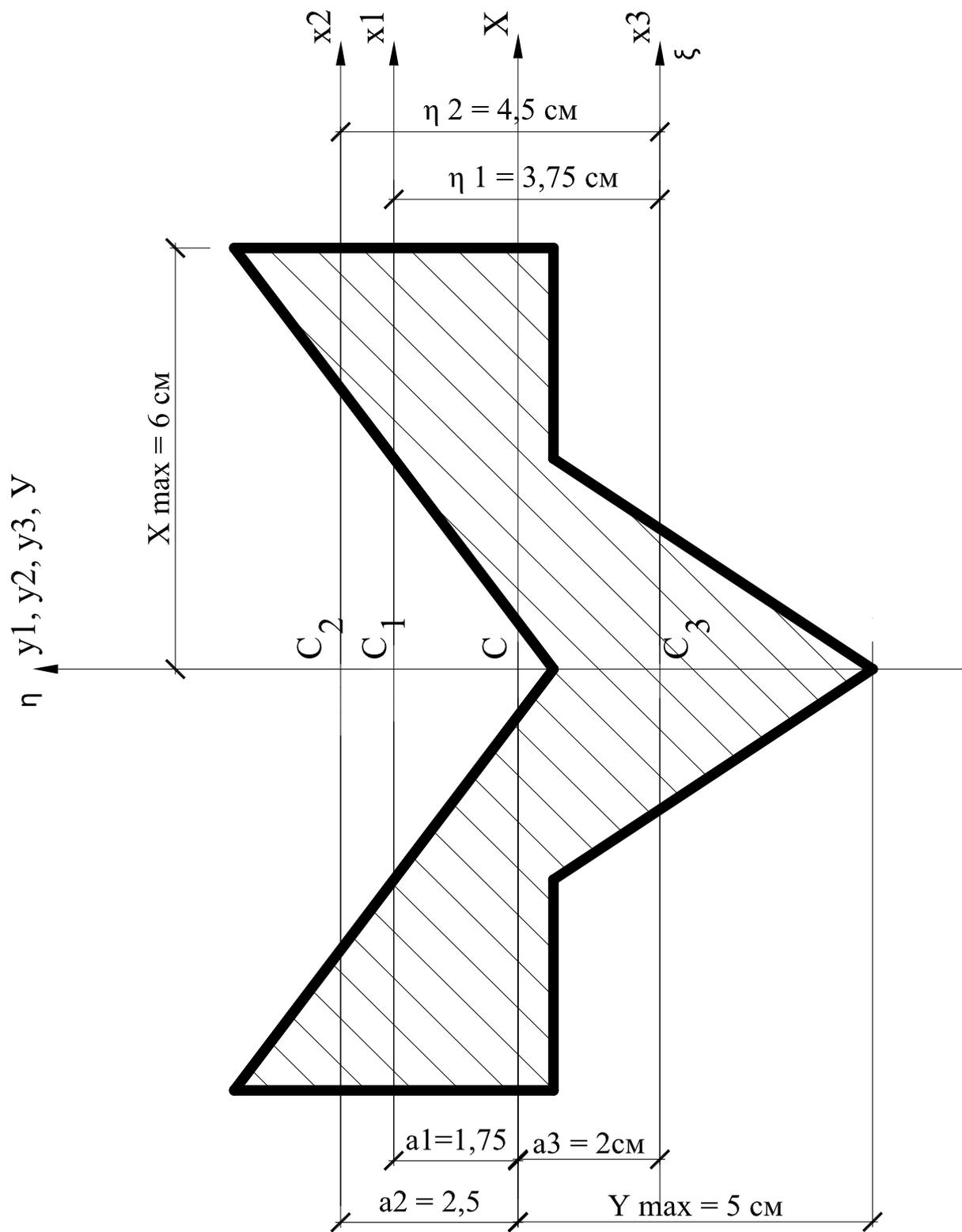
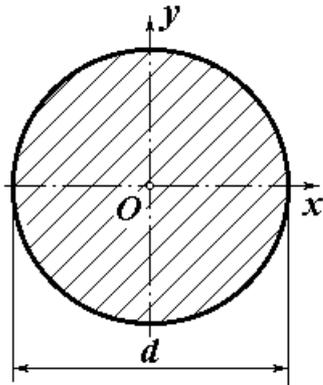


Рис. 14. Сечение, составленное из геометрических фигур

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР



Круг

Площадь сечения $A = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0,785d^2$.

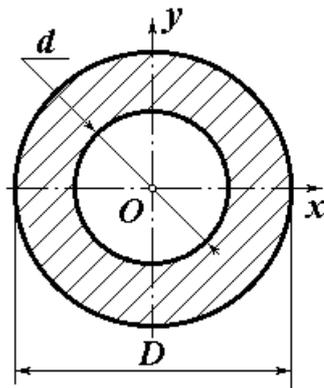
Осевые моменты инерции

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4.$$

Моменты сопротивления

$$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

Радиусы инерции $i_x = i_y = \frac{d}{4}$.



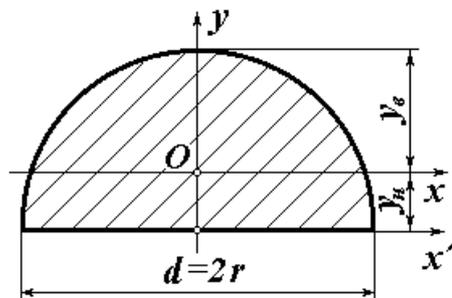
Кольцо

$$A = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2), \text{ где } \alpha = d/D.$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4) \approx 0,05D^4(1 - \alpha^4).$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3(1 - \alpha^4).$$

$$i_x = i_y = \frac{D}{4}\sqrt{1 + \alpha^2}.$$



Полукруг

$$A = \frac{\pi d^2}{8} \approx 0,392d^2.$$

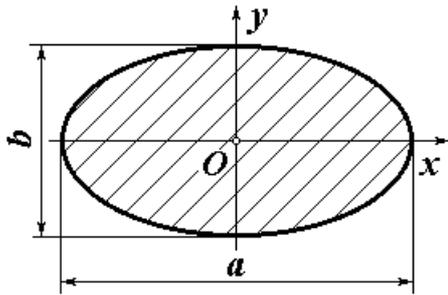
$$y_n = \frac{4r}{3\pi} = 0,2122d; \quad y_e = 0,2878d.$$

$$J_y = J_{x'} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8};$$

$$J_x = 0,14 \frac{\pi d^4}{64} = 0,14 \frac{\pi r^4}{4}.$$

$$W_y = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8};$$

$$W_{x_n} = 0,2587r^3; \quad W_{x_e} = 0,1908r^3.$$



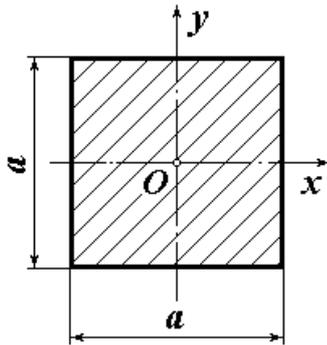
Эллипс

$$A = \frac{\pi}{4} ab.$$

$$J_x = \frac{\pi ab^3}{64}; \quad J_y = \frac{\pi a^3 b}{64}.$$

$$W_x = \frac{\pi ab^2}{32}; \quad W_y = \frac{\pi a^2 b}{32}.$$

$$i_x = b/4; \quad i_y = a/4.$$



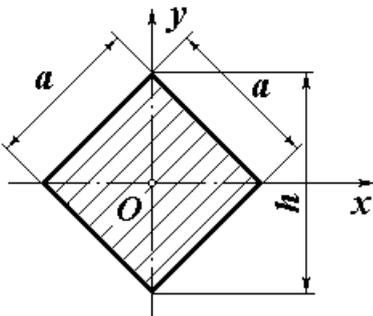
Квадрат

$$A = a^2.$$

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}.$$

$$W_x = W_y = \frac{a^3}{6}.$$

$$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} = 0,289a.$$



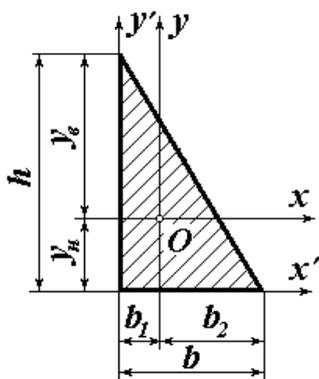
Ромб

$$A = a^2. \quad h = a\sqrt{2}.$$

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}.$$

$$W_x = W_y = 0,118a^3.$$

$$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} = 0,289a.$$



Прямоугольный
треугольник

$$A = bh/2.$$

$$y_n = h/3; \quad y_g = 2h/3;$$

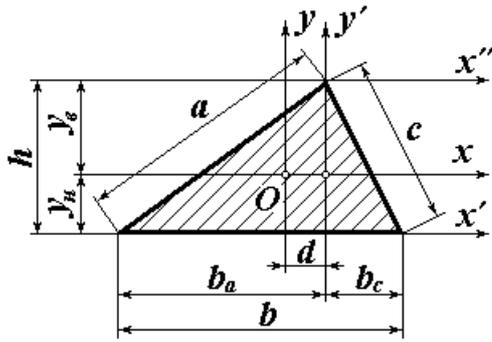
$$b_1 = b/3; \quad b_2 = 2b/3.$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_y = \frac{hb^3}{36}; \quad D_{xy} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

$$J_{x'} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y'} = \frac{hb^3}{12}; \quad D_{x'y'} = \frac{b^2 h^2}{24}.$$

$$W_{xh} = \frac{bh^2}{12}; \quad W_{xb} = \frac{bh^2}{24}.$$

$$i_x = 0,2357h.$$



Треугольник

$$A = bh/2.$$

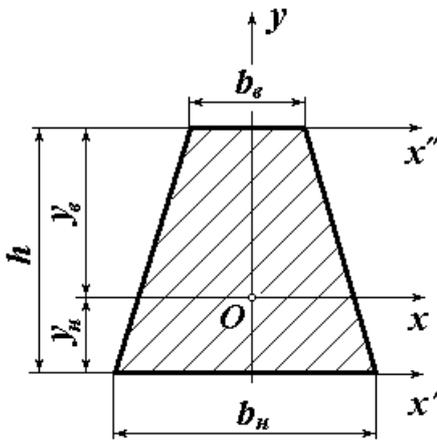
$$y_n = h/3; \quad y_e = 2h/3.$$

$$d = (b_a - b_c)/3.$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_{x'} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{x''} = \frac{bh^3}{4}.$$

$$J_y = \frac{bh(b^2 - b_a b_c)}{36}; \quad J_{y'} = \frac{h(b_a^3 + b_c^3)}{12}.$$

$$W_{xH} = \frac{bh^2}{12}; \quad W_{x6} = \frac{bh^2}{24}; \quad i_x = 0,2357h.$$



Трапеция

$$A = h(b_n + b_e)/2.$$

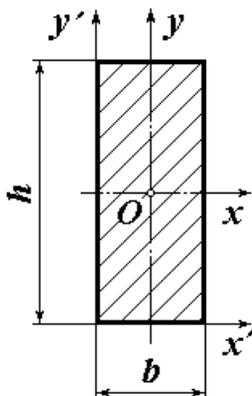
$$y_n = \frac{b_n + 2b_e}{3(b_n + b_e)}h; \quad y_e = \frac{2b_n + b_e}{3(b_n + b_e)}h.$$

$$J_x = \frac{h^3(b_n^2 + 4b_n b_e + b_e^2)}{36(b_n + b_e)};$$

$$J_y = \frac{h}{48} \cdot \frac{b_n^4 - b_e^4}{b_n - b_e}.$$

$$J_{x'} = \frac{h^3(b_n + 3b_e)}{12}; \quad J_{x''} = \frac{h^3(3b_n + b_e)}{12}.$$

$$W_{xH} = \frac{J_x}{y_n}; \quad W_{x6} = \frac{J_x}{y_e}.$$



Прямоугольник

$$A = bh.$$

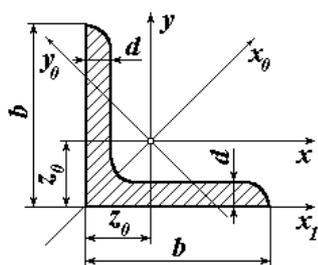
$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3h}{12}.$$

$$J_{x'} = \frac{bh^3}{3}; \quad J_{y'} = \frac{b^3h}{3}; \quad D_{x'y'} = \frac{b^2h^2}{4}.$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}.$$

$$i_x = 0,289h; \quad i_y = 0,289b.$$

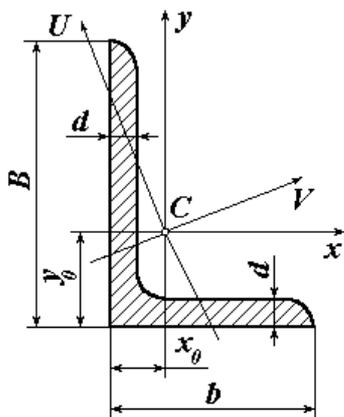
СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ



УГОЛОК РАВНОПОЛОЧНЫЙ ПО ГОСТ 8509-93 (ВЫБОРКА)

Т а б л и ц а 16

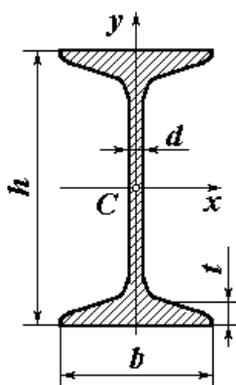
Профиль	Геометрические характеристики									Масса 1 п.м., (кг)
	$A,$ (см^2)	$J_x,$ (см^4)	$i_x,$ (см)	$J_{x_0},$ (см^4)	$i_{x_0},$ (см)	$J_{y_0},$ (см^4)	$i_{y_0},$ (см)	$J_{x_1},$ (см^4)	$z_0,$ (см)	
50×50×3	2,96	7,11	1,55	11,27	1,95	2,95	1,00	12,38	1,33	2,32
50×50×4	3,89	9,21	1,54	14,63	1,94	3,80	0,99	16,61	1,38	3,05
56×56×4	4,38	13,10	1,73	20,79	2,18	5,41	1,11	23,28	1,52	3,44
56×56×5	5,41	15,97	1,72	25,36	2,16	6,59	1,10	29,25	1,57	4,25
63×63×4	4,96	18,86	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,06	1,69	3,90
63×63×5	6,13	23,10	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,50	1,74	4,81
63×63×6	7,28	27,06	1,93	42,94	2,43	11,18	1,24	50,04	1,78	5,72
75×75×5	7,39	39,53	2,31	62,65	2,91	16,41	1,49	69,62	2,02	5,80
75×75×6	8,78	46,57	2,30	73,87	2,90	19,28	1,48	83,92	2,06	6,89
75×75×7	10,15	53,34	2,29	84,61	2,89	22,07	1,47	98,29	2,10	7,96
80×80×6	9,38	56,97	2,47	90,40	3,11	23,54	1,58	101,80	2,19	7,36
80×80×7	10,85	65,31	2,45	103,66	3,09	26,97	1,58	119,20	2,23	8,51
80×80×8	12,30	73,36	2,44	116,39	3,08	30,32	1,57	136,70	2,27	9,65
90×90×6	10,61	82,10	2,78	130,22	3,50	33,97	1,79	144,70	2,43	8,33
90×90×7	12,28	94,30	2,77	149,67	3,49	38,94	1,78	169,40	2,47	9,64
90×90×8	13,93	106,11	2,76	168,42	3,48	43,80	1,77	194,20	2,51	10,93
100×100×7	13,75	130,59	3,08	207,01	3,88	54,16	1,98	231,30	2,71	10,79
100×100×8	15,60	147,19	3,07	233,46	3,87	60,92	1,98	265,20	2,75	12,25
125×125×8	19,69	294,36	3,87	466,76	4,87	121,96	2,49	516,40	3,36	15,46
125×125×9	22,00	327,48	3,86	520,00	4,86	135,38	2,48	582,00	3,40	17,30
140×140×9	24,72	465,72	4,34	739,42	5,47	192,03	2,79	818,20	3,78	19,41
140×140×10	27,33	512,29	4,33	813,62	5,46	210,96	2,78	910,90	3,82	21,45
160×160×10	31,43	774,20	4,96	1229,10	6,25	319,38	3,19	1356,0	4,30	24,67
160×160×11	34,42	844,20	4,95	1340,70	6,24	347,77	3,18	1494,0	4,35	27,02
180×180×11	38,80	1216,40	5,60	1933,10	7,06	499,78	3,59	2128,0	4,85	30,47
180×180×12	42,19	1316,60	5,59	2092,80	7,04	540,45	3,58	2325,0	4,89	33,12
200×200×12	47,10	1822,80	6,22	2896,20	7,84	749,40	3,99	3182,0	5,37	36,97
200×200×14	54,60	2097,00	6,20	3333,00	7,81	861,00	3,97	3722,0	5,46	42,80
250×250×16	78,40	4717,10	7,76	7492,10	9,78	1942,1	4,98	8286,0	6,75	61,55



УГОЛОК НЕРАВНОПОЛОЧНЫЙ ПО ГОСТ 8510-86* (ВЫБОРКА)

Т а б л и ц а 17

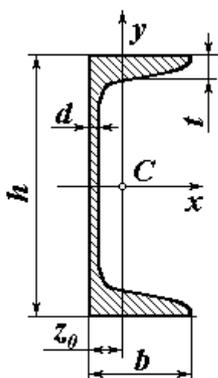
Профиль	Геометрические характеристики									Масса 1 м, (кг)
	A , (см^2)	J_{x_0} , (см^4)	i_{x_0} , (см)	J_{y_0} , (см^4)	i_{y_0} , (см)	x_{0_0} , (см)	y_{0_0} , (см)	$J_{u \min}$, (см^4)	$i_{u \min}$, (см)	
50×32×3	2,42	6,18	1,60	1,99	0,91	0,72	1,60	1,18	0,70	1,90
50×32×4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	0,76	1,65	1,52	0,69	2,49
56×36×4	3,58	11,37	1,78	3,70	1,02	0,84	1,82	2,19	0,78	2,81
56×36×5	4,41	13,82	1,77	4,48	1,01	0,88	1,87	2,65	0,78	3,46
63×40×4	4,04	16,33	2,01	5,16	1,13	0,91	2,03	3,07	0,87	3,17
63×40×5	4,98	19,91	2,00	6,26	1,12	0,95	2,08	3,73	0,86	3,91
63×40×6	5,90	23,31	1,99	7,29	1,11	0,99	2,12	4,36	0,86	4,63
75×50×5	6,11	34,81	2,39	12,47	1,43	1,17	2,39	7,24	1,09	4,79
75×50×6	7,25	40,92	2,38	14,6	1,42	1,21	2,44	8,48	1,08	5,69
75×50×8	9,47	52,38	2,35	18,52	1,40	1,29	2,52	10,87	1,07	7,43
80×50×5	6,36	41,64	2,56	12,68	1,41	1,13	2,60	7,57	1,09	4,99
80×50×6	7,55	48,98	2,55	14,85	1,40	1,17	2,65	8,88	1,08	5,92
90×56×5,5	7,86	65,28	2,88	19,67	1,58	1,26	2,92	11,77	1,22	6,17
90×56×6	8,54	70,58	2,88	21,22	1,58	1,28	2,95	12,70	1,22	6,70
90×56×8	11,18	90,87	2,85	27,08	1,56	1,36	3,04	16,29	1,21	8,77
100×63×6	9,59	98,29	3,20	30,58	1,79	1,42	3,23	18,20	1,38	7,53
100×63×8	12,57	127,00	3,18	39,21	1,77	1,50	3,32	23,38	1,36	9,87
125×80×8	15,96	255,60	4,00	82,95	2,28	1,84	4,05	48,82	1,75	12,53
125×80×10	19,70	311,60	3,98	100,50	2,26	1,92	4,14	59,33	1,74	15,47
125×80×12	23,36	364,80	3,95	116,80	2,24	2,00	4,22	69,47	1,72	18,34
140×90×8	18,00	363,70	4,49	119,8	2,58	2,03	4,49	70,27	1,98	14,13
140×90×10	22,24	444,50	4,47	145,50	2,56	2,12	4,58	85,51	1,96	17,46
160×100×9	22,87	606,00	5,15	186,00	2,85	2,24	5,19	110,40	2,20	17,96
160×100×10	25,28	666,60	5,13	204,10	2,84	2,28	5,23	121,20	2,19	19,85
180×110×10	28,33	952,30	5,80	276,40	3,12	2,44	5,88	165,40	2,42	22,24
180×110×12	33,69	1122,60	5,77	324,10	3,10	2,52	5,97	194,30	2,40	26,44
200×125×12	37,90	1568,20	6,43	481,90	3,57	2,83	6,54	285,00	2,74	29,74
200×125×14	43,90	1800,80	6,41	550,80	3,54	2,91	6,62	326,50	2,73	34,43
250×160×12	48,30	3147,50	8,07	1032,3	4,62	3,53	7,97	604,10	3,54	37,92
250×160×16	63,70	4091,10	8,02	1332,6	4,58	3,69	8,14	780,60	3,50	49,91



ДВУТАВРОВЫЕ БАЛКИ ПО ГОСТ 8239-89 (ВЫБОРКА)

Т а б л и ц а 18

№ профиля	Размеры, мм				Геометрические характеристики								Масса 1 п.м., (кг)
	h	b	d	t	A , (см^2)	J_x , (см^4)	W_{x_3} , (см^3)	i_x , (см)	S_{x_3} , (см^3)	J_y , (см^4)	W_{y_3} , (см^3)	i_y , (см)	
10	100	50	4,5	7,2	12,2	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21,0
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24,0
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50	25,8
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,10	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,20	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,30	229	337	50,0	2,80	33,9
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,30	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,50	282	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,50	339	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,70	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,20	545	667	86,1	3,03	57,0
45	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,10	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,90	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,80	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,60	1491	1725	182	3,54	108,0



ШВЕЛЛЕРЫ ПО ГОСТ 8240-97 (ВЫБОРКА)

Т а б л и ц а 19

№ профиля	Размеры, мм				Геометрические характеристики										Масса 1 п.м., (кг)
	h	b	d	t	A_x (см^2)	J_x (см^4)	W_{x_3} (см^3)	i_x (см)	S_{x_3} (см^3)	J_{y_3} (см^4)	W_{y_3} (см^3)	i_y (см)	z_0 (см)		
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16	4,84	
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	5,90	
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,30	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05	
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,40	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59	
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,60	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4	
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,80	45,4	11,0	1,70	1,67	12,3	
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,10	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3	
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,10	63,3	13,8	1,87	1,80	14,2	
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,40	78,8	16,4	2,01	2,00	15,3	
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,80	86,0	17,0	2,04	1,94	16,3	
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,10	105,0	20,0	2,18	2,13	17,4	
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,80	113,0	20,5	2,20	2,07	18,4	
20a	200	80	5,2	9,7	25,4	1670	167	8,15	95,90	139,0	24,2	2,35	2,28	19,8	
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110,0	151,0	25,1	2,37	2,21	21,0	
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121,0	187,0	30,0	2,55	2,46	22,6	
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139,0	208,0	31,6	2,60	2,42	24,0	
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151,0	254,0	37,2	2,78	2,67	25,8	
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,90	178,0	262,0	37,3	2,73	2,47	27,7	
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,00	224,0	327,0	43,6	2,84	2,52	31,8	
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,10	281,0	410,0	51,8	2,97	2,59	36,5	
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,20	350,0	513,0	61,7	3,10	2,68	41,9	
40	400	115	8,0	13,8	61,5	15220	761	15,70	444,0	642,0	73,4	3,23	2,75	48,3	

ИЗГИБ ПРЯМЫХ БРУСЬЕВ

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление оси прямого бруса. *Осью бруса* называется геометрическое место точек центров тяжести поперечных сечений бруса, т.е. сечений, нормальных к оси бруса. Изгиб связан с возникновением в поперечных сечениях бруса *изгибающих моментов*. Если из шести внутренних силовых факторов в сечении бруса отличным от нуля является только один изгибающий момент, изгиб называется *чистым*. Если в поперечных сечениях бруса кроме изгибающего момента действует также поперечная сила, изгиб называется *поперечным*.

Брус, работающий на изгиб, называется *балкой*. Изгиб называется *плоским*, если ось балки после деформации остается плоской линией. Плоскость расположения изогнутой оси балки называется *плоскостью изгиба*. Плоскость действия нагрузочных сил называется *силовой плоскостью*. Если силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения, изгиб называется *прямым* (в противном случае имеет место *косой изгиб*). Главная плоскость инерции поперечного сечения – это плоскость, образованная одной из главных осей поперечного сечения с продольной осью бруса. При плоском прямом изгибе плоскость изгиба и силовая плоскость совпадают.

Будем рассматривать плоский прямой изгиб балок, имеющих по крайней мере одну ось симметрии, совпадающую с силовой плоскостью.

Расчетно-графическая работа № 7

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Вариант задания выдается в виде двузначного шифра. По нему выбирается номер набора задач из табл. 20 и номер строки исходных данных из табл. 21.

Для заданных балок и брусьев (табл. 22) согласно номерам задач из табл. 20 при числовых значениях размеров и нагрузок по строке табл. 21 требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры внутренних силовых факторов;
- 3) для балок подобрать поперечные сечения из условий прочности – круглые и прямоугольные деревянные, стальные из двутавра и двух швеллеров, сложенных стенками (или коробчатое сечение);
- 4) построить эскиз упругой линии для балок с учетом эпюры моментов M .

Т а б л и ц а 20

Список задач, входящих в задание РГР № 7

№ вар	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	1	25	49	73	97	121						
2		2	26	50	74	98	122					
3			3	27	51	75	99	123				
4				4	28	52	76	100	124			
5					5	29	53	77	101	125		
6						6	30	54	78	102	126	
7							7	31	55	79	103	127
8	128							8	32	56	80	104
9	105	129							9	33	57	81
10	82	106	130							10	34	58
11	59	83	107	131							11	35
12	36	60	84	108	132							12
№ вар	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
25	13	37	61	85	109	133						
26		14	38	62	86	110	134					
27			15	39	63	87	111	135				
28				16	40	64	88	112	136			
29					17	41	65	89	113	137		
30						18	42	66	90	114	138	
31							19	43	67	91	115	121
32	122							20	44	68	92	116
33	117	123							21	45	69	93
34	94	118	124							22	46	70
35	71	95	119	125							23	47
36	48	72	96	120	126							24

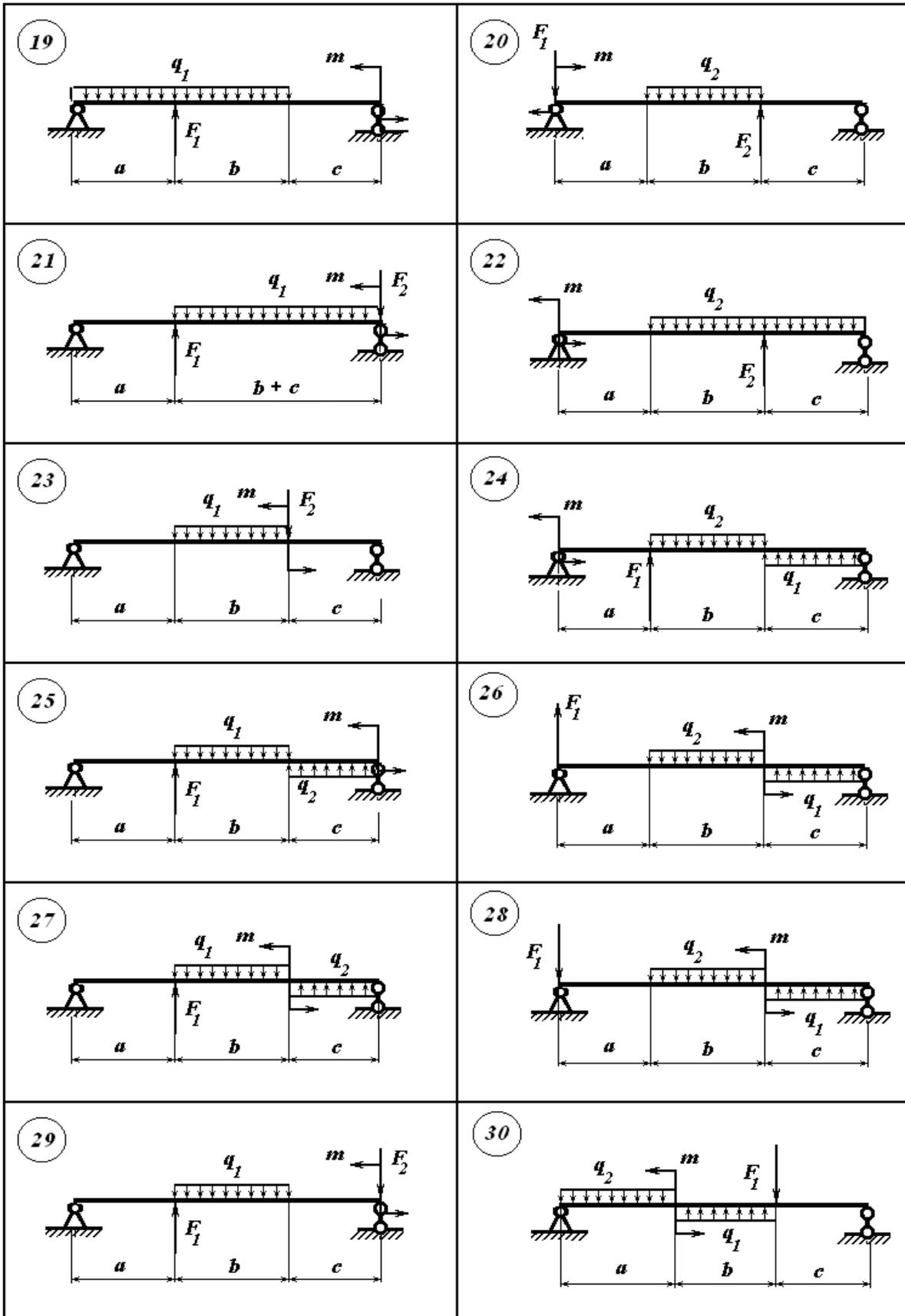
Исходные данные к РГР-7

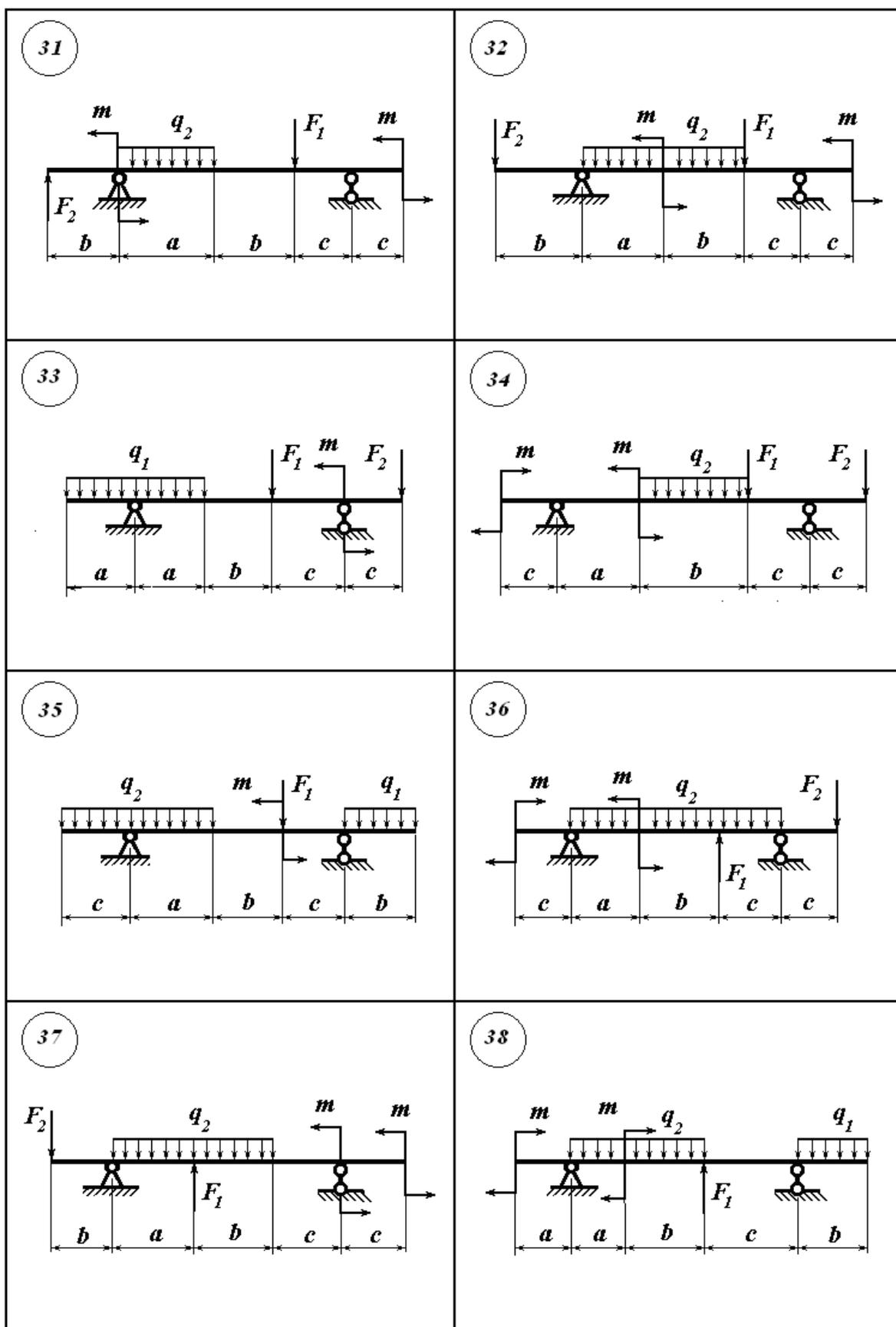
№ вар.	a , м	b , м	c , м	F_1, P_1 , кН	F_2, P_2 , кН	q_1, q , кН/м	q_2 , кН/м	m, M , кНм
1	3,0	2,0	1,0	25	15	6,0	2,0	40
2	2,0	1,5	2,0	30	25	4,0	3,0	45
3	3,5	1,0	3,0	20	35	5,0	4,0	50
4	2,5	2,5	2,5	35	30	3,0	5,0	55
5	2,0	2,0	1,5	15	20	2,0	6,0	60
6	2,5	1,5	3,5	10	15	4,0	2,0	35
7	3,5	2,5	3,0	15	25	5,0	3,0	30
8	2,5	2,0	2,5	20	35	6,0	4,0	45
9	2,0	1,5	2,0	30	20	3,0	5,0	55
10	3,0	1,0	1,5	15	10	2,0	6,0	35
11	3,5	2,0	1,0	25	30	6,0	3,0	40
12	3,0	2,0	1,0	25	15	6,0	2,0	40
13	2,0	1,0	2,0	30	25	4,0	3,0	45
14	3,5	2,5	3,0	20	35	5,0	4,0	50
15	2,5	2,0	2,0	35	30	3,0	2,0	55
16	2,0	1,5	3,0	15	15	2,0	3,0	40
17	2,5	2,5	2,5	10	25	4,0	4,0	45
18	3,5	2,0	1,5	15	35	5,0	5,0	50
19	2,5	1,5	3,5	20	30	6,0	6,0	55
20	2,0	1,0	3,0	30	20	3,0	2,0	60
21	3,0	2,0	2,5	15	15	2,0	3,0	35
22	3,5	1,5	1,0	25	25	6,0	4,0	30
23	2,5	1,0	1,5	25	35	4,0	3,0	45
24	2,5	2,5	1,5	35	20	5,0	2,0	55
25	2,0	1,0	3,0	10	35	4,0	3,0	35
26	3,0	2,0	2,5	15	30	6,0	2,0	40
27	2,5	1,5	2,0	20	25	2,0	4,0	45
28	3,5	1,5	1,5	25	20	3,0	5,0	50
29	3,0	2,0	1,0	30	15	5,0	6,0	55
30	2,5	2,5	1,5	25	10	6,0	2,0	60
31	2,0	1,0	2,0	20	15	2,0	3,0	40
32	3,5	1,5	2,5	15	20	4,0	4,0	50

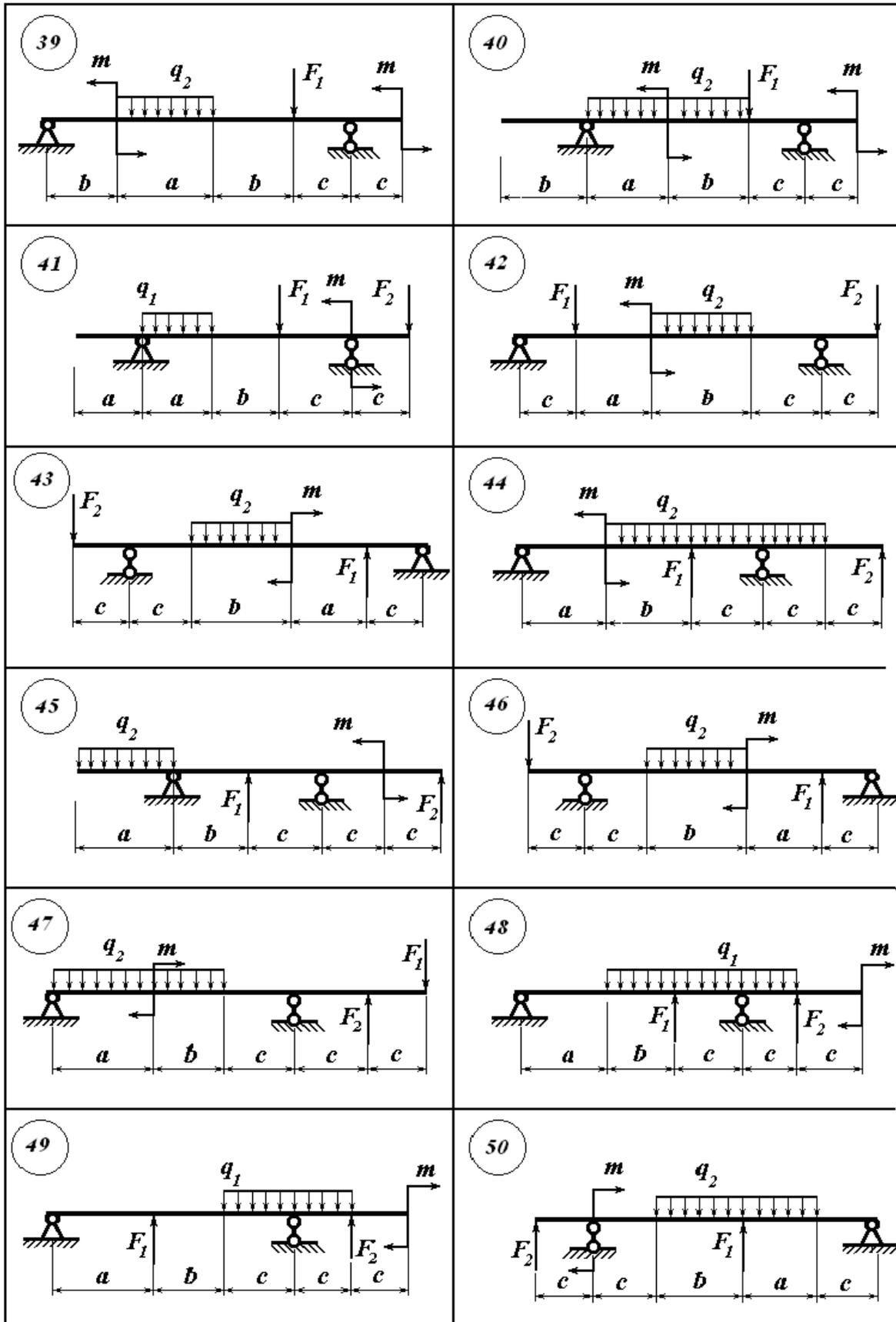
Задания к РГР № 7

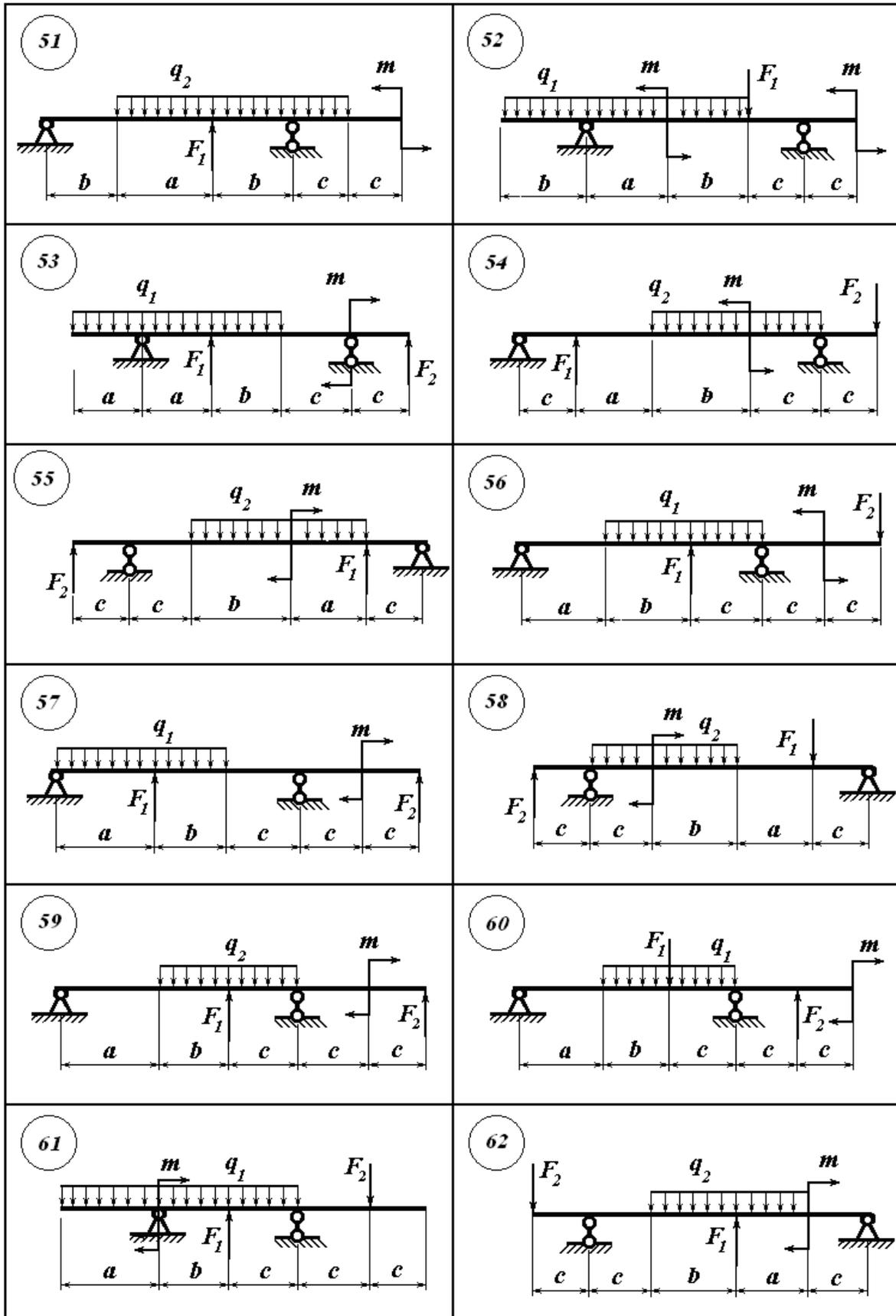
<p>1</p>	<p>2</p>
<p>3</p>	<p>4</p>
<p>5</p>	<p>6</p>
<p>7</p>	<p>8</p>

<p>9</p>	<p>10</p>
<p>11</p>	<p>12</p>
<p>13</p>	<p>14</p>
<p>15</p>	<p>16</p>
<p>17</p>	<p>18</p>

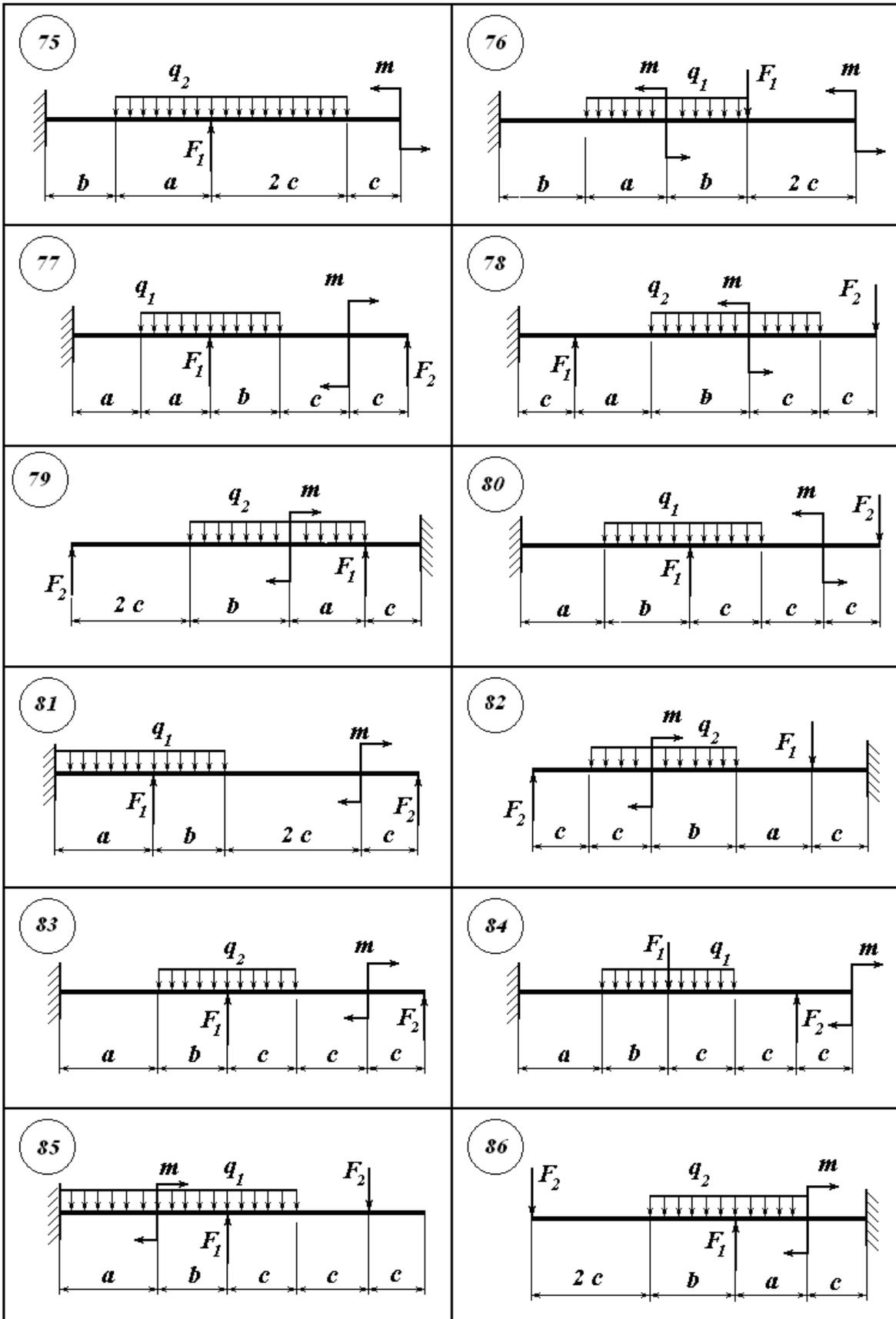


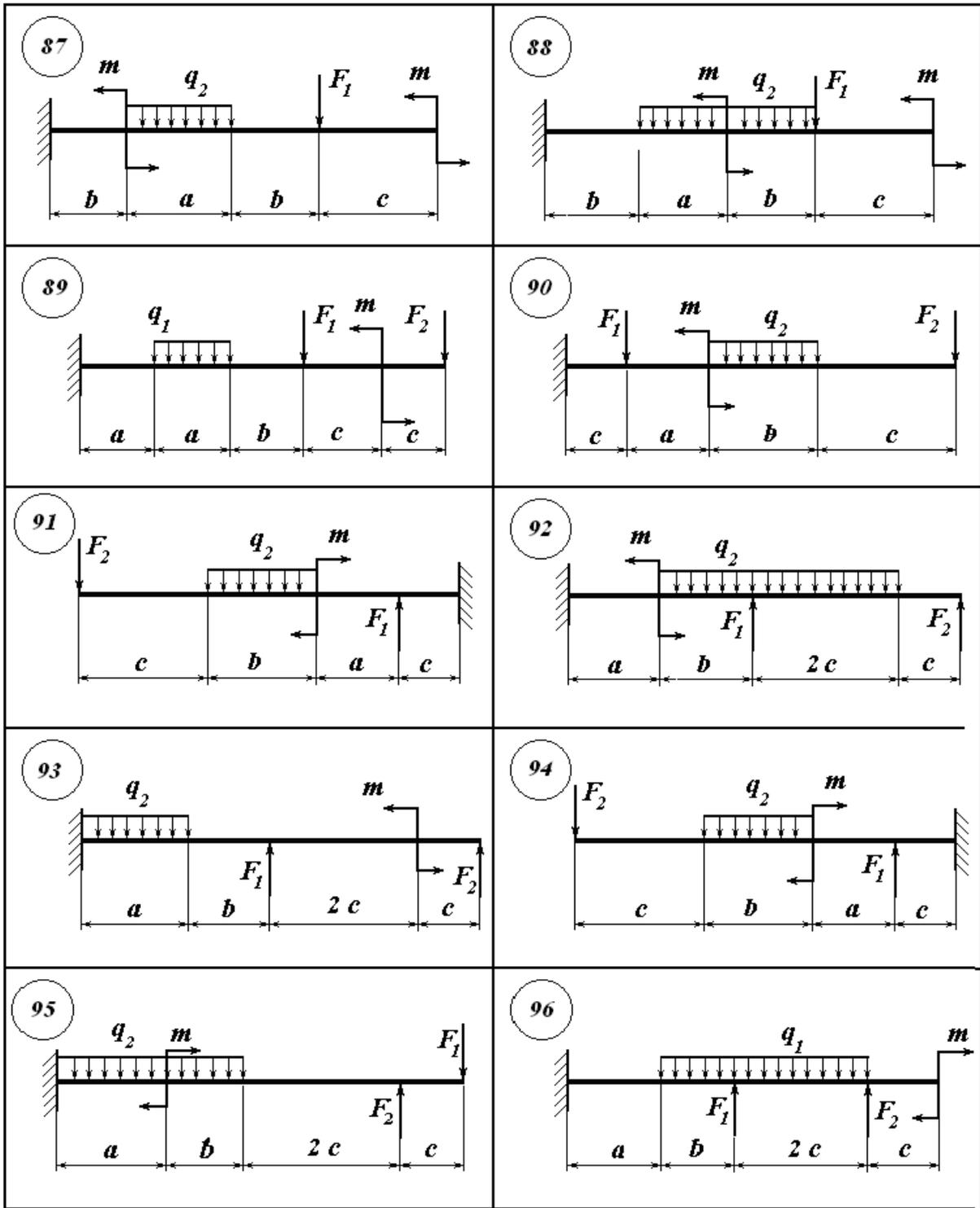






<p>63</p>	<p>64</p>
<p>65</p>	<p>66</p>
<p>67</p>	<p>68</p>
<p>69</p>	<p>70</p>
<p>71</p>	<p>72</p>
<p>73</p>	<p>74</p>

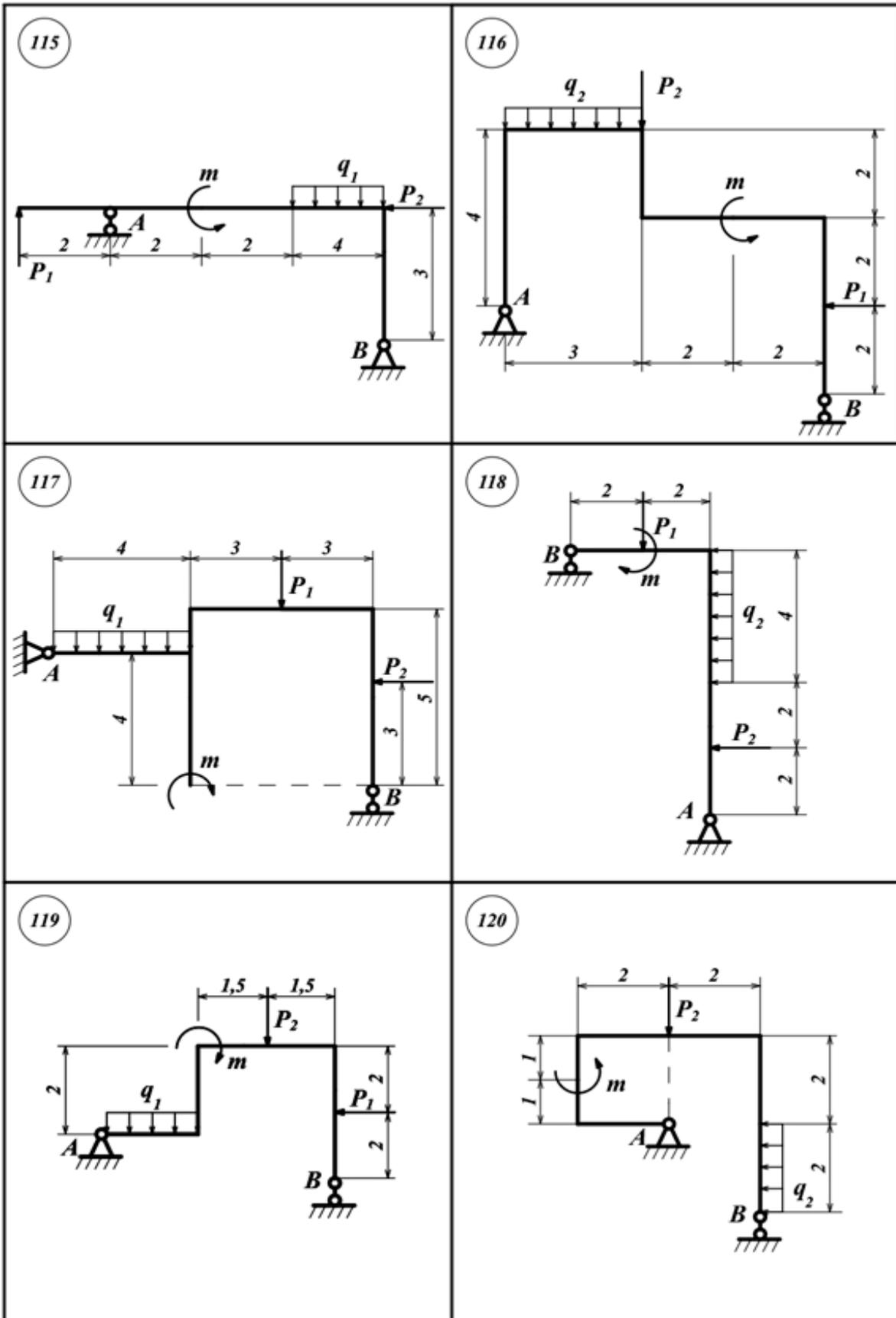


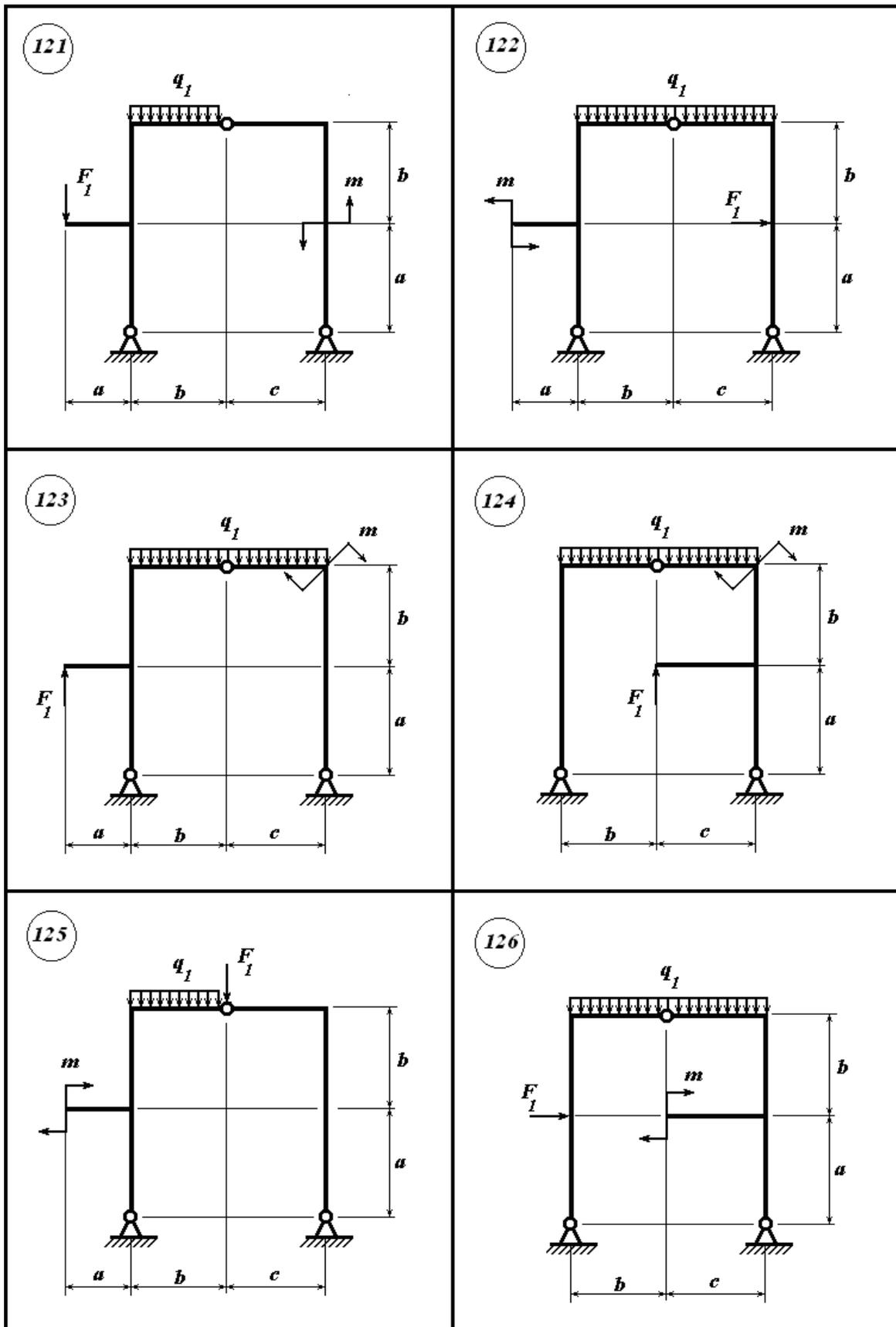


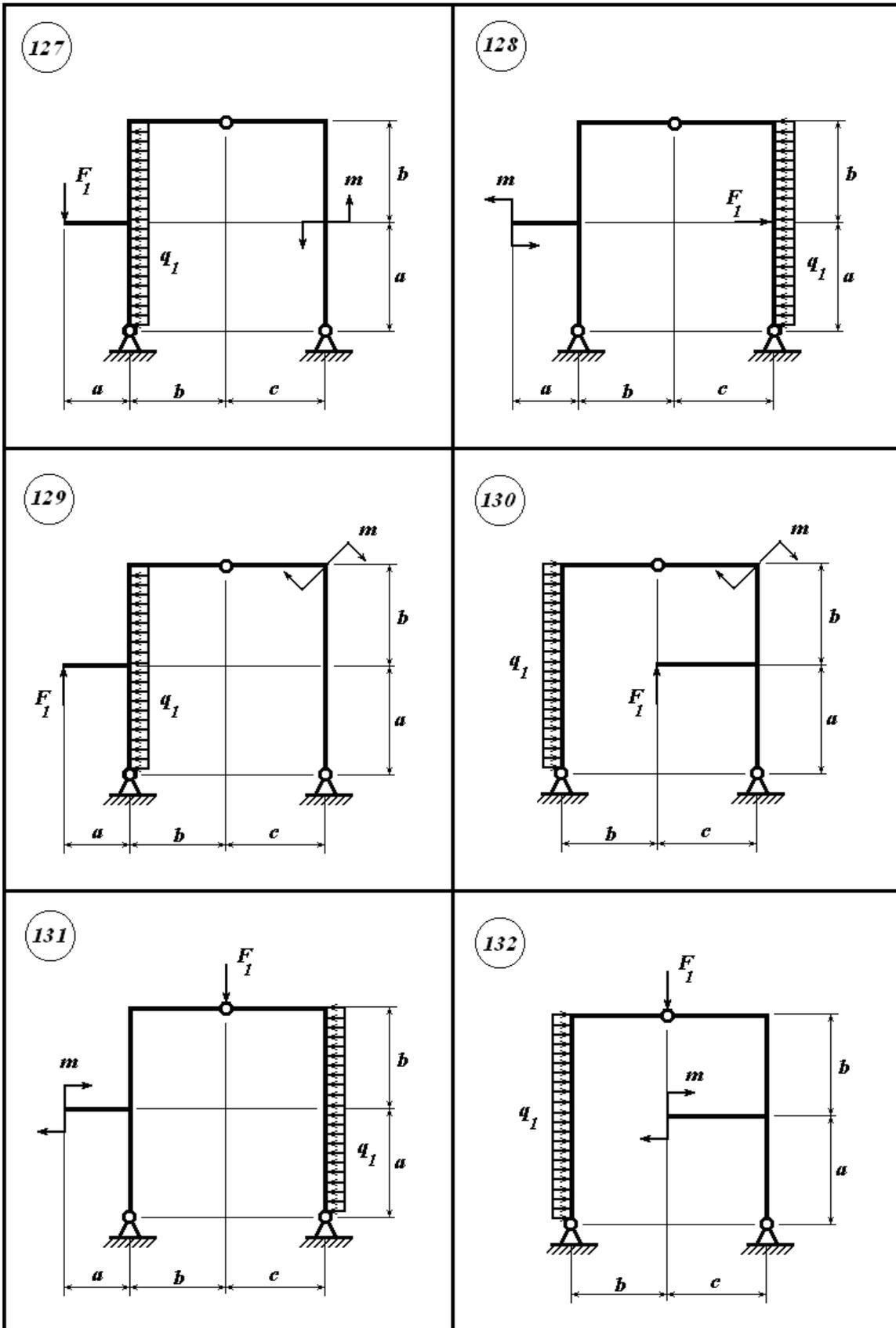
<p>97</p>	<p>98</p>
<p>99</p>	<p>100</p>
<p>101</p>	<p>102</p>

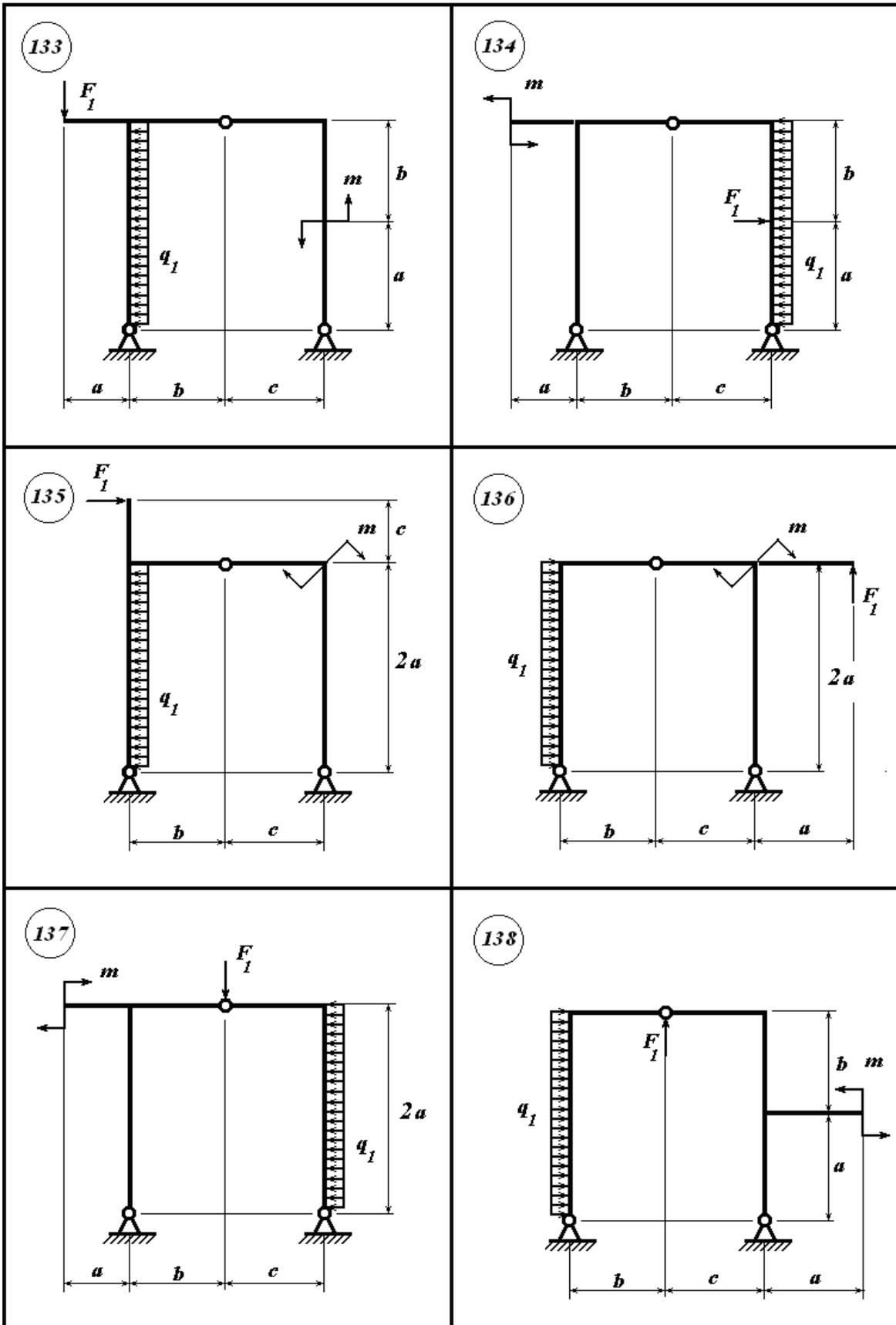
<p>103</p>	<p>104</p>
<p>105</p>	<p>106</p>
<p>107</p>	<p>108</p>

<p>109</p>	<p>110</p>
<p>111</p>	<p>112</p>
<p>113</p>	<p>114</p>









КОНТРОЛЬ ПРАВИЛЬНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР Q И M

1. Если на балку действует сосредоточенная сила, то на эпюре поперечных сил Q под силой – скачок на величину этой силы и в ее направлении (если идти от левого конца балки, а если с правого конца – то скачок в сторону, противоположную действию силы). При этом на эпюре моментов M – стыковка двух линий с образованием уступа (излома) в сторону действия силы.

2. Если на балку действует равномерно распределенная нагрузка, то эпюра Q на этом участке ограничена наклонной прямой, а на эпюре M – кривой II порядка (параболой, выпуклостью в сторону действия нагрузки).

3. Если в каком-либо сечении балки приложен сосредоточенный момент, то на эпюре Q его действие не отразится, а на эпюре M будет скачок, равный по величине приложенному моменту.

4. При следовании от расчетной схемы к эпюре M через эпюру Q порядок линий увеличивается на единицу.

5. Каждая ордината поперечных сил $Q = \frac{dM}{dz}$ представляет собой тангенс угла наклона касательной к эпюре M с горизонтальной осью. Также $q = \frac{dQ}{dz}$, тогда $q = \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2}$.

6. Если $Q = 0$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = 0$, то $M = \text{const}$, на эпюре M – прямая, параллельная нулевой линии.

7. Если Q переходит через ноль, меняя знаки, то на этом участке $M = M_{\max}$ – экстремум.

8. Положительным значениям на эпюре Q соответствует убывание линии графика эпюры M , отрицательным же значениям Q – возрастание.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 7

Пример 1. Для заданной двухопорной балки (рис. 15) определить реакции опор, построить эпюры внутренних силовых факторов, подобрать сечения.

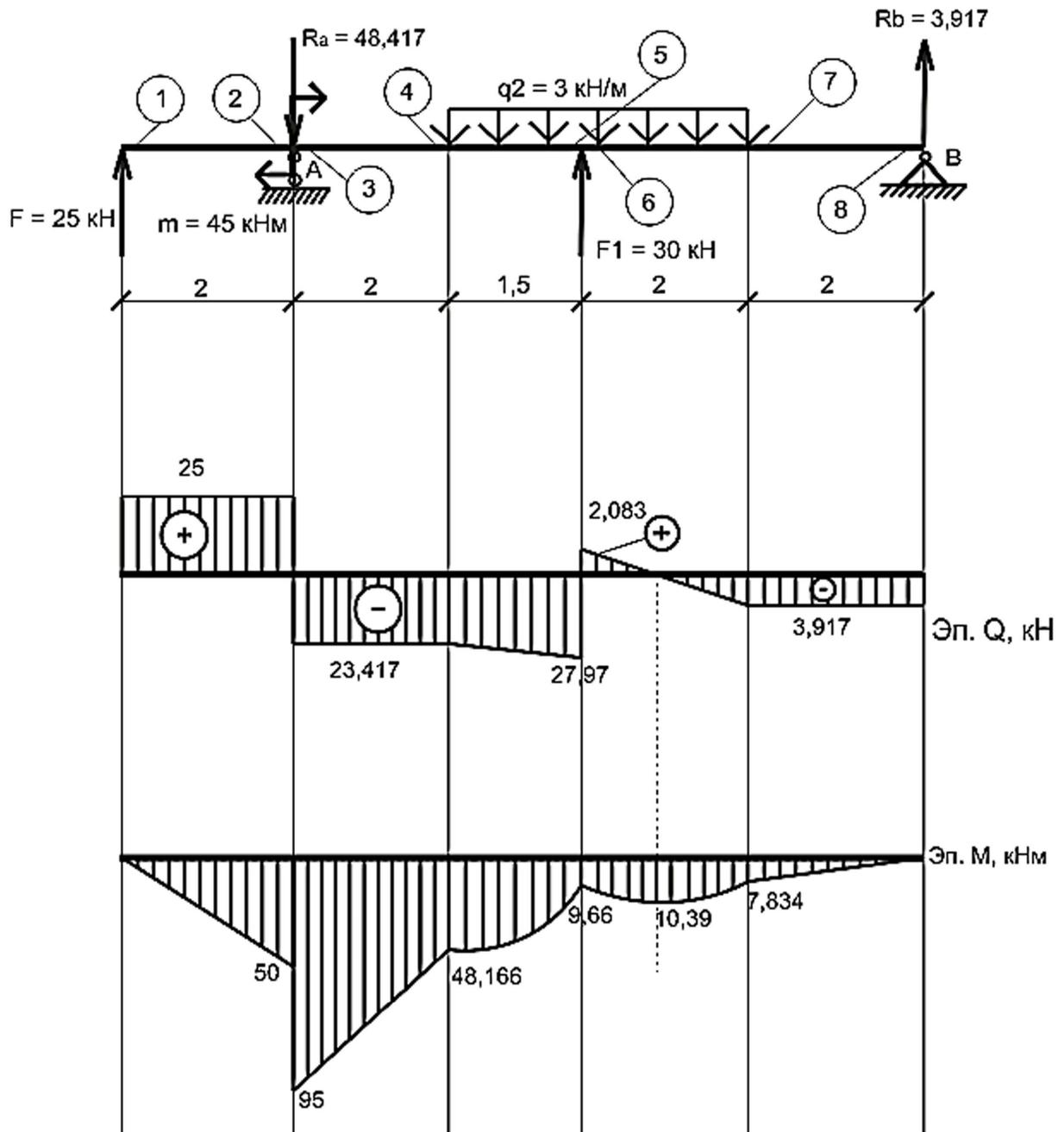


Рис. 15. Балка на двух опорах

I. Находим реакции опор. Для этого составляем уравнения равновесия.

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; \\ 25 \cdot 2 + 45 + 3 \cdot 3,5 \cdot 3,75 - 30 \cdot 3,5 - 7,5 R_B &= 0; \\ 7,5 R_B &= 29,375; \\ R_B &= 3,917 \text{ кН.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum M_B &= 0; \\ 30 \cdot 4 - 3 \cdot 3,5 \cdot 3,75 + 45 - 7,5 R_A + 25 \cdot 9,5 &= 0; \\ 7,5 R_A &= 363,125; \\ R_A &= 48,417 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Проверка: $\sum y = 0$;

$$25 - 48,417 - 3 \cdot 3,5 + 30 + 3,917 = 0;$$
$$0 = 0.$$

II. Построим эпюры внутренних силовых факторов Q и M по характерным точкам. *Характерными* точками называются точки приложения сосредоточенных сил, границы приложения равномерно распределенных нагрузок, точки приложения моментов, шарниры, узлы, заделки.

Построение эпюры Q .

1. Проведём сечение I–I в точке 1 и рассмотрим участок слева от сечения. В него вошла сила $F = 25$ кН, действующая вверх, поэтому на эпюре Q откладываем значение 25 кН вверх от нулевой линии.

2. Проводим сечение в точке 2, расположенной левее шарнира А на бесконечно малом расстоянии, и рассматриваем левую часть балки. В него также вошла только сила $F = 25$ кН, поэтому в точке 2 также откладываем 25 кН вверх от нулевой линии.

3. Проводим сечение в точке 3, рассмотрим левую часть. В него вошла сила $F = 25$ кН, действующая вверх, и сила $R_A = 48,417$ кН, действующая вниз. Поэтому на эпюре в точке 3 откладываем $25 - 48,417 = -23,417$ кН. В точке А образуется скачок на величину реакции R_A .

4. В точке 4 ничего не добавилось, на эпюре откладываем значение 23,417 кН.

5. Проводим сечение в точке 5. Аналогично предыдущим расчетам получаем $25 - 48,417 - 3 \cdot 1,5 = -27,917$ кН.

6. Далее для удобства начнем расчет с правой стороны. Проведем сечение в точке 8, рассмотрим правую часть. В неё вошла только сила $R_B = 3,917$ кН, действующая вверх. Так как расчет ведем с правой стороны, на эпюре откладываем её значение вниз.

7. В точке 7 ничего не изменилось, на эпюре в точке 7 откладываем $3,917$ кН вниз.

8. Проведем сечение в точке 6, рассмотрим правую часть. Добавляется нагрузка $q_2 = 3$ кН/м, действующая вниз. На эпюре откладываем $-3,917 + 3 \cdot 2 = 2,083$ кН.

В точке приложения силы получаем скачок, равный её величине 30 кН.

Полученные точки необходимо последовательно соединить прямыми отрезками, расставить знаки («+» – для участков, расположенных выше нулевой линии, «-» – ниже нулевой линии). Все участки заштриховываются аккуратно вертикальной штриховкой.

Построение эпюры M .

Эпюра моментов M строится на растянутом волокне.

Будем считать момент M положительным, если приложенные силы растягивают нижние волокна балки, отрицательным – если верхние. Эпюра моментов M строится по тем же характерным точкам, что и эпюра поперечных сил Q .

1. Аналогично проводим сечения в точках, где хотим найти момент. В точке 1, в месте приложения силы F , рассматриваем левую часть, в неё вошла только сила $F = 25$ кН, так как эта сила не имеет плеча относительно точки 1, момент равен 0.

2. Проведем сечение на бесконечно малом расстоянии слева от точки А, в точке 2 и рассмотрим левую часть. В неё вошла сила $F = 25$ кН с плечом 2 м относительно точки 2, следовательно, в точке 2 момент равен $25 \cdot 2 = 50$ кНм. Сила растягивает нижние волокна, поэтому значение откладывается вниз от нулевой линии.

3. Проведем сечение на бесконечно малом расстоянии правее точки А, в точке 3. Рассмотрим левую часть. В неё вошла сила $F = 25$ кНм с плечом 2 м относительно точки 3, момент $m = 45$ кНм и сила $R_A = 48,417$ кНм с плечом 0 м относительно

точки 3. Момент так же, как и сила F , растягивает нижние волокна, следовательно, учитывается в расчете также со знаком «+»: $25 \cdot 2 + 50 = 95$ кНм. В точке А произошел скачок на величину приложенного момента.

4. Аналогично находим значения моментов в остальных точках.

В точке 4: $25 \cdot 4 + 45 - 48,417 \cdot 2 = 48,166$ кНм.

В точке 5: $25 \cdot 5,5 + 45 - 48,417 \cdot 3,5 - 3 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = 9,668$ кНм.

5. Для удобства расчетов продолжим расчет с правой стороны балки. В точке 8 момент равен 0.

6. В точке 7: $3,917 \cdot 2 = 7,834$ кНм (растягивает нижние волокна, откладываем вниз).

7. Возвращаемся в точку приложения силы F_1 : $3,917 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9,668$ кНм. Значения слева и справа совпали. В этой точке наблюдается излом в сторону действия силы.

Значения в точках при построении эпюр с левой и правой сторон должны совпасть.

Найденные точки соединяют прямыми, а границы участков с равномерно распределенной нагрузки – параболой, выпуклостью в сторону действия нагрузки.

Необходимо отметить, что на эпюре M по сравнению с эпюрой Q порядок линий увеличивается на единицу, т.е. если на эпюре Q горизонтальная прямая, то на эпюре M – наклонная, если на эпюре Q наклонная, то на эпюре M – парабола и т.д.

Определение экстремума.

Экстремум располагается на эпюре моментов под точкой пересечения эпюры Q с нулевой линией.

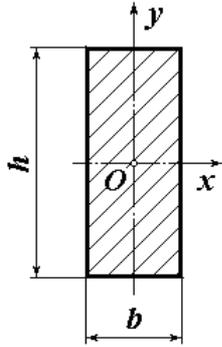
Экстремум определим по формуле $M_{\max} = M_0 \pm \frac{Q_0^2}{2q}$,

где M_0 – значение момента на любой из границ соответствующего участка; Q_0 – значение Q на соответствующей границе участка.

Отсюда $M_{\max} = 9,668 + \frac{2,008^2}{6} = 10,39$ кНм.

III. Подбираем поперечные сечения данной балки.

Подберем деревянное ($[\sigma] = 10$ МПа) прямоугольное сечение с соотношением сторон $h = 2b$.



Условие прочности при изгибе по максимальным нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma] = 10 \text{ МПа},$$

где $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ – расчетное сопротивление дерева (допускаемое напряжение); W_x – момент сопротивления балки.

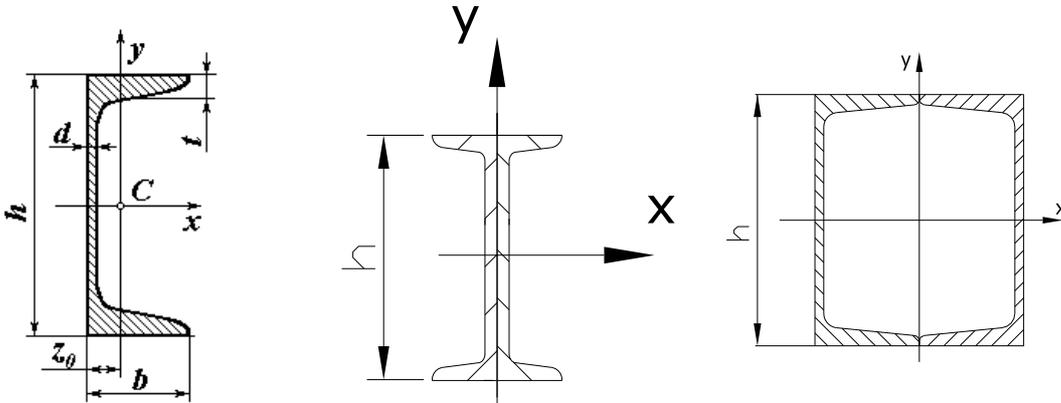
Для прямоугольного сечения: $W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{b \cdot 4b^2}{6} = \frac{2b^3}{3}$.

$$W_x = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{95 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{10 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 9,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 9500 \text{ см}^3.$$

$$b = \sqrt[3]{1,5W} = \sqrt[3]{1,5 \cdot 9500} = 24,24 \text{ см}.$$

Примем $b = 24,5 \text{ см}$, тогда $h = 2b = 49 \text{ см}$.

Подберем стальное ($[\sigma] = 160 \text{ МПа}$) сечение, составленное из двух швеллеров, сложенных стенками, или коробчатое.



$$W = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]}; W_{\text{I}} = \frac{95 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{160 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 0,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 590 \text{ см}^3.$$

$$W_{\text{I}} = \frac{590}{2} = 295 \text{ см}^3. \text{ По сортаменту прокатной стали (ГОСТ}$$

8240-97), табл. 19 подбираем швеллер № 27 с $W_x = 308 \text{ см}^3$.

Пример 2. Для заданной консольной балки (рис. 16) построить эпюры внутренних силовых факторов, подобрать сечения.

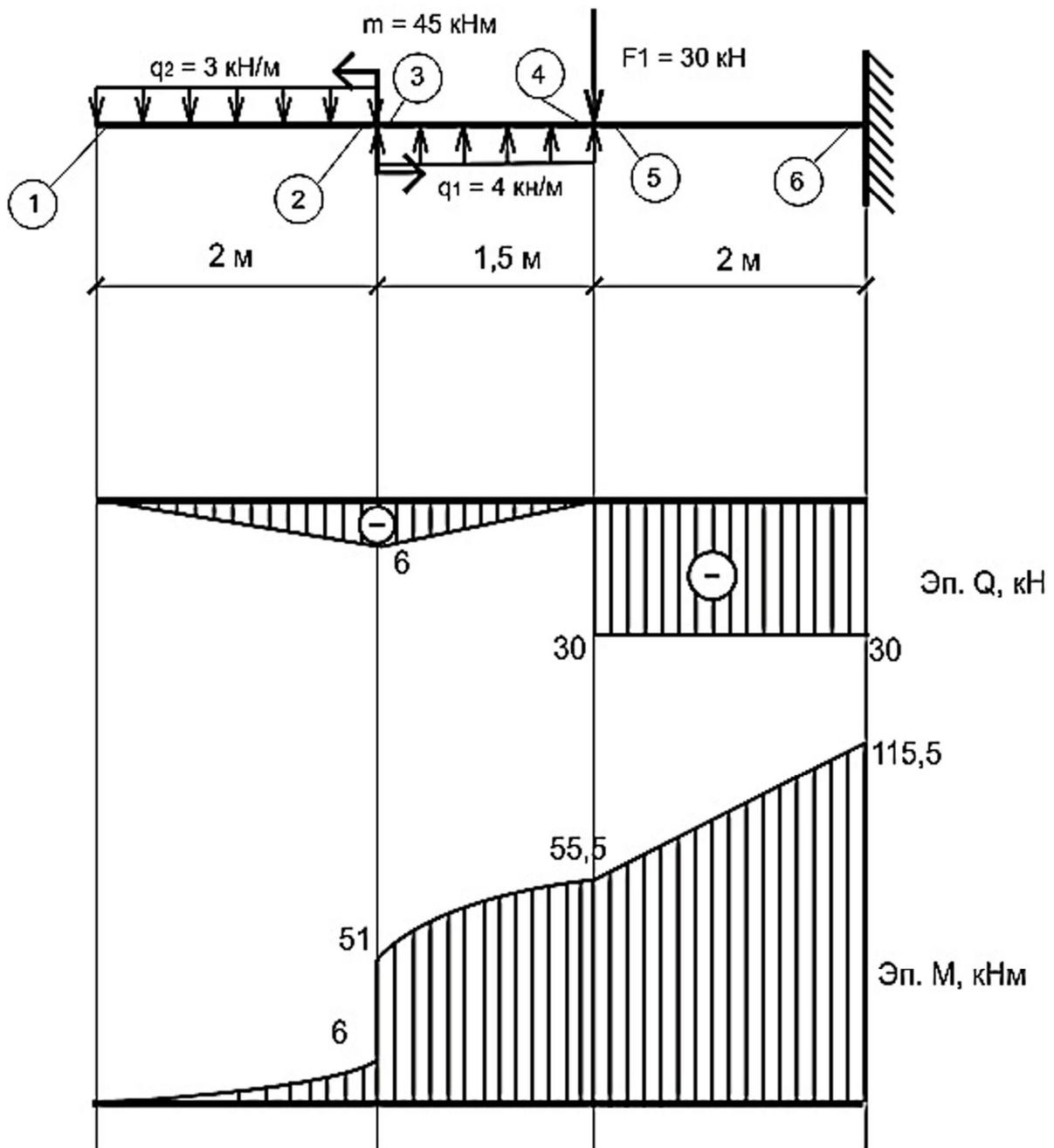


Рис. 16. Балка с жесткой заделкой

Для балки с жёсткой заделкой нет необходимости определять опорные реакции, тогда построение эпюр всегда необходимо начинать со свободного конца балки.

1. Построение эпюры Q .

Расчет ведем с левого конца балки, проводим сечение в точке 1. В отсеченную часть не попало никаких сил, следовательно, в начале этого участка $Q = 0$.

Проводим сечение в точке 2. В отсеченную часть входит нагрузка q_2 , действующая вниз, поэтому на эпюре откладываем: $-3 \cdot 2 = -6$ кН – вниз от нулевой линии.

В точке 3 – аналогично.

Проводим сечение в точке 4. В отсеченную часть входят две нагрузки: q_2 , действующая вниз, и q_1 , действующая вверх. На эпюре откладываем $-3 \cdot 2 + 4 \cdot 1,5 = 0$.

Проводим сечение в точке 5, рассматриваем левую часть. Помимо нагрузок, в неё входит сила $F_1 = 30$ кН, действующая вниз. На эпюре откладываем $-3 \cdot 2 + 4 \cdot 1,5 - 30 = -30$ кН.

В точке 6 – аналогично.

Соединяем полученные точки отрезками прямых.

2. Построение эпюры M .

Начинаем построение также со свободного конца балки. В участок слева от точки 1 не входят моменты, поэтому здесь $M = 0$.

Проводим сечение в точке 2 и рассматриваем левую часть. В неё входит нагрузка q_2 , растягивающая верхние волокна. Момент в этой точке равен: $-3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ кНм.

Проводим сечение в точке 3, рассматриваем левую часть. Помимо нагрузки в неё входит момент $m = 45$ кН, растягивающий верхние волокна. На эпюре откладываем $-3 \cdot 2 \cdot 1 - 45 = -51$ кНм.

Далее все построения выполняются аналогично. Момент в точке 4 равен $-3 \cdot 2 \cdot 2,5 - 45 + 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -55,5$ кНм.

В точке 5 добавилась сила F_1 , но так как её плечо равно нулю, на эпюре значение момента не меняется.

В точке 6 момент равен $-3 \cdot 2 \cdot 4,5 - 45 + 4 \cdot 1,5 \cdot 2,75 - 30 \cdot 2 = -115,5$ кНм.

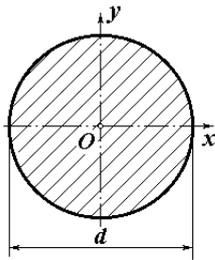
Полученные точки соединяем отрезками прямых, а под нагрузкой – параболой, выпуклостью в сторону действия нагрузки.

По построенным эпюрам можно определить опорные реакции в заделке данной балки: $Q = 30$ кН направлена вверх,

$M = 115,5$ кНм растягивает верхние волокна балки (направлен по часовой стрелке).

3. Подбор сечений.

Выполним подбор круглого деревянного сечения

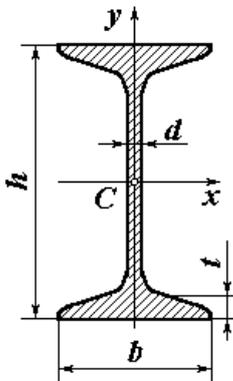


$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma] = 10 \text{ МПа}, \text{ откуда } W_x = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]},$$

где $[\sigma] = 10$ МПа – расчетное сопротивление дерева (допускаемое напряжение); W_x – момент сопротивления круглого сечения балки: $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$.

Тогда требуемый диаметр круглого поперечного сечения балки равен $d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot |M_{\max}|}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 115,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0,49$ м. Принимаем $d = 50$ см.

Выполним подбор стального двутаврового сечения



$$W_x = \frac{115,5 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{160 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 0,722 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 722 \text{ см}^3.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-89) табл. 18 подбираем двутавр № 36 с $W_x = 743 \text{ см}^3$.

Пример 3. Для заданной консольной рамы (рис. 17) построить эпюры внутренних силовых факторов, выполнить проверку.

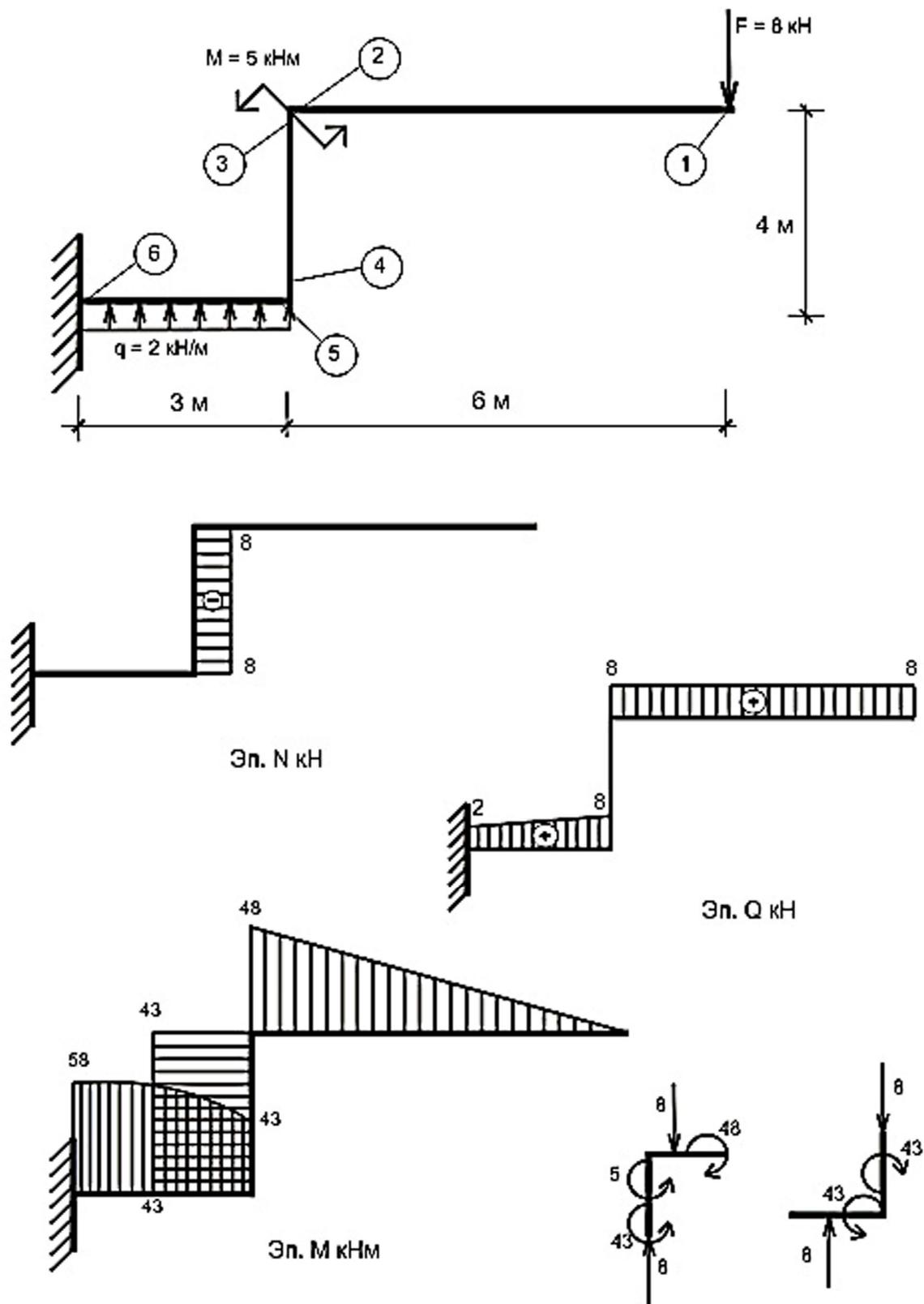


Рис. 17. Рама с жесткой заделкой

Для рамы с жёсткой заделкой нет необходимости находить опорные реакции, тогда начинаем построение эпюр со свободного конца рамы.

1. Построение эпюры поперечных сил Q .

Проводим сечение в точке 1 и рассматриваем правую часть. В неё вошла сила $F = 8$ кН. Откладываем её на эпюре. Сила действует вниз, но так как расчет ведём с правого конца рамы, на эпюре она откладывается вверх.

Проводим сечение в точке 2 и рассматриваем правую часть. В неё также входит только сила $F = 8$ кН. Откладываем её на эпюре.

Переходим на вертикальный стержень. Проводим сечение в точке 3 и рассматриваем верхнюю часть вертикального стержня. Для него нет поперечных сил. В точке 4 – аналогично.

Проводим сечение в точке 5, рассматриваем правую часть. Из поперечных сил в неё входит только сила $F = 8$ кН, откладываем её на эпюре. Аналогично проводим сечение в точке 6, рассматриваем правую часть. Добавилась нагрузка $q = 2$ кН/м, действующая в противоположную сторону, поэтому в точке 6 на эпюре откладываем $8 - 2 \cdot 3 = 2$ кН.

Соединяем полученные точки отрезками прямых.

2. Построение эпюры продольных сил N .

Значение на эпюре положительное, если продольная сила растягивает стержень, отрицательное – если сжимает.

На стержень 1–2 не действуют продольные силы. Проводим сечение в точке 3, рассматриваем верхнюю часть вертикального стержня. На него действует продольная сила $F = 8$ кН, сжимающая стержень, следовательно, значение на эпюре будет отрицательным. В точке 4 – аналогично.

На горизонтальный стержень 5–6 не действуют продольные силы.

3. Построение эпюры моментов M .

Эпюра моментов строится на растянутом волокне. Проводим сечение в точке 1, рассматриваем правую часть. В неё вошла

только сила $F = 8$ кН с плечом относительно этой точки равным нулю. Следовательно, момент в этой точке равен нулю.

Проводим сечение в точке 2, рассматриваем правую часть. В неё вошла сила $F = 8$ кН с плечом 6 м, поэтому в точке 2 момент равен $8 \cdot 6 = 48$ кНм. Растягивает верхние волокна, поэтому на эпюре откладываем значение 48 кНм вверх.

Проводим сечение в точке 3, рассматриваем правую часть. В неё помимо силы $F = 8$ кН с плечом 6 м входит момент, равный 5 кНм. На вертикальном стержне сила F растягивает левые волокна, момент – правые. Поэтому в точке 3 откладываем $5 - 48 = -43$ кНм влево. В точке 4 – аналогично.

В точке 5 действуют та же силы с тем же плечом и тот же момент. Они растягивают верхние волокна. На эпюре откладываем 43 кНм вверх.

Проводим сечение в точке 6. Здесь момент равен $-8 \cdot 9 + 5 + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = -58$ кНм (растягивает верхние волокна). Откладываем значение на эпюре, соединяем полученные точки прямыми, а под нагрузкой – параболой выпуклостью в сторону действия нагрузки.

По построенным эпюрам можно определить опорные реакции в заделке данной рамы: $Q = 2$ кН, направлена вверх; $M = 58$ кНм, растягивает верхние волокна балки (направлен против часовой стрелки); продольная сила N равна нулю.

4. Проверка правильности построения эпюр методом вырезания узлов.

Поочерёдно вырезаем узлы и откладываем на них все силы и моменты, учитывая направления их действия. Положительная сила Q вращает узел по часовой стрелке, отрицательная – против.

Узел должен находиться в равновесии, т.е. сумма горизонтальных сил, сумма вертикальных сил и сумма моментов должны быть равны нулю (рис. 17).

Пример 4. Для заданной распорной рамы (рис. 18) определить реакции опор, построить эпюры внутренних силовых факторов, выполнить проверку.

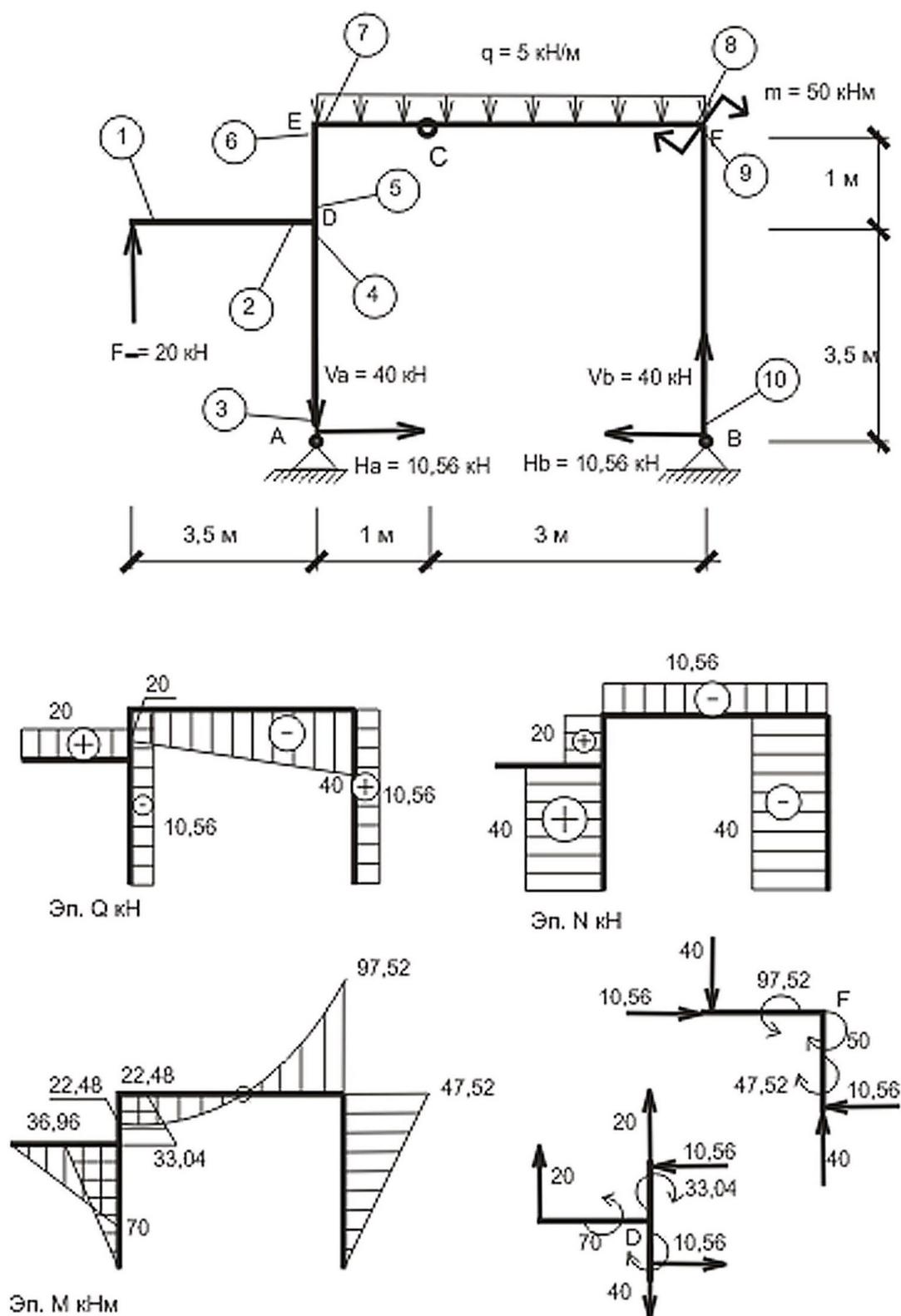


Рис. 18. Рама с промежуточным шарниром

1. Определяем опорные реакции, а именно:

$$\sum m_A = 0;$$

$$20 \cdot 3,5 + 5 \cdot 4 \cdot 2 + 50 - 4V_B = 0;$$

$$V_B = 40 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = 0;$$

$$-50 + 5 \cdot 4 \cdot 2 - 20 \cdot 7,5 + 4V_A = 0;$$

$$V_A = 40 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum y = 0;$

$$20 - 40 - 5 \cdot 4 + 40 = 0;$$

$$\sum m_c^{\text{лев}} = 0;$$

$$5 \cdot 1 \cdot 0,5 - 20 \cdot 4,5 + 40 \cdot 1 + 4,5 H_A = 0;$$

$$H_A = 10,56 \text{ кН.}$$

$$\sum m_c^{\text{пр}} = 0;$$

$$5 \cdot 3 \cdot 1,5 + 50 - 40 \cdot 3 + 4,5 H_B = 0;$$

$$H_B = 10,56 \text{ кН.}$$

Проверка: $\sum x = 0;$

$$10,56 - 10,56 = 0;$$

2. Построение эпюры поперечных сил Q .

Поочерёдно проводим сечения в точках 3, 4, 5 и 6 и рассматриваем нижнюю часть рамы. В неё во всех четырёх случаях входит только поперечная сила $H_A = 10,56$ кН. Откладываем её на эпюре. Отрицательные силы будем откладывать внутрь рамы, положительные – наружу.

Проведем сечения в точках 1 и 2, отбросим правую часть рамы и видим, что на консольную часть действует только сила $F_1 = 20$ кН. Откладываем её на эпюре.

Проводим сечение в точке 7 и рассматриваем левую часть рамы. Из поперечных относительно горизонтального ригеля сил в неё вошли $F_1 = 20$ кН, действующая вверх, и $V_A = 40$ кН, действующая вниз. Поэтому на эпюре в точке 7 откладываем $20 - 40 = -20$ кН.

Проводим сечение в точке 8 и рассматриваем левую часть. Помимо сил F_1 и V_A в неё входит нагрузка. Поэтому на эпюре откладываем $20 - 40 - 5 \cdot 4 = -40$ кН.

Для удобства продолжим расчёт с правого конца рамы. Проводим сечение в точке 10 и рассматриваем нижнюю часть рамы. Из поперечных сил в неё входит только $H_B = 10,56$ кН. Откладываем её на эпюре.

В точке 9 ничего не изменилось, действует только сила H_B , откладываем её значение также на эпюре.

Соединяем полученные точки отрезками.

3. Построение эпюры продольных сил N .

Видно, что на вертикальный стержень 3–4 действует только сила $V_A = 40$ кН, растягивающая стержень. Откладываем её на эпюре со знаком «+».

На участке 5–6 помимо силы V_A действует сила $F_1 = 20$ кН, сжимающая стержень. Поэтому на эпюре откладываем $40 - 20 = 20$ кН.

На консольный стержень 1–2 не действуют продольные силы.

Реакция $V_B = 40$ кН сжимает правую стойку рамы, поэтому на эпюре продольных сил откладываем значение -40 кН. Аналогично видно, что реакция $H_B = 10,56$ кН сжимает горизонтальный ригель 7–8, откладываем её значение на эпюре.

4. Построение эпюры моментов M .

Эпюра M строится на растянутом волокне. Примем при растяжении внешних волокон рамы момент M отрицательным, внутренних – положительным.

Проведем сечение в точке 1 и рассмотрим левую часть рамы. В нее вошла только сила $F_1 = 20$ кН с плечом относительно этой точки, равным нулю. Следовательно, момент в этой точке равен нулю.

Проведем сечение в точке 2 и рассмотрим левую часть рамы, в нее вошла сила $F_1 = 20$ кН с плечом 3,5 м. Следовательно, момент в этой точке равен $20 \cdot 3,5 = 70$ кНм, растягивает нижние волокна, откладываем вниз.

Проведем сечение в точке 3, видим, что момент равен нулю.

Проведем сечение в точке 4 и рассмотрим нижнюю часть, в нее вошла сила $H_A = 10,56$ кН с плечом 3,5 м, следовательно, момент в этой точке равен $10,56 \cdot 3,5 = 36,96$ кНм, растягивает наружные волокна, откладываем влево.

Проведем сечение в точке 5 и рассмотрим нижнюю часть. В нее вошли сила $F_1 = 20$ кН с плечом 3,5 м и горизонтальная сила $H_A = 10,56$ кН с плечом 3,5 м. H_A растягивает наружные волокна, а F_1 действует в противоположном направлении, следовательно, $M = 20 \cdot 3,5 - 10,56 \cdot 3,5 = 33,04$ кНм, откладываем вправо. Проводим сечение в точке 6 и аналогично предыдущим расчетам получаем: $M = 20 \cdot 3,5 - 10,56 \cdot 4,5 = 22,48$ кНм.

Далее аналогично. В точке 7: на горизонтальном стержне откладываем вниз то же значение $M = 22,48$ кНм, что и в точке 6. Видим, что узел рамы находится в равновесии.

Для удобства продолжим расчет с правой стороны.

В точке 10 видно, что момент равен нулю.

В точке 9: $M = -10,56 \cdot 4,5 = -47,52$ кНм, растягивает наружные волокна, откладываем вправо.

В точке 8: $M = -10,56 \cdot 4,5 - 50 = -97,52$ кНм.

В промежуточном шарнире момент всегда равен нулю, что можно получить, посчитав в нем момент.

Полученные точки соединяются прямыми, а границы нагрузки – параболой выпуклостью в сторону действия нагрузки.

5. Проверка правильности построения эпюр методом вырезания узлов производится так же, как и в раме с жесткой заделкой (пример 3). Окончательные эпюры и проверка узлов представлены на рис. 18.

$$\begin{aligned} \text{Узел F: } \sum m_F &= 0; & -97,52 + 50 + 47,52 &= 0; \\ \sum y &= 0; & -40 + 40 &= 0; \\ \sum x &= 0; & 10,56 - 10,56 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Узел D: } \sum m_D &= 0; & 70 - 33,04 - 36,96 &= 0; \\ \sum y &= 0; & 20 + 20 - 40 &= 0; \\ \sum x &= 0; & -10,56 + 10,56 &= 0. \end{aligned}$$

Расчетно-графическая работа № 8

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Задание на расчетно-графическую работу выдается в виде двузначного шифра. По нему выбирается номер расчетной схемы стержня (табл. 24) и номер строки исходных данных (табл. 23). Работы, выполненные не по шифру, преподавателем не рецензируются.

При выполнении работы в пояснительной записке должны быть отражены следующие этапы расчета.

1. У заданного статически неопределимого стержня убрать нижнюю опору. Для получившегося статически определимого стержня:

- 1) построить эпюру продольных сил;
- 2) из условия прочности подобрать площади поперечных сечений стержней;
- 3) построить эпюру нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня;
- 4) построить эпюру перемещений.

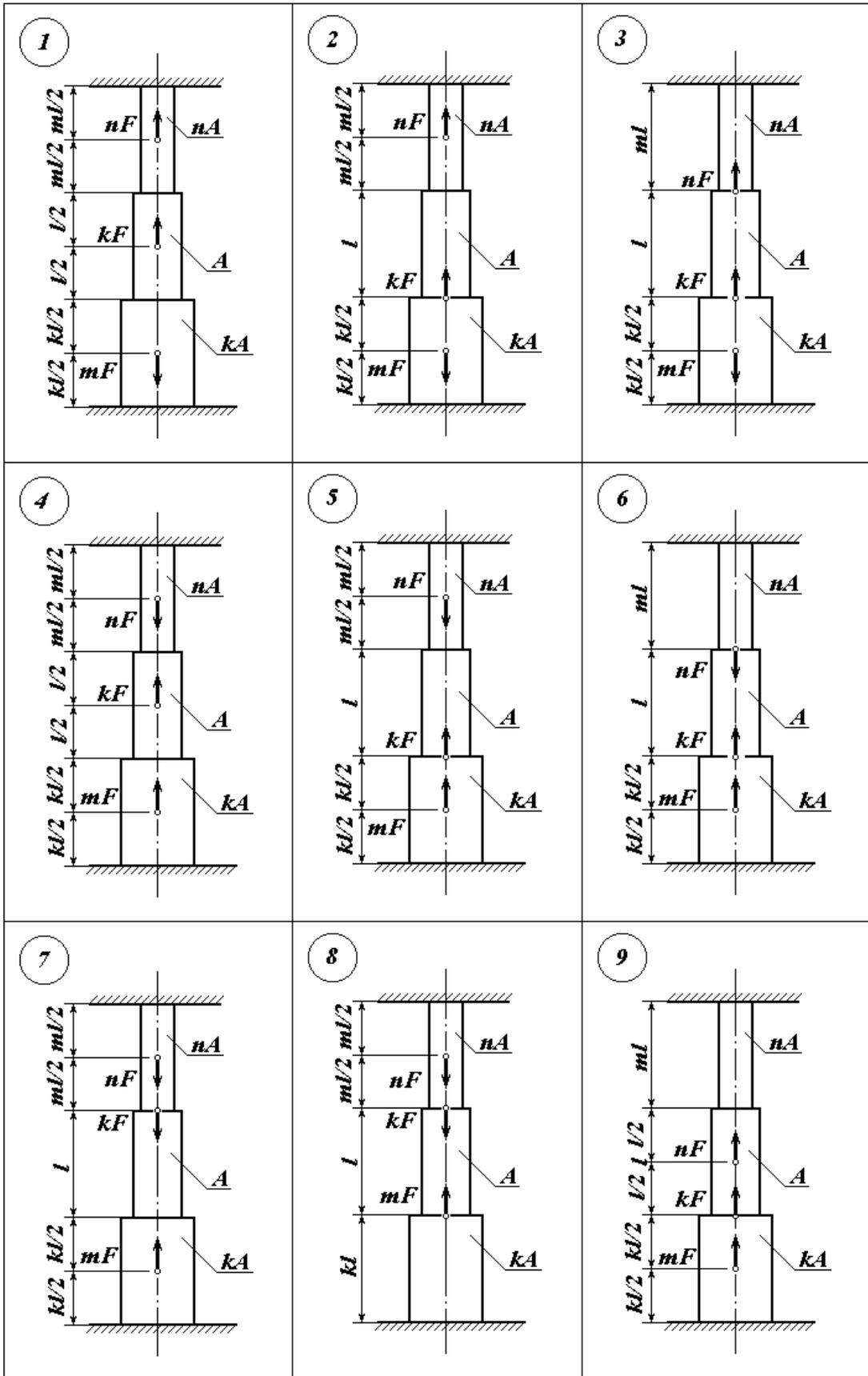
2. Для заданного статически неопределимого стержня:

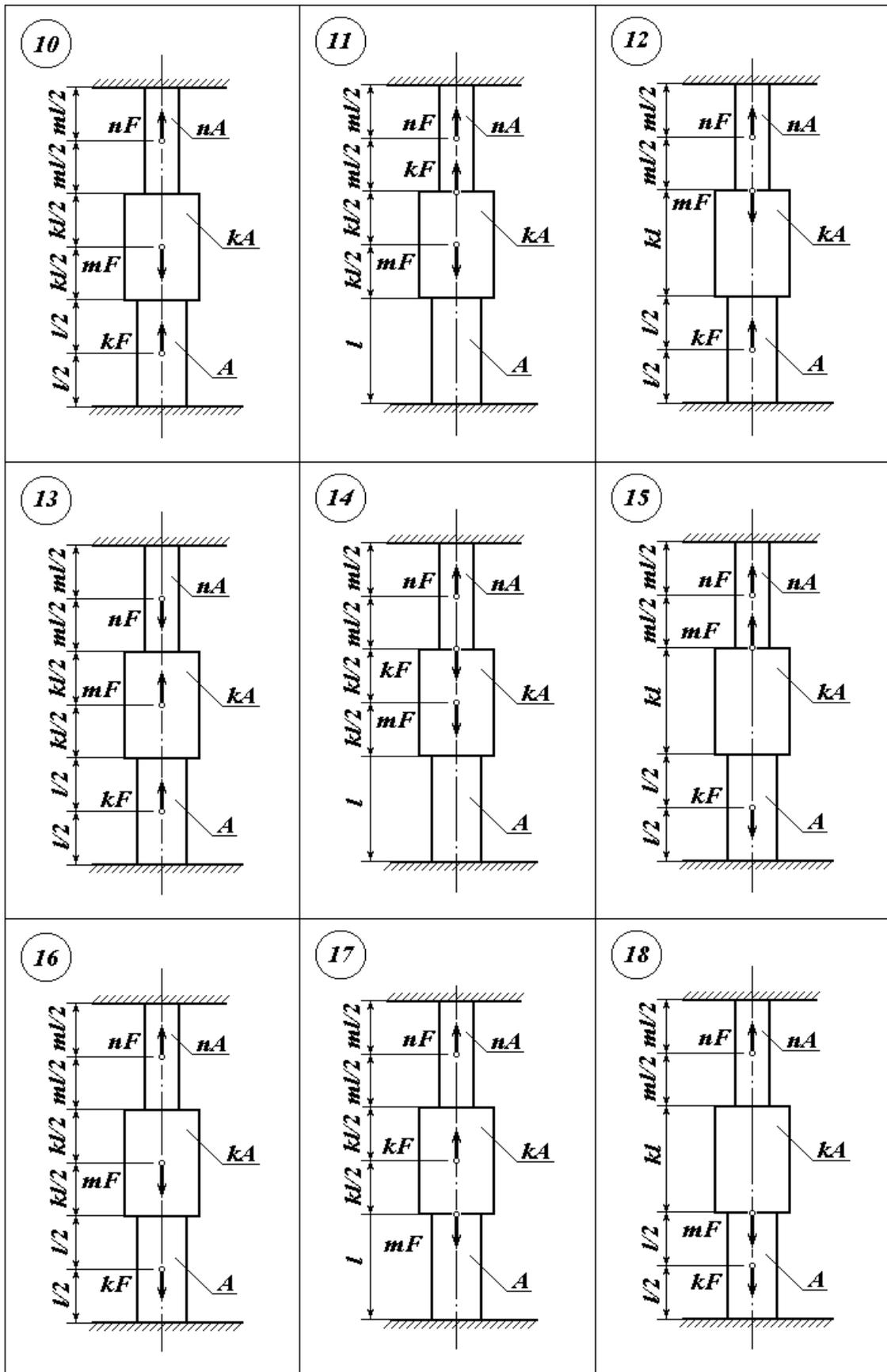
- 1) раскрыть статическую неопределимость;
- 2) построить эпюру продольных сил;
- 3) построить эпюру нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня;
- 4) построить эпюру перемещений;
- 5) сравнить величины полученных напряжений для статически определимого и неопределимого стержней, сделать выводы.

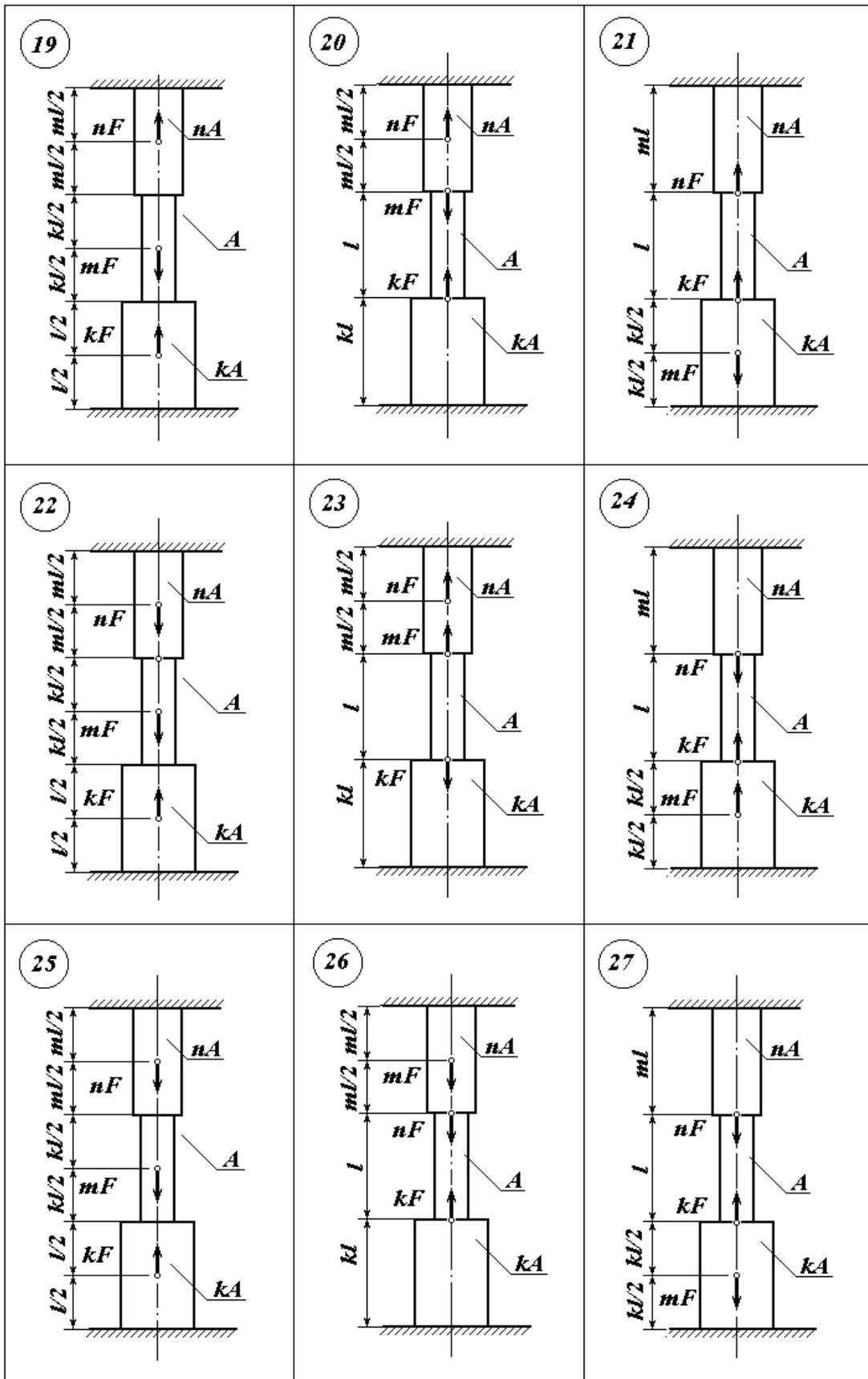
Исходные данные к РГР № 8

№ строки	m	k	n	l , м	F , кН	Материал стержней
1	1,0	1,9	1,5	0,5	120	Алюминий
2	1,1	1,8	1,6	0,3	130	Бронза
3	1,2	1,7	1,7	1,1	140	Латунь
4	1,3	1,6	1,8	0,9	150	Медь
5	1,4	1,5	1,9	0,7	160	Сталь углеродистая
6	1,5	1,4	1,0	0,5	180	Сталь легированная
7	1,6	1,3	1,1	0,3	200	Алюминий
8	1,7	1,2	1,2	1,1	210	Бронза
9	1,8	1,1	1,3	0,9	220	Латунь
10	1,9	1,0	1,4	0,7	230	Медь
11	1,5	1,0	1,5	0,5	240	Сталь углеродистая
12	1,6	1,1	1,6	0,3	250	Сталь легированная
13	1,7	1,2	1,7	1,1	230	Алюминий
14	1,8	1,3	1,8	1,0	210	Бронза
15	1,9	1,4	1,9	0,9	190	Латунь
16	1,0	1,5	1,0	0,8	170	Медь
17	1,1	1,6	1,1	0,7	150	Сталь углеродистая
18	1,2	1,7	1,2	0,6	130	Сталь легированная
19	1,3	1,8	1,3	0,5	120	Алюминий
20	1,4	1,9	1,4	0,4	130	Бронза
21	1,9	1,5	1,0	0,3	140	Латунь
22	1,8	1,6	1,1	1,2	150	Медь
23	1,7	1,7	1,2	1,1	160	Сталь углеродистая
24	1,6	1,8	1,3	1,0	170	Сталь легированная
25	1,5	1,9	1,4	0,9	180	Алюминий
26	1,4	1,0	1,5	0,8	190	Бронза
27	1,3	1,1	1,6	0,5	200	Латунь
28	1,2	1,2	1,7	1,0	210	Медь
29	1,1	1,3	1,8	0,5	220	Сталь углеродистая
30	1,0	1,4	1,9	1,0	230	Сталь легированная
31	2,0	1,5	1,0	0,5	240	Алюминий
32	1,0	2,0	1,5	1,1	250	Медь

Задания к расчетно-графической работе № 8







ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 8

Часть 1. Расчет на прочность статически определимого ступенчатого стержня по допускаемым напряжениям

Исходные данные для расчета:

Стержень медный;

Модуль упругости меди $E = 1,1 \cdot 10^5$ МПа;

Допускаемое напряжение для меди $[\sigma] = 75$ МПа.

1. Рассматриваемый стержень (рис. 19) состоит из 6 участков, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы и места изменения размеров поперечного сечения.

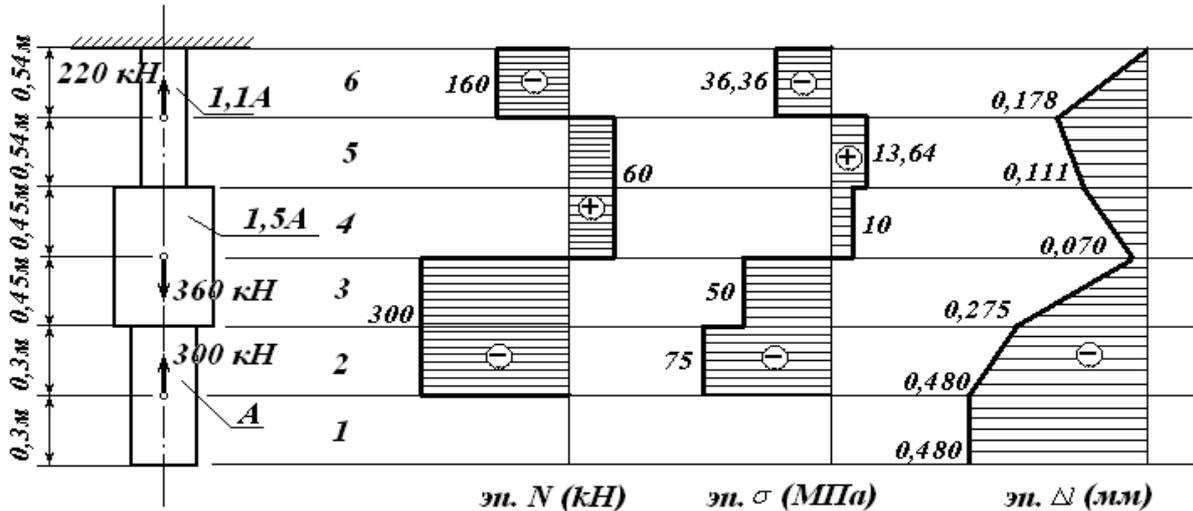


Рис. 19. Статически определимый ступенчатый стержень

Проводя произвольные сечения в пределах каждого участка стержня и рассматривая его нижнюю часть (отбрасывая часть с заделкой), находим продольные силы на каждом участке стержня, одновременно строя эпюру продольных сил N . По эпюре N можно определить продольную силу в заделке, которая равна – 160 кН.

2. Для определения опасного сечения находим нормальные напряжения на каждом участке стержня, а именно: $\sigma = \frac{N}{A}$.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 0;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-300}{A};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-300}{1,5A} = \frac{-200}{A};$$

$$\sigma_4 = \frac{60}{1,5A} = \frac{40}{A};$$

$$\sigma_5 = \frac{60}{1,1A} = \frac{54,55}{A};$$

$$\sigma_6 = \frac{-145,45}{A}.$$

Из условий прочности для опасного (второго) участка при растяжении-сжатии: $|\sigma_{\max}| = |\sigma_2| = \frac{300}{A} \leq [\sigma] = 75 \text{ МПа}$,

отсюда $A = \frac{300}{75} = \frac{300 \cdot 10^3}{75 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 40 \text{ см}^2$.

3. Далее можно определить площадь поперечного сечения каждого участка стержня и их размеры, зная форму.

Например. Подберем **круглое сечение**. $A = \frac{\pi D^2}{4}$, отсюда

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3,14}} = 0,071 \text{ м} = 7,1 \text{ см}. \text{ Примем } D = 7 \text{ см}.$$

Подберем **квадратное сечение**. $A = b^2$, отсюда

$$b = \sqrt{A} = \sqrt{4 \cdot 10^{-3}} = 0,063 \text{ м} = 6,3 \text{ см}. \text{ Примем } b = 6,5 \text{ см}.$$

4. Построение эпюры нормальных напряжений.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях участков равны

$$\sigma_1 = 0;$$

$$\sigma_2 = \frac{-300}{A} = \frac{-300 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = -75 \cdot 10^6 \text{ Па} = -75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{-200 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = 10 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = 13,64 \text{ МПа};$$

$$\sigma_6 = -36,36 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений (рис. 19).

5. Построение эпюры перемещений поперечных сечений вдоль оси.

Для построения эпюры относительных перемещений используем закон Гука для абсолютных удлинений: $\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \sigma \frac{l}{E}$.

Эпюру перемещений следует строить, начиная от заделки, перемещение сечения в которой равно нулю. Последовательно прибавляя удлинения нижележащих участков.

$$\Delta l_6 = \sigma_6 \frac{l_6}{E} = \frac{-36,36 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 0,54 \text{ м}}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ Па}} = -0,000178 \text{ м} = -0,178 \text{ мм};$$

$$\Delta l_5 = \sigma_5 \frac{l_5}{E} + \Delta l_6 = \frac{13,64 \cdot 10^6 \cdot 0,54 \text{ м}}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6} \cdot (10^3) - 0,178 = -0,111 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \sigma_4 \frac{l_4}{E} + \Delta l_5 = -0,070 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = -0,275 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = -0,480 \text{ мм};$$

$$\Delta l_1 = -0,480 \text{ мм} - \text{изменение длины стержня. Сожмётся на } 0,48 \text{ мм}.$$

По полученным перемещениям сечений строим эпюру перемещений (рис. 19).

Часть 2. Расчет статически неопределимого ступенчатого стержня

Исходные данные для расчета все те же. К статически определенному стержню подводим вторую опору (заделку). Стержень становится однажды статически неопределим (рис. 20).

Так как задача статически неопределима, то для определения опорных реакций необходимо рассмотреть три стороны задачи: статическую, геометрическую, физическую.

1. Статическая сторона задачи.

Из уравнения статического равновесия стержня АВ $\sum y = 0$ (рис. 20) имеем

$$\begin{aligned} -V_A + 220 - 360 + 300 - V_B &= 0; \\ V_A + V_B &= 160. \end{aligned}$$

2. Геометрическая сторона задачи.

Воспользуемся условием совместности деформаций, выражающим то, что расстояние между точками А и В не изменяется, т.е. $\Delta l_{AB} = 0$; $\Delta l_{AB} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 = 0$.

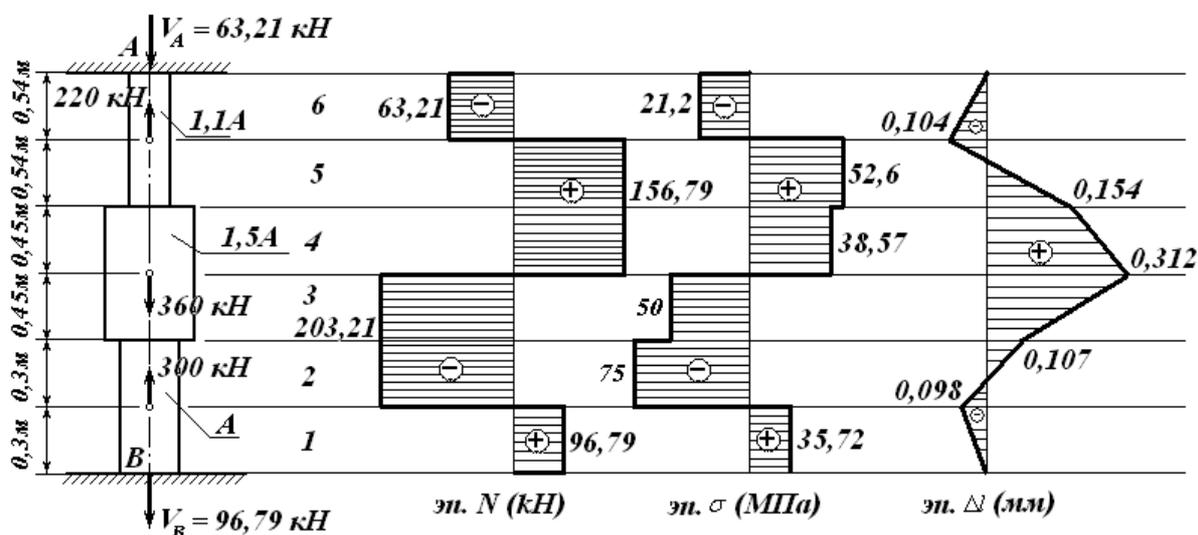


Рис. 20. Статически неопределимый ступенчатый стержень

3. Физическая сторона задачи.

По закону Гука $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$. Определим вначале продольные силы на каждом участке:

$$\begin{aligned}
N_1 &= V_B; \\
N_2 &= V_B - 300; \\
N_3 &= V_B - 300; \\
N_4 &= V_B - 300 + 360 = V_B + 60; \\
N_5 &= V_B + 60; \\
N_6 &= V_B - 160.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta l_1 &= \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{V_B \cdot 0,3}{EA}; \\
\Delta l_2 &= \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{(V_B - 300)0,3}{EA}; \\
\Delta l_3 &= \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{(V_B - 300)0,45}{E \cdot 1,5A}; \\
\Delta l_4 &= \frac{(V_B + 60)0,45}{E \cdot 1,5A}; \\
\Delta l_5 &= \frac{(V_B + 60)0,54}{E \cdot 1,1A}; \\
\Delta l_6 &= \frac{(V_B - 160)0,54}{E \cdot 1,1A}.
\end{aligned}$$

Подставляя все в уравнение совместности деформаций, получим:

$$\frac{V_B \cdot 0,3}{EA} + \frac{(V_B - 300)0,3}{EA} + \frac{(V_B - 300)0,45}{E \cdot 1,5A} + \frac{(V_B + 60)0,45}{E \cdot 1,5A} + \frac{(V_B + 60)0,54}{E \cdot 1,1A} + \frac{(V_B - 160)0,54}{E \cdot 1,1A} = 0;$$

$$7,27 V_B = 703,64;$$

$$V_B = 96,79 \text{ кН, тогда } V_A = 160 - V_B = 63,21 \text{ кН.}$$

Так как обе реакции получились положительные, то их направления соответствуют принятому ранее.

По полученным значениям строим эпюру продольных сил N (рис. 20).

4. Для определения опасного сечения находим нормальные напряжения на каждом участке стержня: $\sigma = \frac{N}{A}$;

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{96,79}{A};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-203,21}{A};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{N_3}{1,5A} = \frac{-135,47}{A};$$

$$\sigma_4 = \frac{104,53}{A};$$

$$\sigma_5 = \frac{142,54}{A};$$

$$\sigma_6 = \frac{-57,46}{A}.$$

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_2| = \frac{203,21}{A} \leq [\sigma] = 75 \text{ МПа},$$

отсюда $A = \frac{203,21}{75} = \frac{203,21 \cdot 10^3 \text{ Н}}{75 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 2,71 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 27,1 \text{ см}^2$.

5. Построение эпюры нормальных напряжений σ_i (рис. 20):

$$\sigma_1 = \frac{96,79}{A} = \frac{96,79 \cdot 10^3}{2,71 \cdot 10^{-3}} = 35,72 \cdot 10^6 \text{ Па} = 35,72 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{-203,21 \cdot 10^3}{2,71 \cdot 10^{-3}} = -75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = 38,57 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = 52,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_6 = -21,2 \text{ МПа}.$$

6. Построение эпюры относительных перемещений:

$$\Delta l = \sigma \frac{l}{E};$$

$$\Delta l_1 = \sigma_1 \frac{l_1}{E} = \frac{35,72 \cdot 10^6 \cdot 0,3}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = 9,74 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,097 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \sigma_2 \frac{l_2}{E} = \frac{-75 \cdot 10^6 \cdot 0,3}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = 0,158 \text{ мм};$$

$$\Delta l_5 = 0,258 \text{ мм};$$

$$\Delta l_6 = -0,104 \text{ мм}.$$

Ординаты эпюры перемещений границ участков будут

$$y_6 = \Delta l_6 = -0,104 \text{ мм};$$

$$y_5 = \Delta l_6 + \Delta l_5 = -0,104 + 0,258 = 0,154 \text{ мм};$$

$$y_4 = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 = 0,312 \text{ мм};$$

$$y_3 = \sum_3^6 \Delta l_i = 0,107 \text{ мм};$$

$$y_2 = -0,098 \text{ мм};$$

$$y_1 = -0,001 \text{ мм} \approx 0.$$

Таким образом, полное удлинение ступенчатого стержня, равное алгебраической сумме удлинений всех участков, оказалось равным нулю, что свидетельствует о достаточной точности приведенного выше расчета. По полученным значениям y_i строим эпюру перемещений (рис. 20).

ВЫВОДЫ. Сравнивая эпюры продольных сил, нормальных напряжений и осевых перемещений сечений рассмотренных статически определимого (рис. 19) и статически неопределимого (рис. 20) стержней, можно сделать следующие заключения:

1) произошло изменение продольных сил и напряжений на многих участках стержня. Участок 1, не работавший в статически определимом стержне, стал работать на растяжение в статически неопределимом стержне;

2) напряжения в поперечных сечениях всех участков статически неопределимого стержня оказались меньше, чем в статиче-

ски определим, следовательно, его несущая способность выше несущей способности последнего. Уменьшилась площадь поперечного сечения участков статически неопределимого стержня, следовательно, применение такой конструкции экономически выгодно с точки зрения расхода материала;

3) в соответствии с изменениями напряжений изменился характер деформаций участков стержня и осевых перемещений его поперечных сечений.

Т а б л и ц а 25

Ориентировочные величины основных допустимых напряжений на растяжение и сжатие $[\sigma]$, МПа*

Материал	Напряжение
Сталь Ст.2	140
Сталь Ст.3	160
Сталь Ст.3 в мостах	140
Сталь машиностроительная (конструкционная) углеродистая	80...250
Сталь машиностроительная (конструкционная) легированная	100...400 и выше
Медь	30...120
Латунь	70...140
Бронза	60...120
Алюминий	30...80
Алюминиевая бронза	80...120
Дюралюминий	80...150
Текстолит	30...40
Гетинакс	50...70
Бакелитизированная фанера	40...50

* Для разнообразных видов одного материала – принимать любой из них. При определении справочных величин для материалов, у которых даны их значения в определенных интервалах, – принимать среднее значение.

Модули упругости и коэффициенты Пуассона

Материал	Модуль упругости, E , МПа	Модуль упругости, G , МПа	Коэффициент Пуассона, μ
Чугун серый, белый	$(1,15 \dots 1,60) \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23...0,27
Ковкий чугун	$1,55 \cdot 10^5$	–	–
Углеродистые стали	$(2,0 \dots 2,1) \cdot 10^5$	$(8,0 \dots 8,1) \cdot 10^4$	0,24...0,28
Легированные стали	$(2,1 \dots 2,2) \cdot 10^5$	$(8,0 \dots 8,1) \cdot 10^4$	0,25...0,30
Медь прокатанная	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,31...0,34
Медь холодноотянутая	$1,3 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^4$	–
Медь литая	$0,84 \cdot 10^5$	–	–
Фосфористая бронза катаная	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	0,32...0,35
Латунь холодноотянутая	$(0,91 \dots 0,99) \cdot 10^5$	$(3,5 \dots 3,7) \cdot 10^4$	0,32...0,42
Корабельная латунь катаная	$1,0 \cdot 10^5$	–	0,36
Марганцовистая бронза катаная	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,35
Алюминий катаный	$0,69 \cdot 10^5$	$(2,6 \dots 2,7) \cdot 10^4$	0,32...0,36
Алюминиевая проволока тянутая	$0,7 \cdot 10^5$	–	–
Алюминиевая бронза литая	$1,05 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	–
Дюралюминий катаный	$0,71 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$	–
Цинк катаный	$0,84 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$	0,27
Свинец	$0,17 \cdot 10^5$	$0,7 \cdot 10^4$	0,42
Лёд	$0,1 \cdot 10^5$	$(0,28 \dots 0,3) \cdot 10^4$	–

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ. КРИТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

При действии на стержень сжимающих нагрузок не всегда его можно рассчитывать по известному условию прочности $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$, поскольку при сжатии стержней большой длины наблюдается побочное явление, называемое *продольным изгибом*, при возникновении которого в поперечных сечениях стержня, помимо сжимающих нагрузок, начинают действовать изгибающие моменты.

В системе, находящейся в деформированном состоянии, равновесие между внешними нагрузками и вызываемыми ими внутренними силами упругости может быть не только устойчивым, но и неустойчивым.

Упругое равновесие *устойчиво*, если деформированное тело при любом малом отклонении от состояния равновесия стремится возвратиться к первоначальному состоянию и возвращается к нему после прекращения внешнего воздействия, нарушившего первоначальное равновесное состояние.

Упругое состояние *неустойчиво*, если деформированное тело, будучи выведено из него каким-либо воздействием, продолжает деформироваться в направлении вызванного отклонения и после прекращения воздействия в исходное состояние не возвращается. Между этими двумя состояниями равновесия находится переходное состояние, называемое *критическим*. При критическом состоянии деформированное тело находится в безразличном равновесии: оно может сохранить первоначальную свою форму, но может и потерять ее от самого незначительного воздействия.

Устойчивость формы равновесия деформируемого тела зависит от величины приложенной к нему нагрузки. Нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы тела, называется *критической нагрузкой (критической силой)* и обозначается $F_{кр}$.

На рис. 22 показаны возможные случаи деформирования стержня в зависимости от сжимающей нагрузки: при $F < F_{кр}$

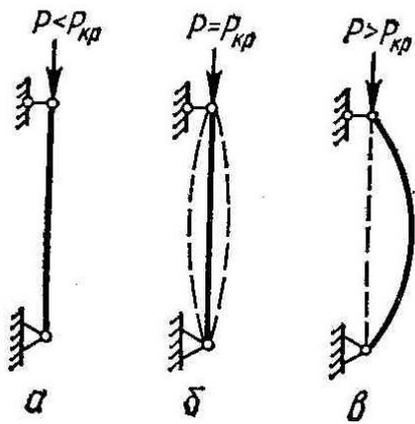


Рис. 22. Деформирование стержня

форма равновесия остается устойчивой (рис. 22, а); при $F = F_{кр}$ – состояние безразличного равновесия, когда стержень может занимать одно из трех показанных положений (рис. 22, б); при $F > F_{кр}$ стержень теряет устойчивость, выпучивается, т.е. прямолинейная форма равновесия перестает быть устойчивой (рис. 22, в). В этот момент

существуют две смежные формы равновесия – прямолинейная и искривленная. Это явление называется *бифуркацией* форм равновесия (раздвоение).

Потеря устойчивости сжатых стержней в реальных конструкциях чрезвычайно опасна. Это связано с тем, что один (или несколько) сжатый стержень без нарушения прочности резко выпучивается, это нарушает расчетную схему сооружения, его равновесие, и, как следствие, происходит разрушение в целом. Такие аварии происходят в фермах мостов, колоннах, стойках здания и др.

Для обеспечения определенного запаса устойчивости необходимо, чтобы удовлетворялось условие $F \leq [F]$, где F – действующая нагрузка, $[F]$ – допускаемая нагрузка, которая при коэффициенте запаса устойчивости n_y , равна $[F] = \frac{F_{кр}}{n_y}$. Коэффициент

устойчивости для каждого материала имеет свои значения. Для стальных стержней он берется в пределах 1,8 – 3; для чугунных – 5 – 6, для деревянных – 2,5 и более.

Таким образом, при расчете упругих систем (сжатые стержни) на устойчивость прежде всего необходимо уметь определять величину критической силы $F_{кр}$.

Исследования устойчивости стержневых упругих систем были начаты Л. Эйлером. В дальнейшем его идеи были развиты Ж. Лагранжем. Л. Эйлер решил задачу об определении формы выпучивания стержня и величины критической силы для шарнирно-опертого стержня постоянной жесткости.

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \text{ – формула Эйлера для определения критической}$$

силы, где μ – коэффициент приведения длины стержня зависит от условия закрепления стержня (рис. 21).

Определим критическое напряжение:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l)^2} \cdot \frac{I}{A} = \frac{\pi^2 E \cdot i^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

где $i^2 = \frac{I}{A}$ – квадрат радиуса инерции, обычно берется минимальный; $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ – гибкость стержня.

Формула Эйлера была получена в предположении справедливости закона Гука, т.е. напряжения не должны превышать предела пропорциональности. Определим предельное значение гибкости, когда материал не превышает предела пропорциональности, а именно: $\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пр}}$, отсюда $\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пр}}}}$.

Например, для стали $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{пр}} = 200 \text{ МПа}$,

$$\text{тогда } \lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 99,3.$$

Если $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$, то критическое напряжение определяется формулой Эйлера $\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$, если же $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$, то формулой Ясинского $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda$, где a и b – коэффициенты, зависящие от материала стержня. Например, для низкоуглеродистых сталей $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$; для дерева 29,3 и 0,194 соответственно. Формулу Ясинского можно применять в том случае, если величина критических напряжений $\sigma_{\text{кр}}$ не превышает предел текучести материала σ_y . Если же критическое напряжение превышает σ_y , то оно заменяется при расчете величиной предела текучести $F_{\text{кр}} = \sigma_y A$.

Расчетно-графическая работа № 9

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОДОЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Задание выдается в виде трехзначного шифра для выбора параметров расчета из табл. 27. Числовые данные принять из примера к данной работе.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Определение геометрических характеристик заданного поперечного сечения, выраженных через некоторый параметр a или d .

2. Вычисление необходимых размеров поперечного сечения заданного стержня по методу последовательных приближений, (первоначальное значение коэффициента продольного изгиба принять равным $\varphi = 0,5$).

3. Определение величины критической силы и коэффициента запаса устойчивости для найденных размеров поперечного сечения заданной стойки.

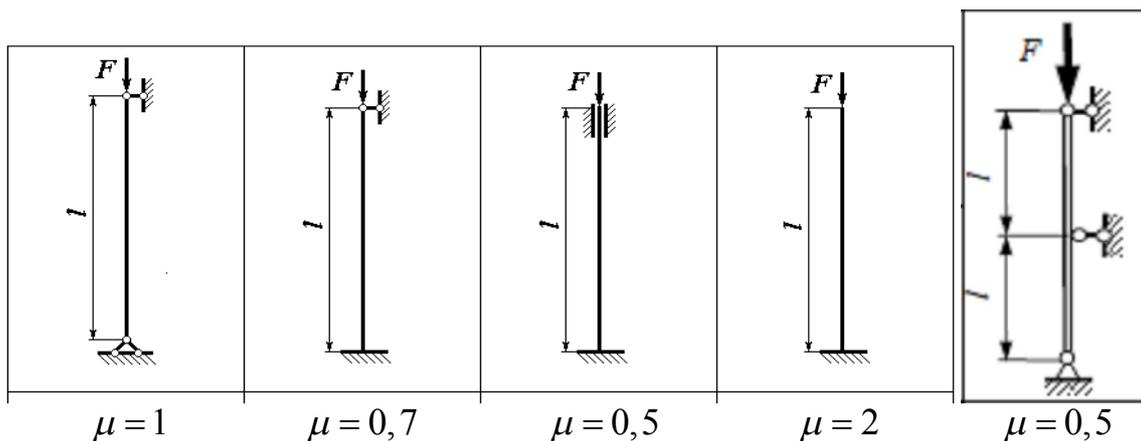


Рис. 21. Значения коэффициентов приведения длины μ для различных условий закрепления стержня

Таблица 27

Первая цифра шифра	F (кН)	Вторая цифра шифра	l (м)	Схема стойки	Третья цифра шифра	Форма поперечного сечения стойки
1	100	1	2,1		1	
2	200	2	2,2		2	
3	300	3	2,3		3	
4	400	4	2,4		4	
5	500	5	2,5		5	
6	600	6	2,6		6	
7	700	7	2,7		7	
8	800	8	2,8		8	
9	900	9	2,9		9	
0	1000	0	3,0		0	

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 9

Стальная стойка длиной $l = 3,3$ м сжимается силой $F = 1000$ кН (рис. 23). Материал стойки – листовая сталь марки ВСт3кп2. Допускаемое напряжение стали ВСт3кп2 принять равным $[\sigma] = 200$ МПа, предел текучести $\sigma_y = 240$ МПа, предел пропорциональности $\sigma_{pr} = 200$ МПа. Требуется:

- 1) используя метод последовательных приближений, найти размеры поперечного сечения заданного стержня (первоначальное значение коэффициента продольного изгиба $\varphi = 0,5$);
- 2) вычислить значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости для найденных размеров поперечного сечения.

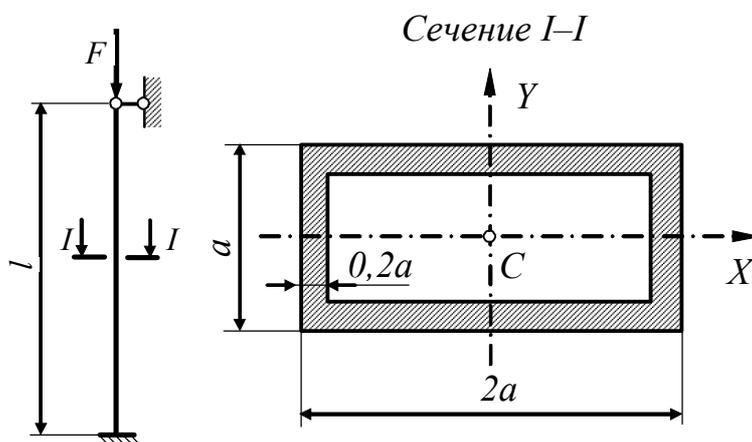


Рис. 23. Расчетная схема сжатой стойки

1. Подбор сечения методом последовательных приближений.

Вычисляем геометрические характеристики заданного поперечного сечения сжатого стержня. Сечение разбиваем на два элемента: первый элемент – прямоугольник с размерами $2a \times a$; второй элемент – вырезанный прямоугольник с размерами $1,6a \times 0,6a$.

Суммарная площадь составного сечения равна

$$A = A_1 - A_2 = 2a \cdot a - 0,6a \cdot 1,6a = 1,04a^2 .$$

Находим осевые моменты инерции заданного поперечного сечения стержня:

$$J_X = J_{x1} - J_{x2} = \frac{a^3 \cdot 2a}{12} - \frac{(0,6a)^3 \cdot 1,6a}{12} = 0,1379a^4;$$

$$J_Y = J_{y1} - J_{y2} = \frac{a(2a)^3}{12} - \frac{0,6a(1,6a)^3}{12} = 0,462a^4.$$

Для расчета далее берется минимальный момент инерции:

$$J_{\min} = J_X = 0,1379a^4.$$

Определяем величину минимального радиуса инерции сечения:

$$i_{\min} = i_X = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,1379a^4}{1,04a^2}} = 0,364a.$$

Находим размеры поперечного сечения сжатой стойки методом последовательных приближений.

Первое приближение. Запишем условие устойчивости центрально сжатого стержня: $\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma]$, где φ – коэффициент продольного изгиба.

Принимаем $\varphi_1 = 0,5$. Тогда требуемая площадь поперечного сечения стойки равна

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 100 \text{ см}^2.$$

Учитывая ранее полученные выражения для величин A и i_{\min} , имеем

$$a = \sqrt{\frac{A}{1,04}} = \sqrt{\frac{100}{1,04}} = 9,81 \text{ см}; \quad i_{\min} = 0,364 \cdot 9,81 = 3,57 \text{ см}.$$

Вычисляем гибкость стержня по формуле

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 330}{3,57} = 64,71,$$

где $\mu = 0,7$ – коэффициент приведенной длины, выбираемый в зависимости от условий закрепления концов стержня.

Табличное значение коэффициента продольного изгиба для стойки из стали марки ВСтЗкп2 при $[\sigma] = 200$ МПа и гибкости стержня $\lambda = 64,71$ находится линейной интерполяцией по табл. 28.

$$\varphi'_1 = 0,827 - \frac{0,827 - 0,782}{10}(64,71 - 60) = 0,806.$$

Так как полученное значение $\varphi'_1 = 0,806$ значительно отличается от ранее принятого $\varphi_1 = 0,5$, то необходимо выполнить расчет на устойчивость при новом значении коэффициента продольного изгиба.

Второе приближение. Задаемся новым значением коэффициента продольного изгиба: $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,806}{2} = 0,653$.

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,653 \cdot 200 \cdot 10^6} = 7,657 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 76,57 \text{ см}^2.$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{1,04}} = \sqrt{\frac{76,57}{1,04}} = 8,58 \text{ см}; \quad i_{\min} = 0,364 \cdot 8,58 = 3,12 \text{ см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 330}{3,12} = 74,04.$$

$$\varphi'_2 = 0,782 - \frac{0,782 - 0,734}{10}(74,04 - 70) = 0,763.$$

Третье приближение: $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,653 + 0,763}{2} = 0,708$.

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,708 \cdot 200 \cdot 10^6} = 7,062 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 70,62 \text{ см}^2.$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{1,04}} = \sqrt{\frac{70,62}{1,04}} = 8,24 \text{ см}, \quad i_{\min} = 0,364 \cdot 8,24 = 3,00 \text{ см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 330}{3,00} = 77,01.$$

$$\varphi'_3 = 0,782 - \frac{0,782 - 0,734}{10}(77,01 - 70) = 0,748.$$

Находим величину расчетных напряжений в поперечном сечении сжатой стойки:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,748 \cdot 7,062 \cdot 10^{-3}} = 189,31 \text{ МПа} < [\sigma] = 200 \text{ МПа}.$$

Недогрузка сечения составляет $\frac{200 - 189,31}{200} \cdot 100\% = 5,35\% > 5\%$, следовательно, необходимо выполнить еще одно приближение.

$$\text{Четвертое приближение: } \varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,708 + 0,748}{2} = 0,728.$$

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,728 \cdot 200 \cdot 10^6} = 6,868 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 68,68 \text{ см}^2.$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{1,04}} = \sqrt{\frac{68,68}{1,04}} = 8,13 \text{ см}, \quad i_{\min} = 0,364 \cdot 8,13 = 2,96 \text{ см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 330}{2,96} = 78,06.$$

$$\varphi'_4 = 0,782 - \frac{0,782 - 0,734}{10} (78,06 - 70) = 0,743.$$

Находим величину расчетных напряжений в поперечном сечении сжатой стойки:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,743 \cdot 6,868 \cdot 10^{-3}} = 195,97 \text{ МПа} < [\sigma] = 200 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет $\frac{200 - 195,97}{200} \cdot 100\% = 2,02\% < 5\%$, что допустимо.

Окончательно принимаем следующие размеры поперечного сечения заданного стержня $a = 8,13 \text{ см}$ и $A = 68,68 \text{ см}^2$.

2. Определение величины критической силы.

Вычисляем значение критической силы. Определим граничное значение гибкости стержня, при котором можно использовать формулу Эйлера. Указанная формула учитывает только линейно-упругий характер работы материала сжатого стержня и записывается в следующем виде:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Следовательно, максимальные сжимающие напряжения не должны превышать предела пропорциональности материала. Находим граничное значение гибкости при условии, что

$$\sigma_{pr} = 200 \text{ МПа и } E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа } \lambda'_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 99,3.$$

Расчетная гибкость стержня $\lambda = 78,06 < \lambda'_0 = 99,3$, тогда при определении критической силы необходимо пользоваться формулой Ясинского:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda,$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала стержня. Для низкоуглеродистых сталей $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа; λ – расчетная гибкость стержня; σ_{cr} – критические напряжения.

Следует помнить, что формулу Ясинского можно применять в том случае, если величина критических напряжений σ_{cr} не превышает предела текучести материала σ_y . Тогда

$$\sigma_{cr} = 310 - 1,14 \cdot 78,06 = 221,01 \text{ МПа} < \sigma_y = 240 \text{ МПа}.$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 221,01 \cdot 10^6 \cdot 68,68 \cdot 10^{-4} = 15179 \cdot 10^2 \text{ Н} = 1517,9 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости равен

$$k = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{1517,9}{1000} = 1,52.$$

Т а б л и ц а 28

Коэффициенты для расчета сжатых стержней на устойчивость

λ	Значение коэффициента φ для элементов из						
	стали с расчетным сопротивлением [σ], МПа					чугуна	дерева
	160	200	240	280	400		
0	1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,00	1,00
10	0,99	0,988	0,987	0,985	0,982	0,97	0,99
20	0,96	0,967	0,962	0,959	0,949	0,91	0,97
30	0,94	0,939	0,931	0,924	0,905	0,81	0,93
40	0,92	0,906	0,894	0,833	0,854	0,69	0,87
50	0,89	0,869	0,852	0,836	0,796	0,57	0,80
60	0,86	0,827	0,805	0,785	0,721	0,44	0,71
70	0,81	0,782	0,754	0,724	0,623	0,34	0,60
80	0,75	0,734	0,686	0,641	0,532	0,26	0,48
90	0,69	0,665	0,612	0,565	0,447	0,20	0,38
100	0,60	0,599	0,542	0,493	0,369	0,16	0,31
110	0,52	0,537	0,478	0,427	0,306	0	0,25
120	0,45	0,479	0,419	0,366	0,260	–	0,22
130	0,40	0,425	0,364	0,313	0,223	–	0,18
140	0,36	0,376	0,315	0,272	0,195	–	0,16
150	0,32	0,328	0,276	0,239	0,171	–	0,14
160	0,29	0,290	0,244	0,212	0,152	–	0,12
170	0,26	0,259	0,218	0,189	0,136	–	0,11
180	0,23	0,233	0,196	0,170	0,123	–	0,10
190	0,21	0,210	0,177	0,154	0,111	–	0,09
200	0,19	0,191	0,161	0,140	0,101	–	0,08
210	0,17	0,174	0,147	0,128	0,093	–	0,07
220	0,16	0,160	0,135	0,118	0,086	–	0,06
230	0,15	0,146	0,123	0,108	0,079	–	0,05
240	0,14	0,132	0,112	0,100	0,073	–	0,04
250	0,13	0,119	0,101	0,092	0,067	–	0,03
260	0,11	0,100	0,090	0,085	0,062	–	0,02
270	0,10	0,082	0,080	0,076	0,057	–	0,01

КРУЧЕНИЕ

Кручением называется такой вид нагружения бруса, при котором из шести внутренних силовых факторов в поперечном сечении стержня возникает только крутящий момент. Кручение вызывается парами сосредоточенных и распределенных вдоль оси бруса сил, действующих в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Брус, работающий на кручение, называется *валом*. Моменты, вызывающие деформацию кручения, называются *крутящими моментами*. Величина крутящего момента, действующего в каком-либо сечении вала, определяется методом сечений. Момент крутящий считается положительным, если при взгляде со стороны сечения он стремится повернуть выделенный элемент по часовой стрелке.

Величина крутящего момента может быть задана мощностью, передаваемой на вал, например через шкив. Если мощность задана в лошадиных силах, для перевода в систему СИ следует помнить, что 1 л.с. = 736 Вт.

При расчете вала требуется решить две основные задачи. Во-первых, необходимо определить напряжения, возникающие в бруске, и, во-вторых, надо найти угловые перемещения сечений.

Однако такие детали как валы, редко работают на чистое кручение. Даже прямой вал при работе изгибается под собственным весом, весом зубчатых колес, шкивов, натяжением ремней и т.д. Совместной деформации поперечного изгиба и кручения подвергаются все виды валов, встречающихся на практике. Нельзя путать понятие вала и оси. Конструктивно эти детали машин не отличаются. Их различие состоит в восприятии нагрузки. Если элемент конструкции воспринимает одновременно поперечный изгиб и кручение, то это вал, если такой же элемент конструкции несет только изгибающую нагрузку, то это ось.

В расчетно-графической работе № 10 рассмотрим расчет вала при кручении, предположив, что в его поперечных сечениях возникает только крутящий момент.

Расчетно-графическая работа № 10

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ВАЛА ПРИ КРУЧЕНИИ

Для стального вала (табл. 30) при значениях момента P по варианту из табл. 29, требуется:

- 1) построить эпюру крутящего момента M_k ;
- 2) определить требуемый диаметр сплошного и трубчатого вала (отношение внутреннего диаметра к наружному $d/D=0,8$) из расчетов на прочность, приняв допускаемое касательное напряжение $[\tau] = 60$ МПа; диаметр вала считать по всей длине постоянным;
- 3) сделать вывод о том, какое сечение вала более рациональное (выгодное) и почему;
- 4) для наиболее рационального сечения вала вычертить по длине вала эпюру касательных напряжений τ ;
- 5) построить эпюру углов закручивания для трубчатого варианта сечения вала, считая неподвижным левый конец вала;
- 6) проверить валы на жесткость, приняв допускаемый относительный угол закручивания $[\theta] = 0,5$ град/м.

В расчетах принять модуль сдвига $G = 80$ ГПа.

Ряд нормальных линейных диаметров (ГОСТ 2590-71), мм: 10; 10,5; 11; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 35; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 53; 55; 56; 60; 62; 63; 65; 67; 70; 71; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140; 150; 160; 170; 180; 190; 200.

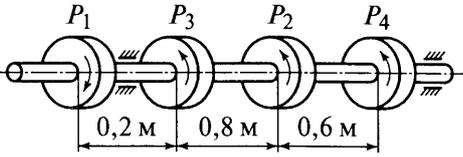
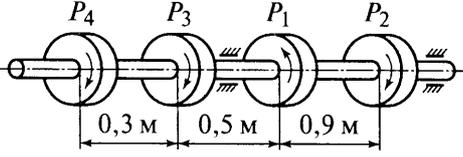
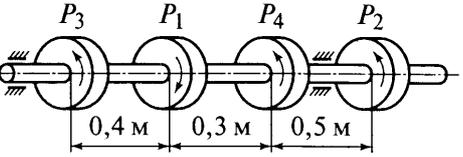
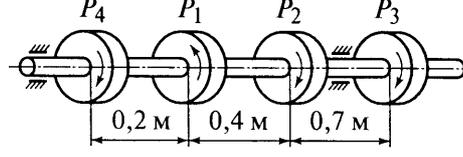
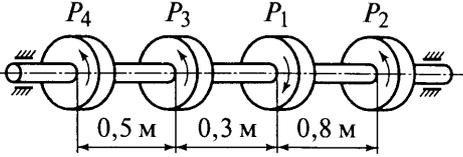
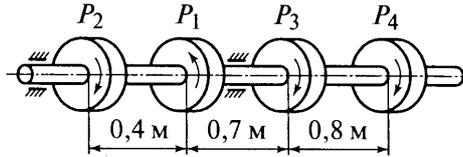
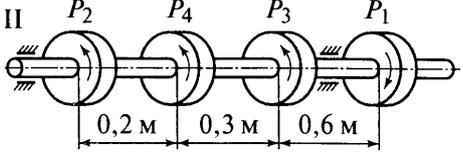
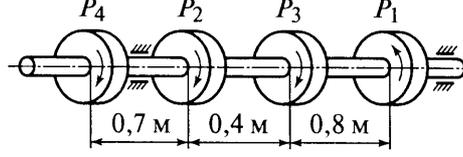
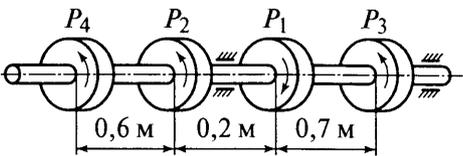
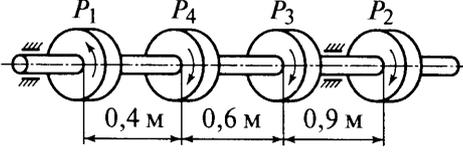
Т а б л и ц а 29

Исходные данные к РГР № 10*

Вариант	№ схемы	P_1 , кНм	P_2 , кНм	P_3 , кНм
1	2	13	3	8
2	3	3,5	16	7
3	4	6	13	3,9
4	6	15	6	3,8
5	5	10	4,5	12
6	8	5	15	8,7
7	7	4	15	10
8	10	9,5	9	3,4
9	9	10	12	3
10	10	-12	4,2	-9
11	9	8	7	4
12	1	15	2,4	-12
13	2	10	-4,8	2,8
14	4	-15	3,6	6
15	3	8	-7	8,6
16	6	10	-6	12
17	5	5	9	-13
18	8	-11	12	4,2
19	7	-4,5	10	3
20	8	14	-4,8	10
21	7	10	12	-10
22	10	6	7	8,5
23	9	9,5	-4	4,2
24	2	9	6	9,4
25	1	-4	8	11
26	4	9	10	16
27	3	6	9	7
28	6	11	-11	8,5
29	5	12	12	9
30	1	11	5	-9,8

* Знак минус у крутящего момента говорит о том, что его направление противоположно обозначенному на чертеже.

Расчетные схемы валов к РГР № 10

<p>1</p> 	<p>2</p> 
<p>3</p> 	<p>4</p> 
<p>5</p> 	<p>6</p> 
<p>7</p> 	<p>8</p> 
<p>9</p> 	<p>10</p> 

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 10

Для проектирования валов можно рекомендовать следующий порядок расчета валов на прочность и жесткость при кручении.

По схеме вала и действующим на него скручивающим моментам строят эпюру крутящих моментов по отдельным участкам. Выбирают материал для рассчитываемого вала и определяют для этого материала допускаемое напряжение $[\tau]$. Записывают условие прочности для участка вала с максимальным значением крутящего момента (согласно эпюре крутящих моментов).

Если вал достаточно длинный и по его участкам действуют существенно разные по величине крутящие моменты, то его следует конструировать ступенчатым. Диаметр вала каждой ступени рассчитывают с учетом значения крутящего момента, соответствующего каждому участку.

После определения размеров вала из условия прочности проверяют вал на жесткость. Если при проверке окажется, что условие жесткости не выполняется, размеры вала нужно подобрать из условия жесткости.

Пример. Для заданного ступенчатого стального вала подобрать поперечные сечения и построить:

- эпюру крутящих моментов;
- эпюру углов закручивания;
- эпюру касательных напряжений по длине вала;
- эпюру касательных напряжений для опасного сечения.

Дано: $[\tau] = 60$ МПа; $a = 0,5$ м; $M_1 = 10$ кНм; $M_2 = 20$ кНм; $M_3 = 25$ кНм; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Сечение подобрать из условий прочности и жесткости при кручении. Допускаемый угол закручивания принять $[\theta] = 0,5^\circ / \text{м}$,

$$\text{или } [\theta] = \frac{0,5 \cdot 3,14}{180} = 87,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}.$$

Расчет начинаем с определения вращающего момента M_0 .

Из уравнения равновесия:

$$\sum M_x = 0 ;$$

$$M_0 - M_1 - M_2 + M_3 = 0 ;$$

$$M_0 = M_1 + M_2 - M_3 = 10 + 20 - 25 = 5 \text{ кНм.}$$

Для построения эпюр крутящих моментов делим вал на участки по местам приложения сосредоточенных моментов и по местам изменения поперечного сечения.

Методом сечений определим крутящие моменты на каждом участке.

$$\sum M_x = 0;$$

$$M_{K1} = M_0 = 5 \text{ кНм};$$

$$M_{K2} = +M_0 - M_1 = 5 - 10 = -5 \text{ кНм};$$

$$M_{K3} = -M_3 = -25 \text{ кНм.}$$

По найденным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 24). Для этого берем нулевую (базовую) линию, параллельную оси вала, и перпендикулярно ей откладываем в масштабе значения крутящих моментов на соответствующих участках. Внутри эпюры проставляются знаки откладываемых значений, после чего выполняется штриховка перпендикулярно нулевой линии. Вне поля эпюры указываются значения крутящих моментов. Слева от эпюры указывается название эпюры (M_K) и через запятую проставляются единицы измерения (кН·м). Для контроля правильности построения эпюры M_K необходимо учесть, что в местах приложения сосредоточенных вращающих моментов на эпюре M_K должны быть скачки на величину этих моментов.

После определения крутящих моментов исходя из условия прочности можно определить требуемый диаметр вала для каждого участка, затем принять большее ближайшее значение из стандартного ряда (при значении диаметра вала $d \leq 100$ мм необходимо округлять требуемый диаметр в большую сторону до значения кратного 5 мм, при $d \geq 100$ мм – до значения кратного 10 мм).

Условие прочности при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (1)$$

где M_K – крутящий момент в поперечном сечении (подставляется абсолютное значение); W_ρ – полярный момент сопротивления сечения, для круглого поперечного сечения равен

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16} . \quad (2)$$

Из (1) с учетом (2):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_K}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_K \cdot 10^3}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 0,044 \cdot \sqrt[3]{M_K} .$$

Соответственно для каждого из участков:

$$d_1 \geq 0,044 \cdot \sqrt[3]{5} = 0,0752 \text{ м} = 75,2 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_1 = 80$ мм.

$$d_2 \geq 0,044 \cdot \sqrt[3]{5} = 0,0752 \text{ м} = 75,2 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_2 = 80$ мм.

$$d_3 \geq 0,044 \cdot \sqrt[3]{25} = 0,129 \text{ м} = 129 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_3 = 130$ мм.

Теперь подберем диаметр вала из условия жесткости

$$\theta = \frac{M_K}{GJ_{\rho}} \leq [\theta], \quad (3)$$

Для круглого вала

$$J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (4)$$

Из (3) с учетом (4):

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_K}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_K \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 87,2 \cdot 10^{-4}}} = 0,074 \cdot \sqrt[4]{M_K} .$$

$$d_1 \geq 0,074 \cdot \sqrt[4]{5} = 0,111 \text{ м} = 111 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_1 = 120$ мм.

$$d_2 \geq 0,074 \cdot \sqrt[4]{5} = 0,111 \text{ м} = 111 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_2 = 120$ мм.

$$d_3 \geq 0,074 \cdot \sqrt[4]{25} = 0,166 \text{ м} = 166 \text{ мм}.$$

Принимаем $d_3 = 170$ мм.

Из двух найденных значений диаметров следует принять наибольший. Окончательно принимаем $d_1 = 120$ мм; $d_2 = 120$ мм; $d_3 = 170$ мм.

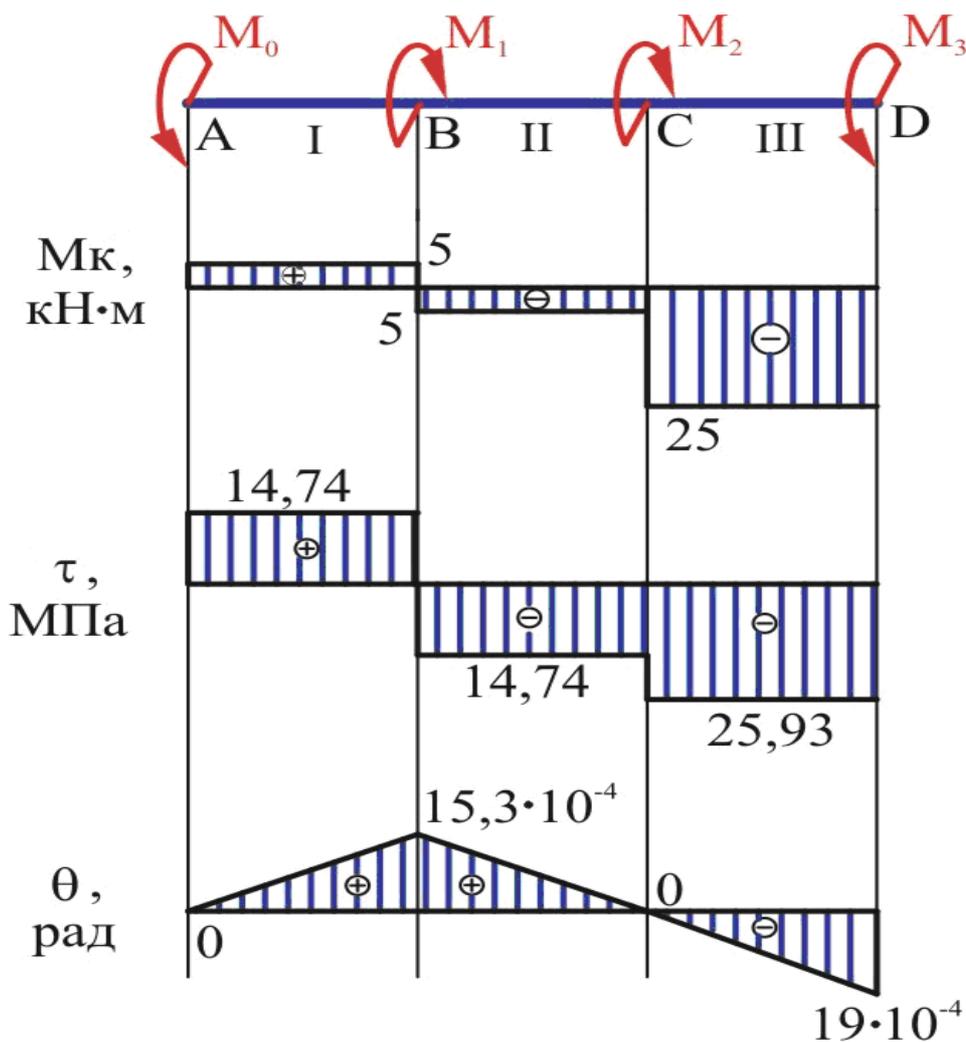


Рис. 24. К расчету вала на кручение

По формуле (3) с учетом (4) определяем относительный угол закручивания по отдельным участкам вала:

$$\theta = \frac{32 \cdot M_K}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{32 \cdot 10^3 \cdot M_K}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot d^4} = 1,27 \cdot 10^{-7} \frac{M_K}{d^4} \text{ м}^{-1};$$

$$\theta_1 = 1,27 \cdot 10^{-4} \frac{5}{0,120^4} = 30,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1};$$

$$\theta_2 = 1,27 \cdot 10^{-4} \frac{5}{0,120^4} = 30,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1};$$

$$\theta_3 = 1,27 \cdot 10^{-4} \frac{25}{0,170^4} = 38,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}.$$

Максимальные касательные напряжения на участках:

$$\tau_{\max 1} = \frac{16 \cdot M_{K1}}{\pi \cdot d_1^3} = \frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,120^3} = 14,74 \cdot 10^6 \leq [\tau] = 60 \cdot 10^6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max 2} = \frac{16 \cdot M_{K2}}{\pi \cdot d_2^3} = \frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,120^3} = 14,74 \cdot 10^6 \leq [\tau] = 60 \cdot 10^6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max 3} = \frac{16 \cdot M_{K3}}{\pi \cdot d_3^3} = \frac{16 \cdot 25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,170^3} = 25,93 \cdot 10^6 \leq [\tau] = 60 \cdot 10^6 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру распределения максимальных касательных напряжений по длине вала (рис. 24).

Для построения эпюры углов поворотов сечений предварительно необходимо определить углы закручивания участков:

$$\varphi = \theta \cdot l, \quad (5)$$

где l – длина участка.

Знак угла закручивания участков принимаем такой же, как и у крутящего момента.

$$\varphi_1 = \theta_1 l_1 = 30,6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 = 15,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \theta_2 l_2 = -30,6 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 = -15,3 \cdot 10^{-4} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \theta_3 l_3 = -38 \cdot 10^{-4} \cdot 0,5 = -19 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

При построении эпюры углов поворотов сечений примем для сечения в точке А угол поворота сечения $\varphi_A = 0$.

Тогда остальные сечения относительно сечения в точке А будут повернутые на какие-то углы.

Сечение в точке В повернется относительно сечения в точке А на угол закручивания первого участка $\varphi_B = \varphi_1 = 15,3 \cdot 10^{-4}$ рад.

Сечение в точке С повернется относительно сечения в точке А на сумму углов закручивания первого и второго участков:

$$\varphi_C = \varphi_1 + \varphi_2 = 15,3 \cdot 10^{-4} - 15,3 \cdot 10^{-4} = 0$$

Соответственно для сечения в точке D:

$$\varphi_D = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -19 \cdot 10^{-4} \text{ рад}.$$

Поскольку в пределах каждого участка $\theta = const$, то угол закручивания на каждом участке изменяется по линейному закону, поэтому эпюра углов поворотов сечений будет ограничена прямыми линиями, соединяющими значения углов поворотов сечений в точках А, В, С и D (рис. 24).

3. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Значение строительной механики в современной строительной и архитектурной науке очень велико. Никакое сколько-нибудь ответственное сооружение не может быть спроектировано надежно и экономично без помощи расчета. Чем сложнее и крупнее сооружение, тем большее значение для сохранения жизни людей и для сбережения средств и материалов имеет расчет, производимый методами строительной механики. Расчет как бы обнажает перед взором проектировщика и архитектора все статические и динамические силы, передающиеся элементам сооружения, и позволяет подобрать такие размеры этих элементов, при которых напряжения в материале будут иметь продиктованные проектировщиком величины.

Строительная механика в узком смысле этого слова иначе называется еще *теорией сооружений*, а некоторыми авторами и *статикой сооружений*.

Сооружения в строительной механике заменяются их схемами, представляющими собой упрощенные изображения (скелеты) сооружений, в которых стержни заменяются осевыми линиями, пластинки – срединными поверхностями, реальные опорные устройства – идеальными связями и т.д.; размеры сечений учитываются моментами инерции и площадями, а свойства материалов – их механическими характеристиками.

Расчет сооружения проводится по расчетной схеме. Если полная схема сооружения проста и доступна для расчета, то она принимается и в качестве расчетной схемы. Если же полная схема сложна для расчета, то она дополнительно упрощается путем игнорирования некоторых свойств, играющих второстепенную роль в работе сооружения. Совокупность всех этих допущений и составляет характеристику расчетной схемы сооружения или конструкции.

ПЛОСКИЕ ФЕРМЫ

Фермой называется геометрически неизменяемая, замкнутая конструкция из прямолинейных стержней, соединенных на концах шарнирами (рис. 25). Если все стержни фермы лежат в одной плоскости, ферму называют *плоской*. Места соединения стержней фермы называют *узлами*. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней (по сравнению с внешними нагрузками) пренебрегают или распределяют веса стержней по узлам. Стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие.

Стержни по верхнему контуру образуют *верхний пояс фермы*, по нижнему – *нижний пояс*. Вертикальные стержни – *стойки*, наклонные – *раскосы*.

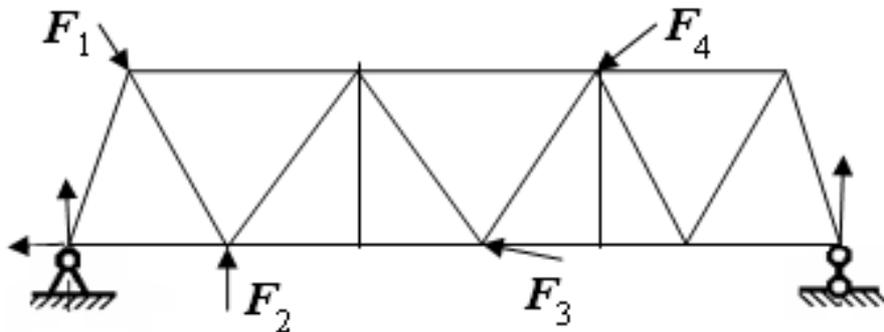


Рис. 25. Плоская статически определимая ферма

В жестких плоских фермах без лишних стержней, образованных из треугольников, число стержней C и число узлов $У$ связаны соотношением $C = 2У - 3$, $19 = 2 \cdot 11 - 3$ (рис. 25).

Если $C > 2У - 3$, то ферма имеет лишние стержни, если $C < 2У - 3$, то ферма превращается в механизм, перестает быть фермой, способна изменять свою форму и при нагрузке разрушится.

Классификация ферм

1. По геометрическому рисунку.
2. По конструктивным особенностям (консольная, объемно-стержневая и др.).
3. По производственному назначению (мосты, ЛЭП и др.).
4. По применяемому материалу (деревянная, металлическая, железобетонная).

Рассчитать ферму – значит:

- 1) выявить статическую определимость;
- 2) определить реакции опор;
- 3) определить усилия в стержнях.

Методы расчета ферм

1. *Метод вырезания узлов.* Поочередно вырезают узлы фермы, начинают с узла, в котором сходятся не более двух стержней. Составляют уравнения равновесия приложенных к узлу усилий. Стержни принимают растянутыми. Усилия направлены от узлов. Следующим вырезают узел, в котором не более двух стержней с неизвестными усилиями. Усилия в стержнях могут быть нулевыми. Недостатки метода: все последующие вычисления зависят от предыдущих, поэтому накапливается погрешность.

2. *Метод сечений (метод Риттера).* Этим методом удобно пользоваться для определения усилий в отдельных (любом одном) стержнях фермы, в частности для проверочных расчетов. Также можно рассчитывать узлы, для которых число неизвестных больше двух. Идея метода состоит в том, что ферму разделяют на две части сечением, проходящим только через три стержня, в которых (или в одном из которых) требуется определить усилия, и рассматривают равновесие одной из этих частей. Действие отброшенной части заменяют соответствующими силами, которые направляют вдоль разрезанных стержней от узлов, т.е. считают стержни растянутыми (как и в методе вырезания узлов). Затем составляют независимые уравнения равновесия (в каждое уравнение входит только одно неизвестное усилие).

3. *Метод построения диаграмм Максвелла-Кремоны.* Диаграмма позволяет видеть все усилия на чертеже, она компактна, каждое усилие изображается один раз, она содержит силовые многоугольники.

Расчетно-графическая работа № 11

РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

Номер варианта задания выдается в виде числа. По нему выбираются номер схемы фермы и номер строки исходных данных (табл. 31). Работы, выполненные не по варианту, преподавателем не рецензируются.

Для заданных ферм (табл. 31) при числовых значениях размеров и нагрузок по строке табл. 30 требуется:

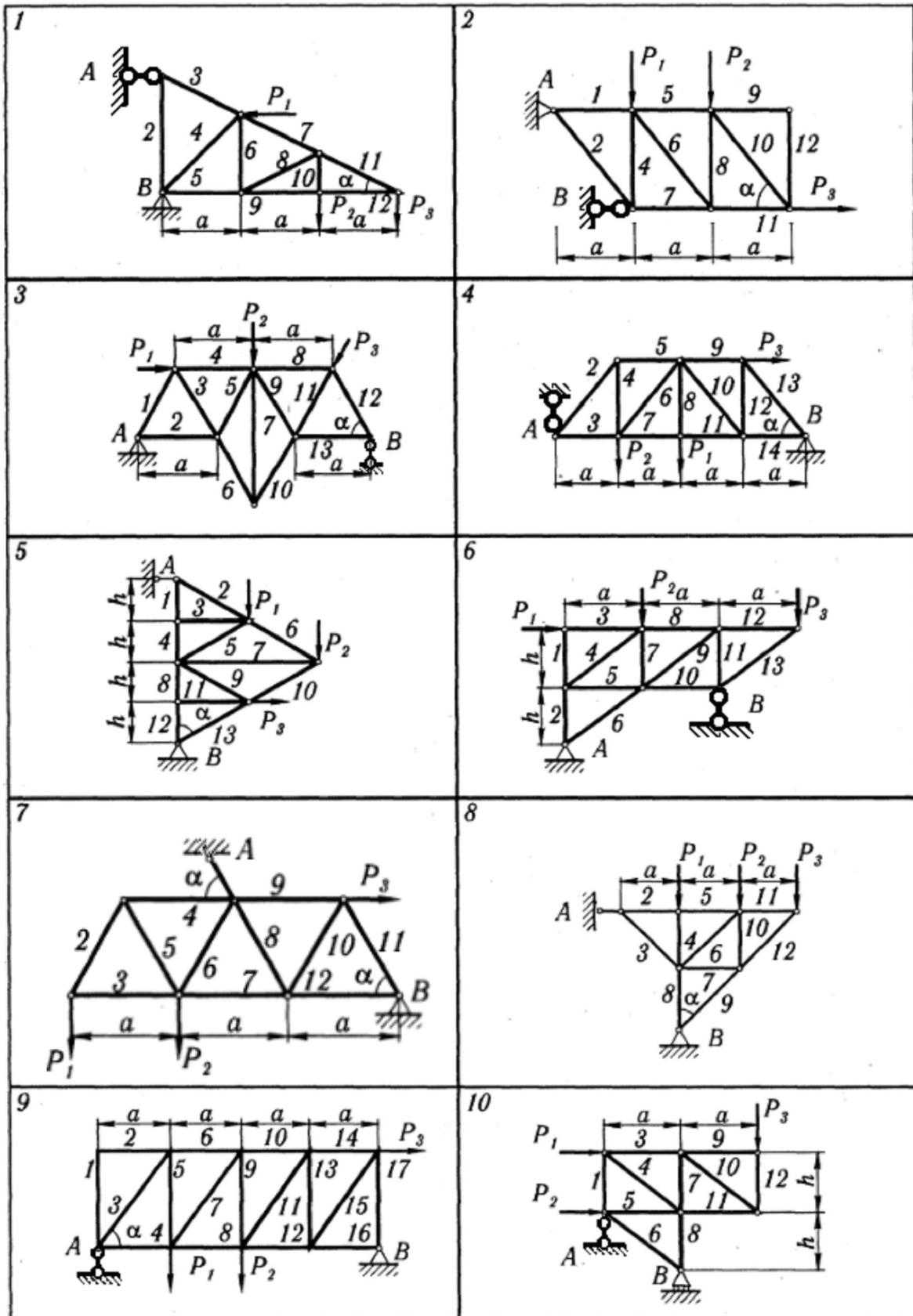
- 1) проверить статическую определимость фермы;
- 2) определить реакции опор фермы от заданной нагрузки, а также усилия во всех ее стержнях методом вырезания узлов;
- 3) дополнительно определить в трех стержнях фермы усилия от той же нагрузки методом Риттера (номера стержней указаны в табл. 31) и сравнить полученные результаты с расчетами, выполненными в п. 2;
- 4) составить таблицу расчетных усилий для всех стержней фермы;
- 5) подобрать сечение фермы отдельно для периметра поясов и решетки в виде двух равнобоких стальных уголков.

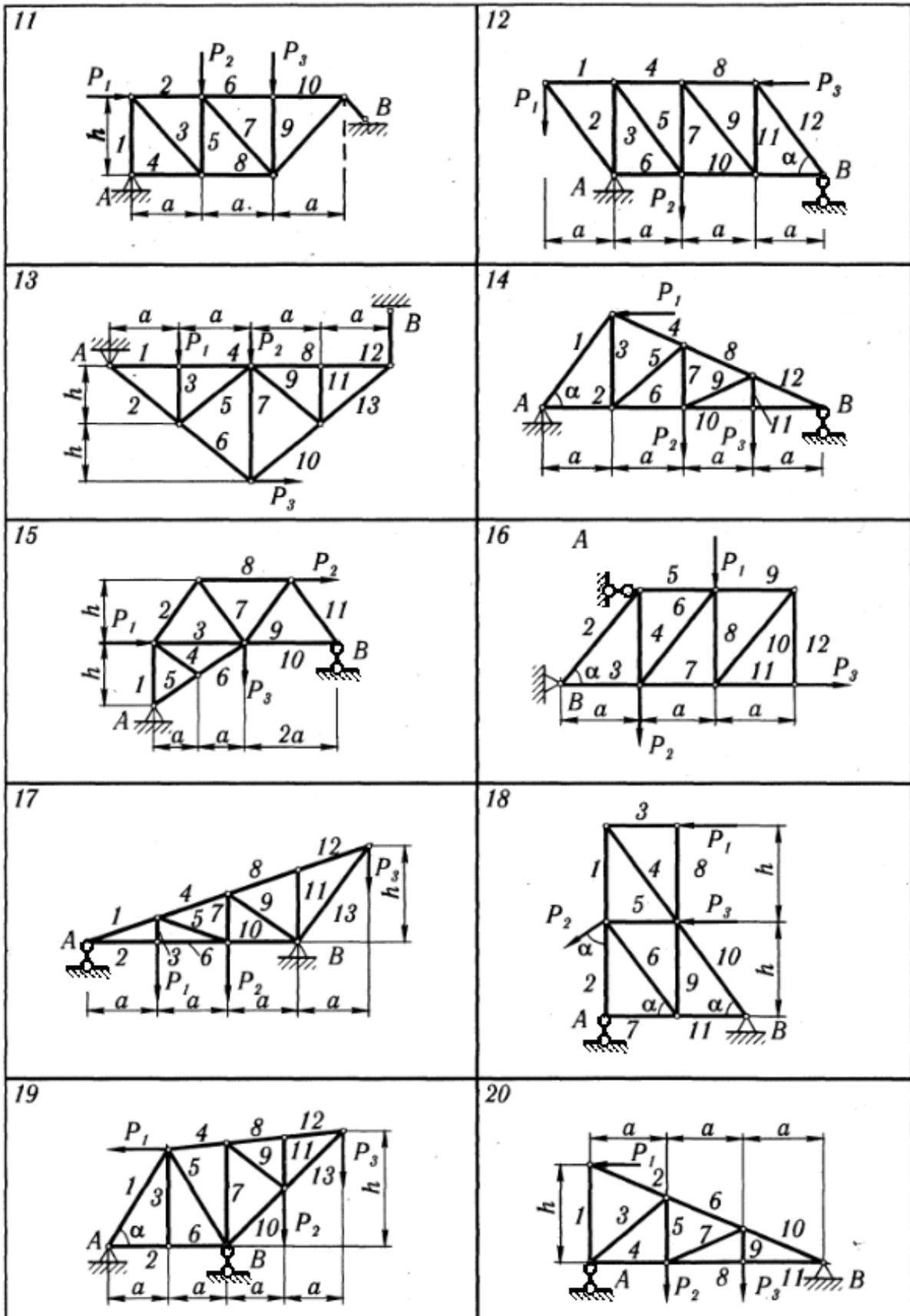
Т а б л и ц а 31

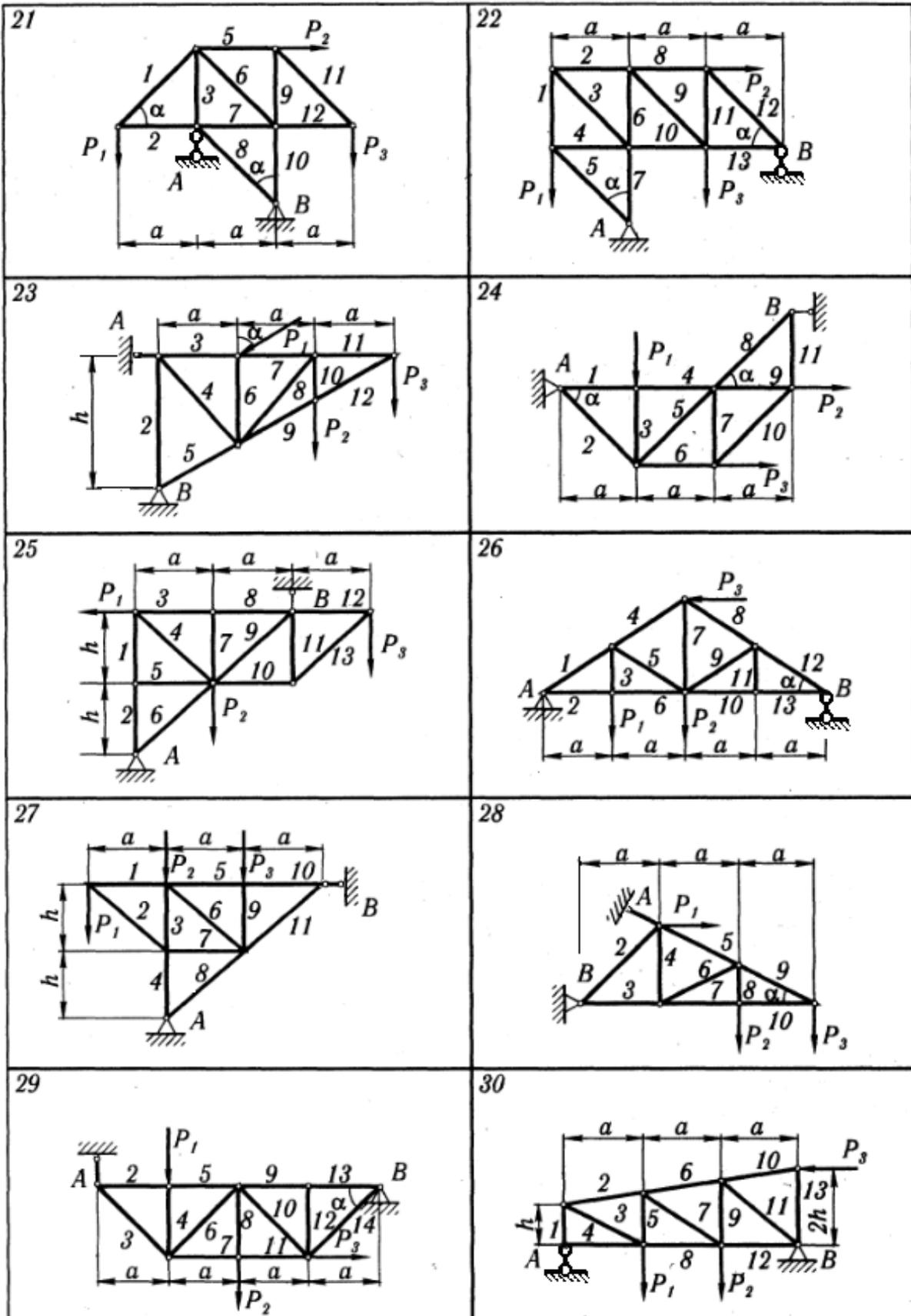
Исходные данные для расчета ферм

№ варианта	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	a , м	h , м	α , град	Номера стержней
1	400	250	15	3		30	3,8,9
2	450	300	25	2		60	2,5,7
3	500	200	35	3		60	4,5,10
4	550	350	30	2		60	5,6,11
5	600	150	20		6	60	4,5,10
6	350	100	15	4	4		8,9,11
7	300	150	25	3		60	4,6,12
8	450	200	35	2		45	3,4,5
9	550	300	20	2		60	6,7,12
10	350	150	10	3	7		3,5,7
11	400	250	30	3	6		2,7,8
12	400	250	15	3		60	4,5,10
13	450	300	25	2	4		4,5,10
14	500	200	35	4		60	5,6,8
15	550	350	30	4	6		2,6,9
16	400	150	15	2		60	3,5,6
17	450	100	25	2	4		4,7,8
18	500	150	35		5	60	1,4,8
19	550	200	30	2	6	60	4,5,8
20	600	300	20	4	6		5,6,8
21	350	150	15	3		45	5,8,9
22	300	250	25	3,5		45	2,6,8
23	450	250	35	2,5	4	30	4,7,9
24	550	350	20	2,5		45	4,5,10
25	350	100	35	2	4		8,10,11
26	400	150	30	3		30	4,5,9
27	450	200	25	4	8		5,9,11
28	500	250	20	3,5		30	3,5,6
29	550	300	15	3		45	5,6,11
30	600	250	10	2,5	6		6,7,12

Задания к расчетно-графической работе № 11







ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 11

Рассчитаем ферму, изображенную на рис. 26.

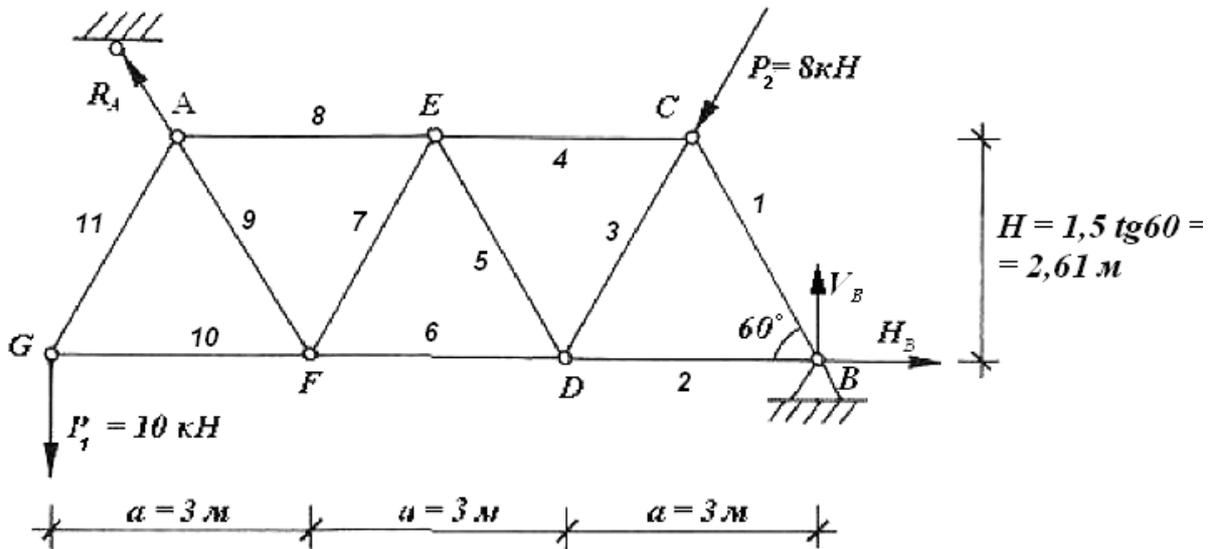


Рис. 26. Заданная ферма

I. Проверим статическую определимость фермы:

$$C = 2Y - 3;$$

$$11 = 2 \cdot 7 - 3;$$

$$11 = 11,$$

следовательно, ферма статически определима и геометрически неизменяема.

II. Определение реакций опор фермы.

1. Найдем сумму моментов относительно точки В, отсюда найдем реакцию R_A .

$$\sum M_B = 0;$$

$$P_2 \sin 60^\circ a/2 + P_2 \cos 60^\circ H + P_1 \cdot 3a - R_A \cos 30^\circ \cdot 2,5 a + R_A H \sin 30^\circ = 0;$$

$$8 \cdot 0,87 \cdot 1,5 + 8 \cdot 0,5 \cdot 2,61 + 10 \cdot 9 - R_A \cdot 0,87 \cdot 7,5 + R_A \cdot 2,61 \cdot 0,5 = 0;$$

$$5,22R_A = 90 + 10,44 + 10,44;$$

$$5,22R_A = 110,88;$$

$$R_A = 21,24 \text{ кН}.$$

2. Найдем сумму проекций всех сил на ось Y , отсюда определим реакцию V_B .

$$\sum Y = 0;$$

$$R_A \cos 30^\circ - P_2 \sin 60^\circ + V_B - P_1 = 0;$$

$$21,24 \cdot 0,87 - 8 \cdot 0,87 + V_B - 10 = 0;$$

$$18,48 - 6,96 - 10 = -V_B;$$

$$V_B = -1,52 \text{ кН.}$$

Так как реакция получилась отрицательная, необходимо изменить ее направление на противоположное.

3. Найдем сумму проекций всех сил на ось X , отсюда найдем реакцию H_B .

$$\sum X = 0;$$

$$H_B - P_2 \cos 60^\circ - R_A \cos 60^\circ = 0;$$

$$H_B - 8 \cdot 0,5 - 21,24 \cdot 0,5 = 0;$$

$$H_B = 14,62 \text{ кН.}$$

4. Сделаем проверку. Для этого найдем сумму моментов относительно точки C .

$$\sum M_C = 0;$$

$$R_A \cos 30^\circ \cdot 2a - P_1 \cdot 2,5a + V_B a/2 - H_B H = 0;$$

$$21,24 \cdot 0,87 \cdot 6 - 10 \cdot 7,5 + 1,52 \cdot 1,5 - 14,62 \cdot 2,61 = 0;$$

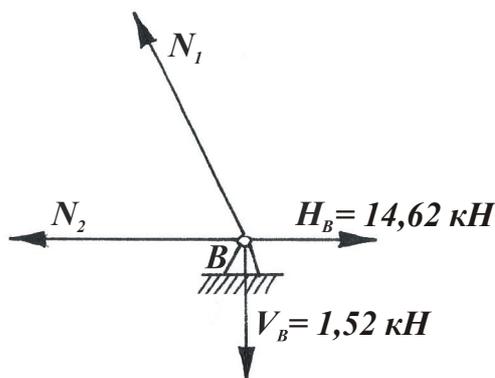
$$110,87 - 75 + 2,28 - 38,16 = 0;$$

$$0 = 0.$$

Реакции опор найдены верно.

III. Находим усилия в стержнях методом вырезания узлов.

1. Вырезаем узел B .



Составим уравнение суммы проекций всех сил на ось Y , отсюда найдем усилие стержня N_1 :

$$\sum Y = 0;$$

$$N_1 \sin 60^\circ - V_B = 0;$$

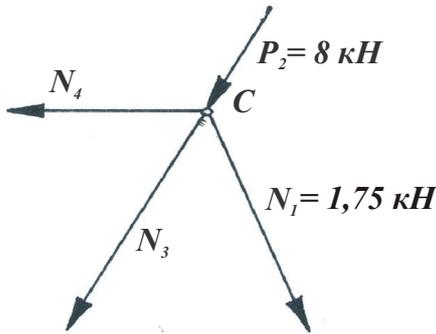
$$N_1 \cdot 0,87 - 1,52 = 0;$$

$$N_1 = 1,75 \text{ кН.}$$

Составим уравнение суммы проекций всех сил на ось X, отсюда найдем усилие стержня N_2 :

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; \\ N_B - N_2 - N_1 \cdot \cos 60^\circ &= 0; \\ 14,62 - N_2 - 1,75 \cdot 0,5 &= 0; \\ N_2 &= 13,75 \text{ кН.}\end{aligned}$$

2. Вырезаем узел C.



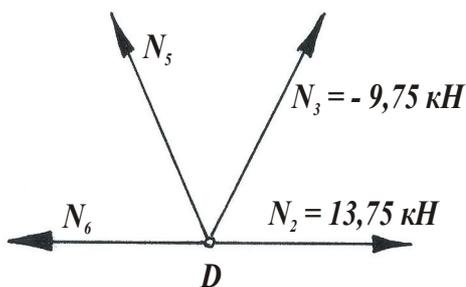
Находим сумму проекций всех сил на ось Y, отсюда вычислим N_3 :

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0; \\ -P_2 \sin 60^\circ - N_1 \sin 60^\circ - N_3 \sin 60^\circ &= 0; \\ -8 \cdot 0,87 - 0,87 \cdot 1,75 - N_3 \cdot 0,87 &= 0; \\ N_3 &= -9,75 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Находим сумму проекций всех сил на ось X, отсюда определим N_4 :

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; \\ -N_4 - P_2 \cos 60^\circ - N_3 \cos 60^\circ + N_1 \cos 60^\circ &= 0; \\ N_4 &= -4 + 0,5 \cdot 9,75 + 1,75 \cdot 0,5; \\ N_4 &= 1,75 \text{ кН.}\end{aligned}$$

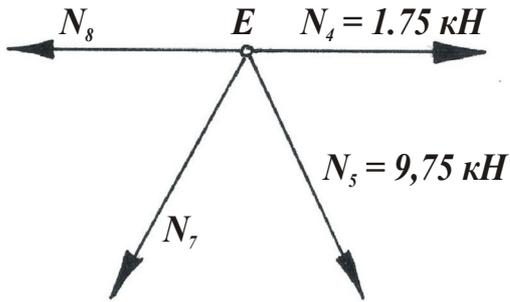
3. Вырезаем узел D.



$$\begin{aligned}\sum Y &= 0; \\ N_5 \sin 60^\circ + N_3 \sin 60^\circ &= 0; \\ N_5 \cdot 0,87 - 9,75 \cdot 0,87 &= 0; \\ N_5 &= 9,75 \text{ кН.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; \\ N_2 + N_3 \cos 60^\circ - N_5 \cos 60^\circ - N_6 &= 0; \\ N_6 &= 13,75 - 9,75 \cdot 0,5 - 9,75 \cdot 0,5; \\ N_6 &= 4 \text{ кН.}\end{aligned}$$

4. Вырезаем узел E.



$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; \\ -N_7 \sin 60^\circ - N_5 \sin 60^\circ &= 0; \\ N_7 \cdot 0,87 &= -9,75 \cdot 0,87; \\ N_7 &= -9,75 \text{ кН.} \end{aligned}$$

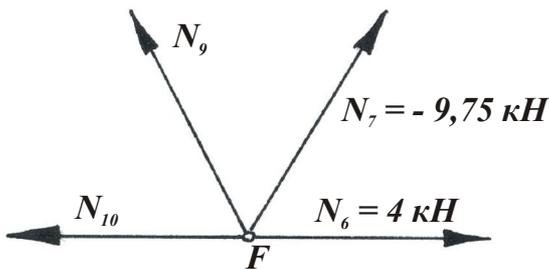
$$\sum X = 0;$$

$$N_4 + N_5 \cos 60^\circ - N_7 \cos 60^\circ - N_8 = 0;$$

$$N_8 = 1,75 + 9,75 \cdot 0,5 + 9,75 \cdot 0,5;$$

$$N_8 = 11,5 \text{ кН.}$$

5. Вырезаем узел F.



$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; \\ N_9 \sin 60^\circ + N_7 \sin 60^\circ &= 0; \\ N_9 \cdot 0,87 - 9,75 \cdot 0,87 &= 0; \\ N_9 &= 9,75 \text{ кН.} \end{aligned}$$

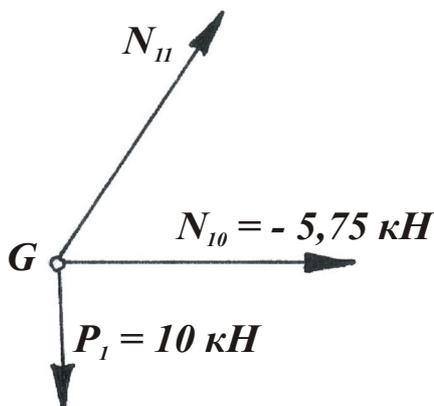
$$\sum X = 0;$$

$$-N_{10} + N_6 + N_7 \cos 60^\circ - N_9 \cos 60^\circ = 0;$$

$$N_{10} = 4 - 0,5 \cdot 9,75 - 0,5 \cdot 9,75;$$

$$N_{10} = -5,75 \text{ кН.}$$

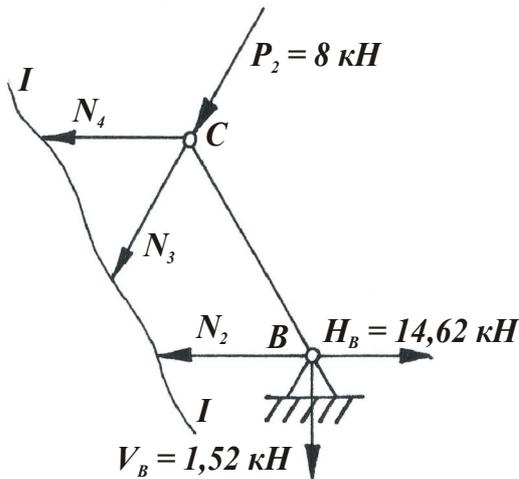
6. Вырезаем узел G.



$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; \\ N_{11} \sin 60^\circ - P_1 &= 0; \\ N_{11} &= 11,49 \text{ кН.} \end{aligned}$$

IV. Выполним проверку найденных усилий в стержнях № 2, 3, 4, 6, 7, 8 методом сечений (методом Риттера).

1. Проведём сечение I–I через стержни № 2, 3, 4 и рассмотрим правую часть фермы.

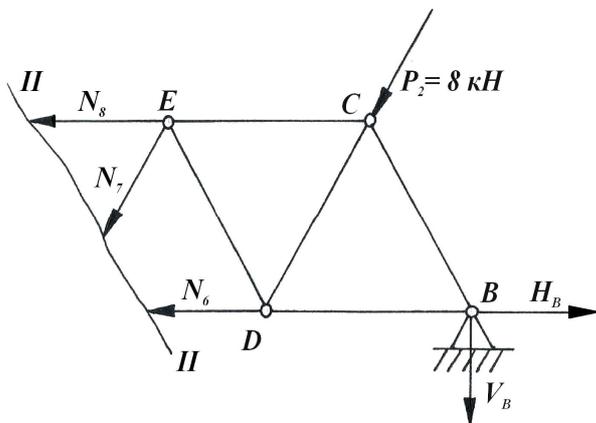


$$\begin{aligned} \sum M_C &= 0; \\ N_2 H - H_B H + V_B a/2 &= 0; \\ 2,61 N_2 - 2,61 \cdot 14,62 + 1,52 \cdot 1,5 &= 0; \\ N_2 &= 13,75 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; \\ -P_2 \sin 60^\circ - V_B - N_3 \sin 60^\circ &= 0; \\ -0,87 \cdot 8 - 1,52 - N_3 \cdot 0,87 &= 0; \\ N_3 &= -9,75 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \\ -N_4 - N_3 \cos 60^\circ - P_2 \cos 60^\circ - N_2 + H_B &= 0; \\ -N_4 + 0,5 \cdot 9,75 - 8 \cdot 0,5 - 13,75 + 14,62 &= 0; \\ N_4 &= 1,75 \text{ кН}. \end{aligned}$$

2. Проведём сечение II–II через стержни № 6, 7, 8 и рассмотрим правую часть фермы.



$$\begin{aligned} \sum M_E &= 0; \\ N_6 H + P_2 \sin 60^\circ a + \\ + V_B H - H_B H &= 0; \\ 2,61 N_6 + 8 \cdot 0,87 \cdot 3 + \\ + 1,52 \cdot 4,5 - 14,62 \cdot 2,61 &= 0; \\ 2,61 N_6 &= 10,44; \\ N_6 &= 4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; \\ -P_2 \sin 60^\circ - V_B - N_7 \sin 60^\circ &= 0; \\ -8 \cdot 0,87 - 1,52 - N_7 \cdot 0,87 &= 0; \end{aligned}$$

$$N_7 = -9,75 \text{ кН.}$$

$$\sum X = 0;$$

$$-N_6 - N_7 \cos 60^\circ - P_2 \cos 60^\circ + H_B - N_8 = 0;$$

$$-4 + 0,5 \cdot 9,75 - 8 \cdot 0,5 + 14,62 - N_8 = 0;$$

$$N_8 = 11,5 \text{ кН.}$$

V. Составим таблицу расчетных усилий.

Уси- лие	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	N ₅	N ₆	N ₇	N ₈	N ₉	N ₁₀	N ₁₁
Зна- чение	1,75	13,75	9,75	1,75	9,75	4	9,75	11,5	9,75	5,75	11,49
Знак	+	+	-	+	+	+	-	+	+	-	+

VI. Подберем сечение из двух равнобоких уголков для пояса.

Максимальное усилие в поясе $N = 13,75$ кН.

Из условия прочности при растяжении-сжатии:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Отсюда площадь сечения:

$$A \geq \frac{|N_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{13,75 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,086 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 0,86 \text{ см}^2.$$

Так как уголка два, то требуемая площадь одного составит $0,86/2 = 0,43 \text{ см}^2$. По сортаменту прокатной стали уголков ГОСТ 8509-93 (табл. 16) принимаем уголок $50 \times 50 \times 3$ с $A = 2,96 \text{ см}^2$ (в данном случае минимальный).

Аналогично подбирается уголок для решетки фермы.

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Статически неопределимыми называются системы, в которых число неизвестных реакций связей больше числа уравнений равновесия, необходимых для их определения (рис. 27). Таким образом, часть связей в этом смысле лишние, а соответствующие усилия – лишние неизвестные. По числу лишних связей устанавливают *степень статической неопределимости системы* – это число лишних связей, устранение которых обращает систему в статически определимую. Она определяется по формуле $n = R - 3$, где R – количество опорных связей (реакций).

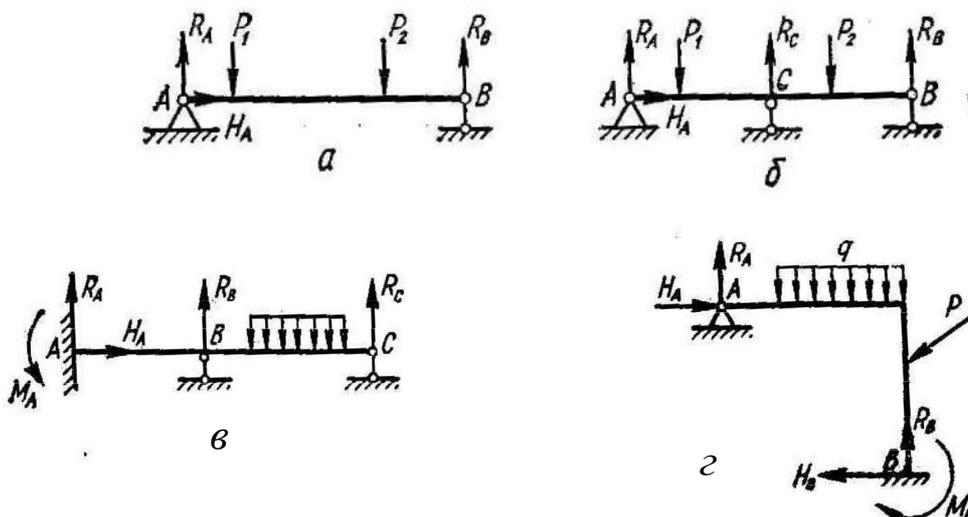


Рис. 27. Конструкции: а) статически определимые;
б, в, г) статически неопределимые

Для расчета статически неопределимых систем существует несколько методов: метод начальных параметров, метод сил, метод перемещений, метод моментных фокусов, уравнение трех моментов и др.

В расчетно-графической работе № 12 рассмотрим применение метода начальных параметров для расчета статически неопределимой балки с защемлением.

Расчетно-графическая работа № 12

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

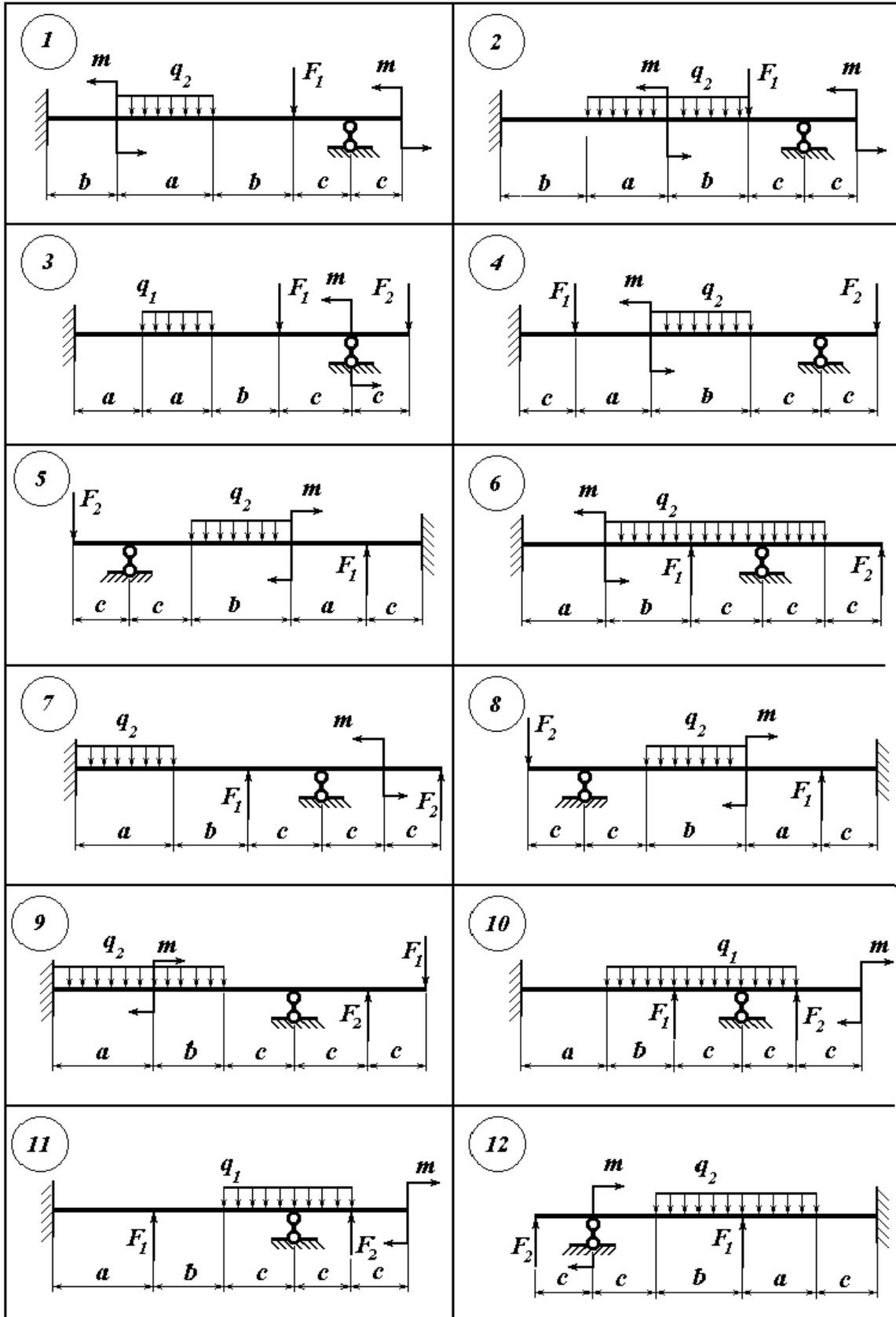
Для заданной статически неопределимой балки с защемлением (табл. 34) при числовых значениях размеров и нагрузок по строке табл. 33 требуется:

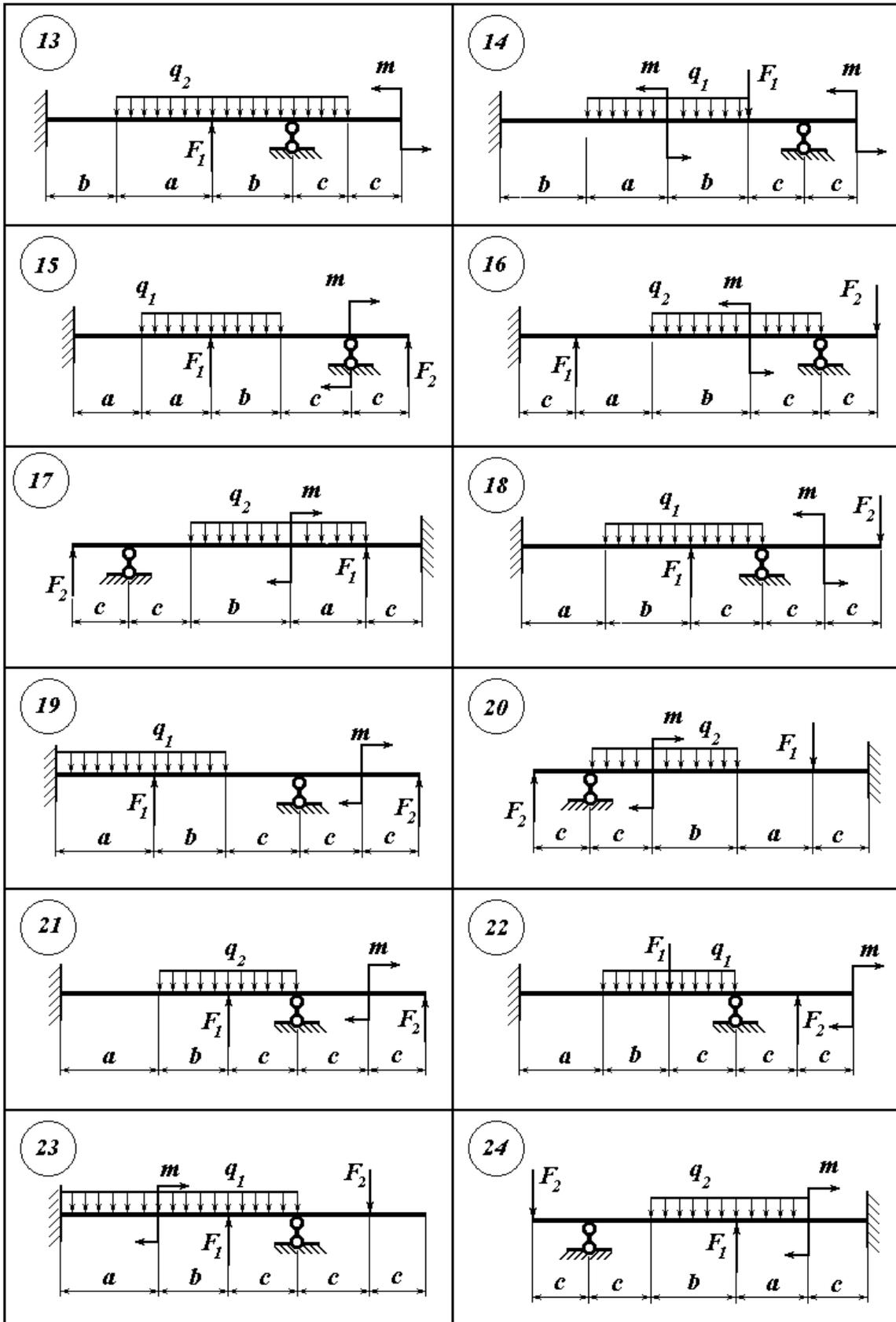
- 1) раскрыть статическую неопределимость балки;
- 2) построить эпюры внутренних силовых факторов и указать опасные сечения;
- 3) из условий прочности подобрать стальные сечения балки следующих типов: круглое; прямоугольное с соотношением сторон $h=2b$; прямоугольное с соотношением сторон $h=3b$; квадратное; кольцевое с соотношением диаметров $\alpha = d / D = 0,8$; сечение, сложенное из двух швеллеров и двутавровое, приняв в расчетах допускаемое напряжение для стали $[\sigma] = 160$ МПа. Сделать вывод о рациональности одного из сечений;
- 4) построить эскиз упругой линии балки с помощью метода начальных параметров, определяя значения прогибов на всех границах и серединах участков балки;
- 5) проверить условие жесткости балки ($f_{max} \leq [f]$) отдельно для пролета и консоли, приняв $[f] = l/250$, где l – длина пролета или консоли.

Исходные данные к РГР № 12

№ вар.	a , м	b , м	c , м	F_1 , кН	F_2 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	m , кНм
1	1,0	3,0	2,0	10	30	1,0	6,0	50
2	1,2	3,0	1,8	11	25	1,5	5,0	45
3	1,4	2,8	1,6	12	20	2,0	4,0	40
4	1,6	2,8	1,4	13	15	2,5	3,0	35
5	1,8	2,6	1,2	14	10	3,0	2,0	30
6	1,6	2,6	1,0	15	10	3,5	1,0	25
7	1,4	2,4	2,0	15	15	4,0	6,0	20
8	1,8	2,4	1,8	14	20	4,0	5,0	50
9	1,8	2,2	1,6	13	25	3,5	4,0	40
10	2,0	2,2	1,4	12	30	3,0	3,0	30
11	1,8	2,0	1,0	22	10	5,0	3,0	55
12	1,8	3,0	1,0	10	25	2,0	1,0	45
13	1,8	2,8	1,0	20	20	1,5	1,0	35
14	1,6	2,8	1,4	21	15	1,0	1,5	25
15	1,6	2,6	1,6	22	10	6,0	2,0	20
16	1,4	2,6	1,8	23	10	5,0	2,5	25
17	1,4	2,4	2,0	24	15	4,0	3,0	30
18	1,2	2,4	2,2	25	20	3,0	3,5	35
19	1,2	2,2	1,9	25	25	2,0	4,0	40
20	1,0	2,2	1,6	24	30	1,0	4,0	45
21	1,0	2,0	1,2	23	30	6,0	3,5	50
22	2,0	3,0	1,2	11	30	2,5	2,0	20
23	1,8	2,2	2,4	21	15	4,0	2,5	60
24	1,6	2,2	2,0	20	20	3,0	2,0	60
25	2,0	1,0	3,0	10	35	4,0	3,0	35
26	3,0	2,0	2,5	15	30	6,0	2,0	40
27	2,5	1,5	2,0	20	25	2,0	4,0	45
28	3,5	1,5	1,5	25	20	3,0	5,0	50
29	3,0	2,0	1,0	30	15	5,0	6,0	55
30	2,5	2,5	1,5	25	10	6,0	2,0	60

Статически неопределимая стальная двутавровая балка





ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 12

Определяем степень статической неопределимости (рис. 28).

$n = R - 3$; где R – число опорных реакций

$n = 4 - 3$;

$n = 1$.

Определяем опорные реакции в балке только с нагрузкой.

$$\sum M'_A = 0;$$

$$M'_A - F_1 \cdot 3,5 + g \cdot 2 \cdot 6,5 - F_2 \cdot 7,5 + m = 0;$$

$$M'_A - 38,5 + 32,5 - 225 + 20 = 0;$$

$$M'_A = 211 \text{ кНм.}$$

$$\sum y = 0;$$

$$-R'_A + F_1 + F_2 - q \cdot 2 = 0;$$

$$-R'_A + 11 + 30 - 5 = 0;$$

$$R'_A = 36 \text{ кН.}$$

Определяем прогиб в точке В в балке только с нагрузкой методом начальных параметров.

$$EI_x v_i = EI_x v_0 + EI_x \theta_0 z_i \pm \sum \frac{M(z_i - a)^2}{2!} \pm \sum \frac{F(z_i - b)^3}{3!} \pm \sum \frac{q(z_i - c)^4}{4!} -$$

универсальное уравнение упругой линии балки. Начальные параметры $EI_x v_0$ и $EI_x \theta_0$ определяем из условия закрепления балки.

После выбора начала отсчета в жесткой заделке балки получим, что $EI_x v_0 = 0$ и $EI_x \theta_0 = 0$, так как защемление препятствует вертикальным и угловым перемещениям балки.

$$\omega'_B = \frac{1}{EI} \left(\frac{M'_A \cdot 6,5^2}{2!} - \frac{R'_A \cdot 6,5^3}{3!} + \frac{F_1 \cdot 3^3}{3!} - \frac{q \cdot 1^4}{4!} \right) =$$

$$\frac{1}{EI} \left(\frac{211 \cdot 6,5^2}{2} - \frac{36 \cdot 6,5^3}{6} + \frac{11,3 \cdot 3^3}{6} - \frac{2,5 \cdot 1^4}{24} \right) =$$

$$\frac{4457,38 - 1647,75 + 49,5 - 0,1}{EI} = \frac{2859,03}{EI};$$

Определяем прогиб в балке при действии только неизвестной реакции в точке В. Находим реакции:

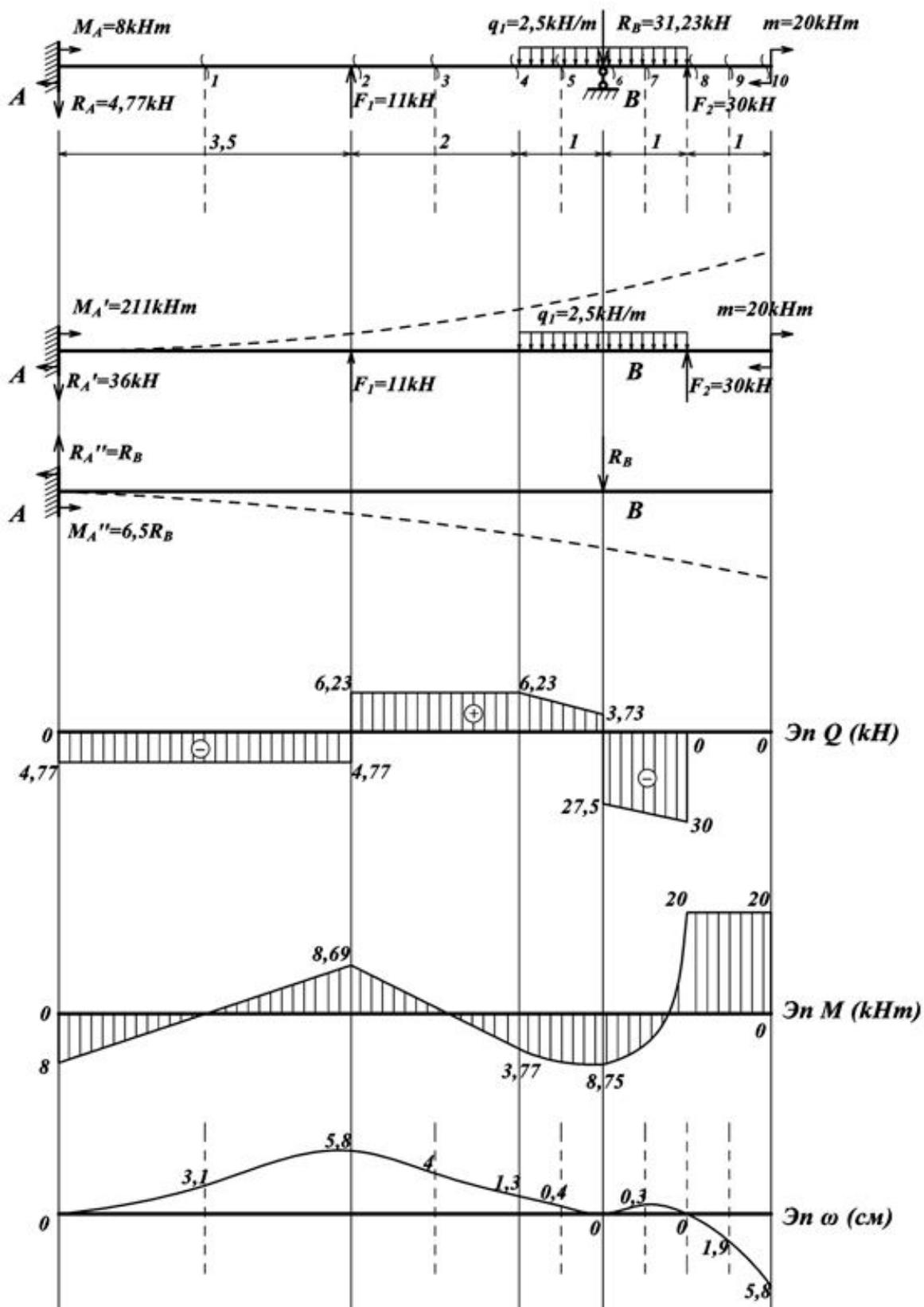


Рис. 28. К расчету статически неопределимой балки

$$\sum M''_A = 0;$$

$$-M''_A + 6,5R_B = 0;$$

$$M''_A = 6,5R_B.$$

$$\sum y = 0;$$

$$R''_A - R_B = 0;$$

$$R''_A = R_B.$$

Определяем прогиб.

$$\omega_B'' = \frac{1}{EI} \left(\frac{R''_A \cdot 6,5^3}{3!} - \frac{M''_A \cdot 6,5^2}{2!} \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{R_B \cdot 6,5^3}{6} - \frac{6,5R_B \cdot 6,5^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{(44,77 - 137,31)R_B}{EI} = -\frac{91,54R_B}{EI};$$

так как $\omega_B = \omega''_B + \omega'_B = 0$, то получим

$$\frac{2859,03}{EI} - \frac{91,54R_B}{EI} = 0;$$

$$R_B = 31,23 \text{ кН.}$$

С учетом найденной реакции строим эпюры внутренних силовых факторов Q и M известными методами, расчеты ведем со свободного конца балки.

В конце расчета определяем реакции в заделке: $R_A = 4,77 \text{ кН}$,
 $M_A = 8 \text{ кНм}$.

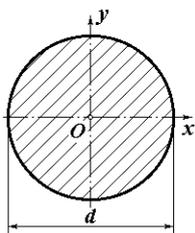
Определим момент сопротивления заданной балки и условия прочности при изгибе в опасном сечении.

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа};$$

$$M_{\max} = 20 \text{ кНм};$$

$$W \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 125 \text{ см}^3.$$

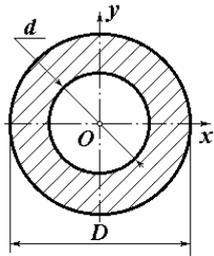
Определяем размеры поперечного сечения заданного типа:



- круглое поперечное сечение: $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 125}{3,14}} = 10,8 \text{ см. Примем } d = 11 \text{ см.}$$

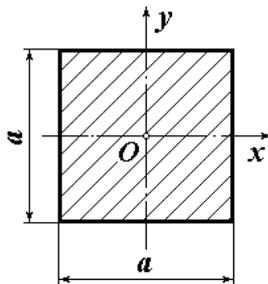
Площадь сечения круга: $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 11^2}{4} = 95 \text{ см}^2$.



- кольцевое поперечное сечение: $W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4)$,

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi \cdot (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 125}{3,14 \cdot (1 - 0,8^4)}} = 12,9 \text{ см.}$$

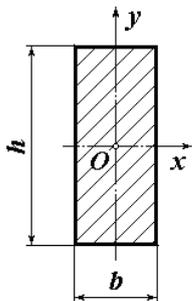
Примем $D = 13 \text{ см.}$ $A = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2) = \frac{3,14 \cdot 13^2}{4}(1 - 0,8^2) = 47,8 \text{ см}^2$.



- квадратное сечение: $W_x = \frac{a^3}{6}$,

$$a \geq \sqrt[3]{6W_x} = \sqrt[3]{6 \cdot 125} = 9,02 \text{ см.}$$

Примем $a = 9 \text{ см,}$ $A = a^2 = 9^2 = 81 \text{ см}^2$.



- прямоугольное сечение с соотношением сторон

$$h = 2b: W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3},$$

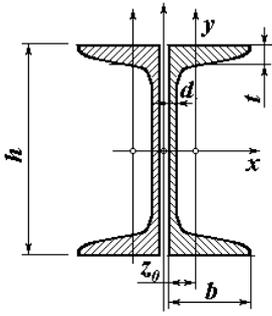
$$b \geq \sqrt[3]{1,5W_x} = \sqrt[3]{1,5 \cdot 125} = 5,72 \text{ см.}$$

Примем $b = 6 \text{ см,}$ тогда $h = 2b = 12 \text{ см,}$ $A = bh = 6 \cdot 12 = 72 \text{ см}^2$.

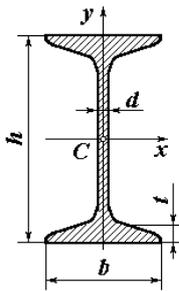
Аналогично при $h = 3b:$ $W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(3b)^2}{6} = \frac{3b^3}{2},$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2}{3}W_x} = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \cdot 125} = 4,4 \text{ см. Примем } b = 4,5 \text{ см,}$$

тогда $h = 3b = 13,5 \text{ см,}$ $A = bh = 4,5 \cdot 13,5 = 60,75 \text{ см}^2$.



- сечение, составленное из 2-х швеллеров, сложенных стенками: $W_x^I = \frac{W_x}{2} = \frac{125}{2} = 62,5 \text{ см}^3$. По сортаменту швеллеров ГОСТ 8240-97 (табл. 19), принимаем швеллер № 14 с $W_x = 70,2 \text{ см}^3$ и $A_I = 15,6 \text{ см}^2$. Тогда общая площадь $A = 2A_I = 31,2 \text{ см}^2$.



- двутавровое сечение: $W \geq W_x$. По сортаменту двутавров ГОСТ 8239-89 (табл. 18) принимаем двутавр № 18 с $W_x = 143 \text{ см}^3$, $I_x = 1290 \text{ см}^4$, $A = 23,4 \text{ см}^2$.

Сравним найденные варианты сечений по экономичности (по площади), для чего вычислим отношение каждой площади к площади двутаврового сечения (по порядку):

$$\frac{95}{23,4} = 4,06; \quad \frac{47,8}{23,4} = 2,04; \quad \frac{81}{23,4} = 3,46; \quad \frac{72}{23,4} = 3,08;$$

$$\frac{60,75}{23,4} = 2,6; \quad \frac{31,2}{23,4} = 1,33; \quad \frac{23,4}{23,4} = 1.$$

Приходим к выводу, что наиболее выгодным по расходу материала является двутавровое сечение с минимальной площадью. Как показали расчеты, оно выгоднее, например, круглого в 4 раза.

Построение эпюры прогибов.

$$\omega_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A \cdot 1,75^2}{2!} - \frac{R_A \cdot 1,75^3}{3!} \right) = \frac{12,25 - 4,26}{EI} = \frac{7,99 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 0,0031 \text{ м} = 3,1 \text{ мм};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A \cdot 3,5^2}{2!} - \frac{R_A \cdot 3,5^3}{3!} \right) = \frac{49 - 34,09}{EI} = \frac{14,91 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 0,0058 \text{ м} = 5,8 \text{ мм};$$

$$\omega_3 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A \cdot 4,5^2}{2!} - \frac{R_A \cdot 4,5^3}{3!} + \frac{F_1 \cdot 1^3}{3!} \right) = \frac{81 - 72,44 + 1,83}{EI} =$$

$$= \frac{10,39 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,004 \text{ м} = 4 \text{ мм};$$

$$\omega_4 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A \cdot 5,5^2}{2!} - \frac{R_A \cdot 5,5^3}{3!} + \frac{F_1 \cdot 2^3}{3!} \right) = \frac{121 - 132,27 + 14,66}{EI} =$$

$$= \frac{3,39 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,0013 \text{ м} = 1,3 \text{ мм};$$

$$\omega_5 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A \cdot 6^2}{2!} - \frac{R_A \cdot 6^3}{3!} + \frac{F_1 \cdot 2,5^3}{3!} - \frac{q \cdot 0,5^4}{4!} \right) = \frac{144 - 171,72 + 28,65 - 0,007}{EI} =$$

$$= \frac{0,923 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,004 \text{ м} = 4 \text{ мм};$$

$$\omega_6 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A \cdot 6,5^2}{2!} - \frac{R_A \cdot 6,5^3}{3!} + \frac{F_1 \cdot 3^3}{3!} - \frac{q \cdot 1^4}{4!} \right) = \frac{169 - 218,33 + 49,5 - 0,1}{EI} =$$

$$= \frac{0,07 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,00002 \text{ м} = 0,02 \text{ мм} \approx 0;$$

$$\omega_7 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A \cdot 7^2}{2!} - \frac{R_A \cdot 7^3}{3!} + \frac{F_1 \cdot 3,5^3}{3!} - \frac{q \cdot 1,5^4}{4!} - \frac{R_B \cdot 0,5^3}{3!} \right) =$$

$$= \frac{196 - 272,69 + 78,6 - 0,53 - 0,65}{EI} = \frac{0,73 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 0,0003 \text{ м} = 0,3 \text{ мм};$$

$$\omega_8 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A \cdot 7,5^2}{2!} - \frac{R_A \cdot 7,5^3}{3!} + \frac{F_1 \cdot 4^3}{3!} - \frac{q \cdot 2^4}{4!} - \frac{R_B \cdot 1^3}{3!} \right) =$$

$$= \frac{225 - 335,39 + 117,33 - 1,67 - 5,21}{EI} = \frac{0,06 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 0,00002 \text{ м} = 0,02 \text{ мм} \approx 0;$$

$$\omega_9 = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A \cdot 8^2}{2!} - \frac{R_A \cdot 8^3}{3!} + \frac{F_1 \cdot 4,5^3}{3!} - \frac{q \cdot 2,5^4}{4!} + \frac{q \cdot 0,5^4}{4!} - \frac{R_B \cdot 1,5^3}{3!} + \frac{F_2 \cdot 0,5^3}{3!} \right)$$

$$= \frac{256 - 407,04 + 167,06 - 4,07 + 0,007 - 17,57 + 0,63}{EI} = \frac{-4,98 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= -0,0019 \text{ м} = -1,9 \text{ мм};$$

$$\omega_{10} = \frac{1}{EI} \left(\frac{M_A \cdot 8,5^2}{2!} - \frac{R_A \cdot 8,5^3}{3!} + \frac{F_1 \cdot 5^3}{3!} - \frac{q \cdot 3^4}{4!} + \frac{q \cdot 1^4}{4!} - \frac{R_B \cdot 2^3}{3!} + \frac{F_2 \cdot 1^3}{3!} \right) =$$

$$= \frac{289 - 488,23 + 229,17 - 8,44 + 0,1 - 41,64 + 5}{EI} = \frac{-15,04 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= -0,0058 \text{ м} = -5,8 \text{ мм}.$$

Проверка жесткости балки.

$$\omega_{\max} \leq [\omega] \text{ — условие жесткости;}$$

$$[\omega] = \frac{l}{250} \text{ — допускаемый прогиб.}$$

$$[\omega]_{\text{Пролет}} = \frac{l}{250} = \frac{6,5 \cdot 10^3}{250} = 26 \text{ мм}.$$

$$[\omega]_{\text{Консоль}} = \frac{l}{250} = \frac{2 \cdot 10^3}{250} = 8 \text{ мм}.$$

$$[\omega]_{\text{max}}^{\text{Пролет}} = 5,8 \text{ мм} \leq [\omega]_{\text{Пролет}} = 26 \text{ мм, условие выполняется.}$$

$$[\omega]_{\text{max}}^{\text{Консоль}} = 5,8 \text{ мм} \leq [\omega]_{\text{Консоль}} = 8 \text{ мм, условие выполняется.}$$

Если условие жесткости не выполняется, то необходимо увеличить номер двутавра из условия жесткости.

МЕТОД СИЛ

Методом сил называют метод определения усилий и перемещений в статически неопределимой системе, при котором в качестве основных неизвестных выбираются силы (усилия или реакции связей).

После определения степени статической неопределимости выбирают основную систему метода сил, которых может быть несколько. Для расчета принимают наиболее рациональную из них. *Основная система* – статически определимая, геометрически неизменяемая система, полученная из заданной путем отбрасывания лишних связей и замены их действия неизвестными усилиями.

Затем составляют систему канонических уравнений, которые выражают то, что перемещения по направлению отброшенных связей в основной системе должны равняться нулю. Если система один раз статически неопределима, то уравнение одно и имеет вид $\delta_{11}x_1 + \Delta_{1p} = 0$, если два раза, то получается система из

двух уравнений с двумя неизвестными:
$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases} \text{ и}$$

т.д., где δ_{ij} – коэффициенты, отвергающие перемещения по направлению i от усилия j ; p – от внешней нагрузки (свободные члены). Решив эту систему, мы определим все неизвестные и раскроем статическую неопределимость заданной конструкции.

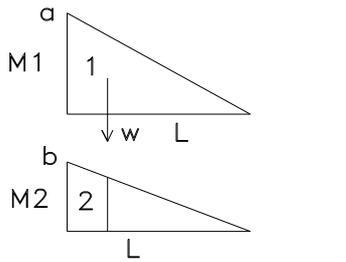
Далее строятся единичные и грузовая эпюры. Единичные эпюры получаются от приравнивания единице неизвестных усилий x_1, x_2 и т.д. и построения соответствующих эпюр \bar{M}_1, \bar{M}_2 и т.д., а грузовые – от построения эпюры M_p от внешней нагрузки в основной системе.

После построения единичных и грузовой эпюр определяют коэффициенты и свободные члены канонических уравнений при помощи интеграла Мора и вычисляются по правилу Верещагина перемножением соответствующих эпюр:

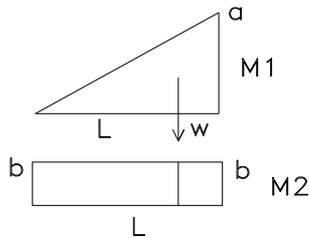
$$\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_j}{EI} dx - \text{интеграл Мора.}$$

Интеграл Мора вычисляется при помощи *правила Верещагина*: для перемножения двух эпюр необходимо площадь одной эпюры умножить на ординату второй эпюры, расположенную под центром тяжести первой. При этом произведение эпюр положительно, если они расположены по одну сторону от нулевой линии, отрицательно – если в разные.

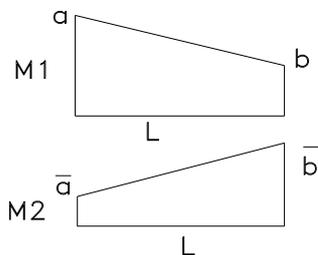
Например, если эпюры имеют следующие формы, то их произведение примет вид



$$\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 = \frac{1}{2}al \frac{2}{3}b = \frac{alb}{3};$$

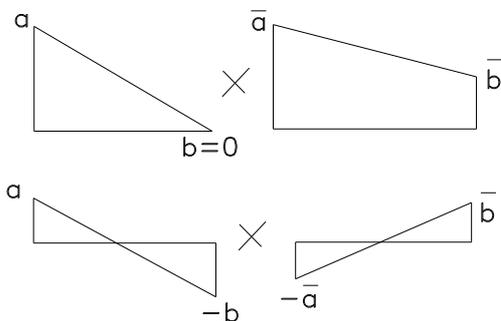


$$\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 = \frac{1}{2}alb = \frac{alb}{2}.$$



Формула для перемножения трапеций:

$$\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2 = \frac{l}{6} (2a\bar{a} + 2b\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{b}).$$



Если эпюры имеют форму треугольника и трапеции, то у треугольника одно основание удобнее взять равным нулю и считать его как трапецию с нулевым основанием.

Аналогично последний случай расположения эпюр можно считать как трапеции с одним отрицательным основанием.

Если одна из эпюр криволинейна, то находится ее площадь и умножается на ординату в другой эпюре, расположенную под центром тяжести криволинейной. Криволинейная эпюра при этом «расслаивается» на трапецию и параболический сегмент, и тогда находится площадь каждой из фигур отдельно. При этом площадь параболического сегмента вычисляется по формуле $\frac{ql^3}{12}$.

После определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений необходимо составить и решить систему уравнений, находя неизвестные усилия x_1 , x_2 и т.д. Затем строят эпюру моментов по формуле

$$M_{OK} = \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2 + \dots + \bar{M}_n x_n + M_p,$$

где $\bar{M}_n x_n$ – эпюра \bar{M}_n , все ординаты которой умножены на x_n . Эпюра M_{OK} получается сложением соответствующих значений на эпюрах $\bar{M}_n x_n$ и M_p . По эпюре моментов строят эпюру поперечных сил Q , а по эпюре Q – эпюру продольных сил N (для рам).

В случае легких конструкций после определения неизвестного усилия x_1 , x_2 и т.д. можно строить эпюры Q , N и M известными способами, учитывая найденные значения опорных реакций.

С помощью интеграла Мора можно также определять любые перемещения в конструкциях (линейные – вертикальные, горизонтальные и угловые – углы поворота).

Расчетно-графическая работа № 13

РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ, СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Для заданной статически неопределимой рамы (табл. 36) при числовых значениях размеров и нагрузок по строке варианта из табл. 35 требуется:

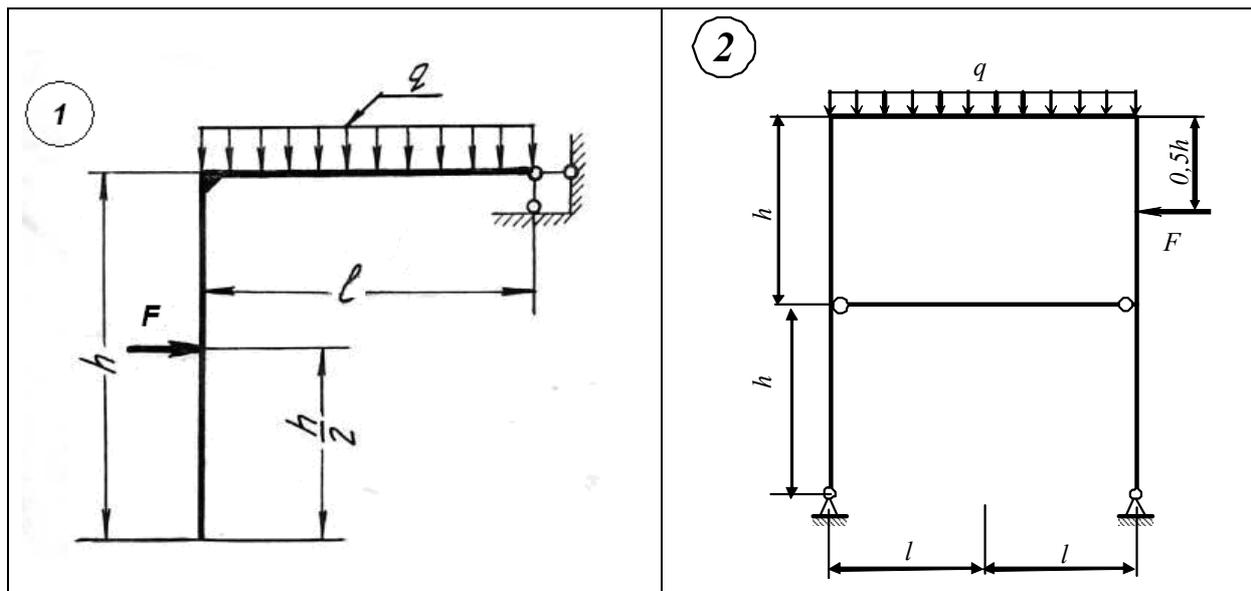
- 1) определить степень статической неопределимости заданной системы;
- 2) составить несколько вариантов основных систем и выбрать наиболее рациональную из них для дальнейшего расчета;
- 3) составить систему канонических уравнений метода сил;
- 4) построить единичные эпюры изгибающих моментов от лишних неизвестных, суммарную единичную эпюру моментов и грузовую эпюру моментов от заданной нагрузки в основной системе;
- 5) определить коэффициенты и свободные члены (единичные и грузовые перемещения в основной системе) канонических уравнений;
- 6) произвести универсальный контроль единичных и грузовых перемещений;
- 7) составить и решить систему уравнений с численными коэффициентами;
- 8) построить эпюры внутренних силовых факторов Q , M , N в заданной системе;
- 9) произвести контроль статическим и кинематическим методами правильности построения эпюры изгибающих моментов;
- 10) произвести контроль эпюр Q и N из условия отсеченной части рамы;
- 11) подобрать двутавровое сечение элементов заданной рамы.

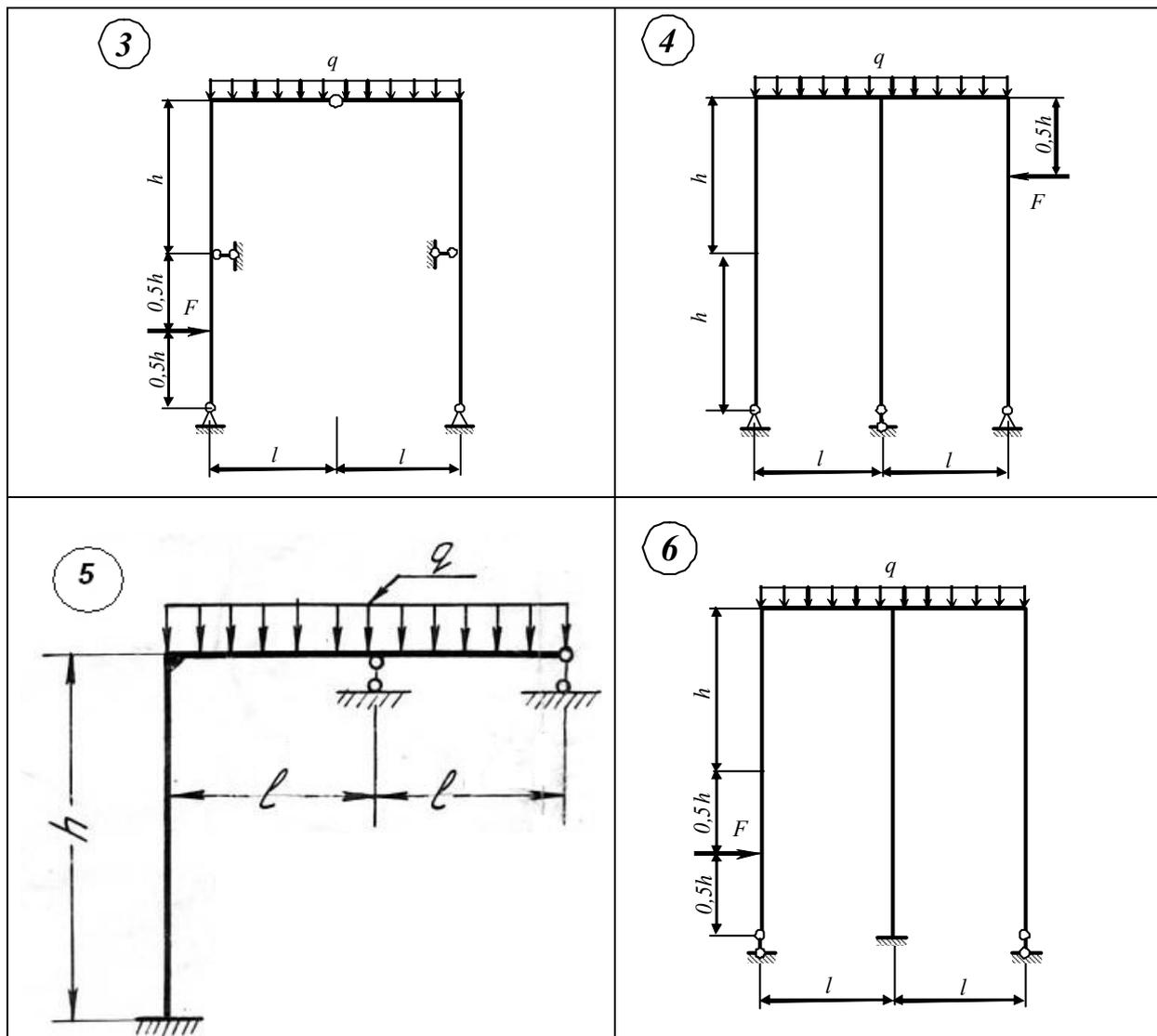
Т а б л и ц а 35

Исходные данные для расчета рам

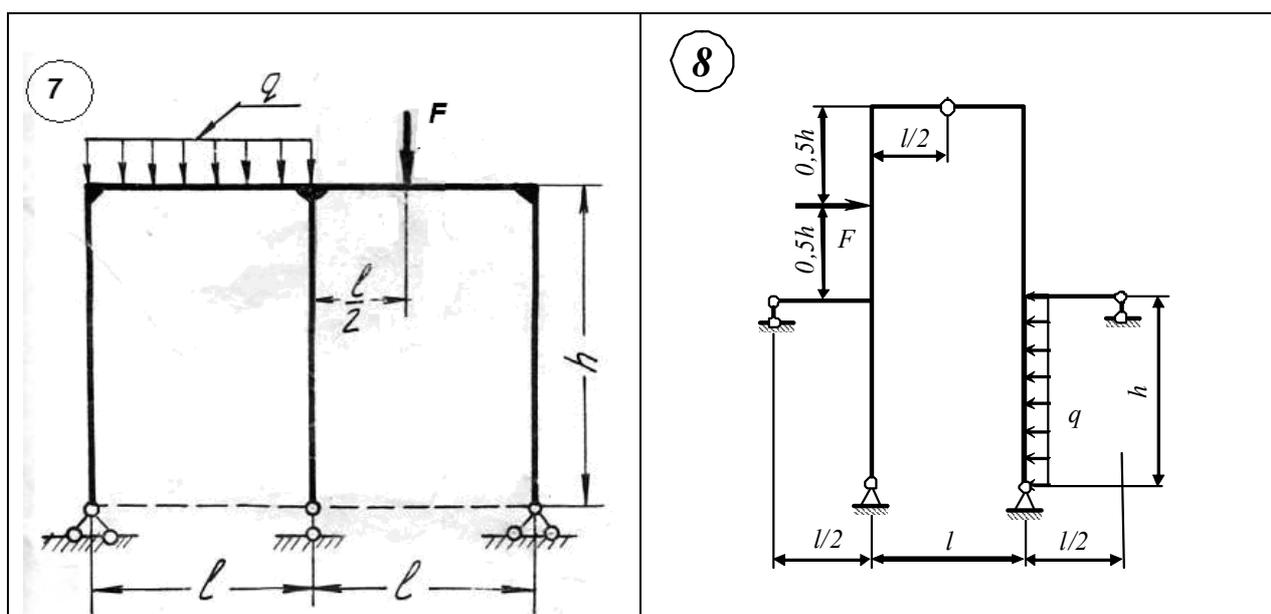
Номер строки	Нагрузки				Номер строки	Нагрузки			
	l (м)	h (м)	q (кН/м)	F (кН)		l (м)	h (м)	q (кН/м)	F (кН)
1	4	4	2	20	16	4	4	4	40
2	3	2	4	40	17	2	3	3	20
3	2	3	4	30	18	5	5	3	30
4	5	5	2	20	19	3	3	3	25
5	6	5	3	25	20	4	3	2	20
6	4	6	3	35	21	2	4	2	55
7	5	4	2	45	22	5	6	3	30
8	4	3	4	40	23	6	5	4	50
9	3	2	4	30	24	6	6	4	40
10	2	4	3	35	25	3	2	4	25
11	2	3	3	25	26	2	4	3	30
12	3	3	2	20	27	5	3	3	35
13	4	5	4	45	28	6	3	2	20
14	5	6	4	40	29	4	5	2	45
15	6	6	2	30	30	5	2	4	30

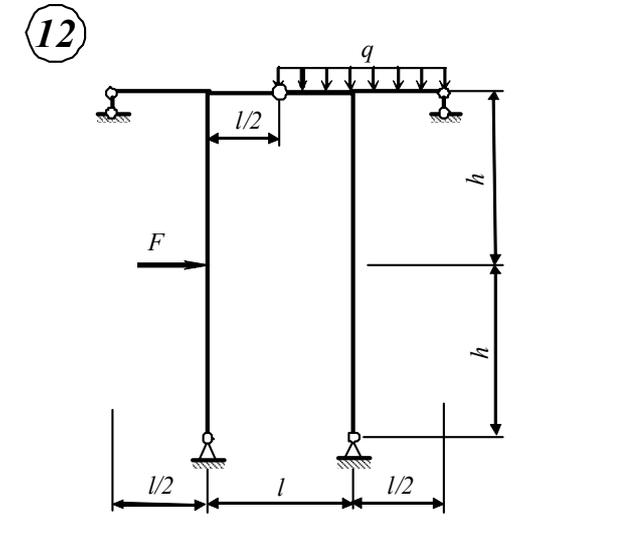
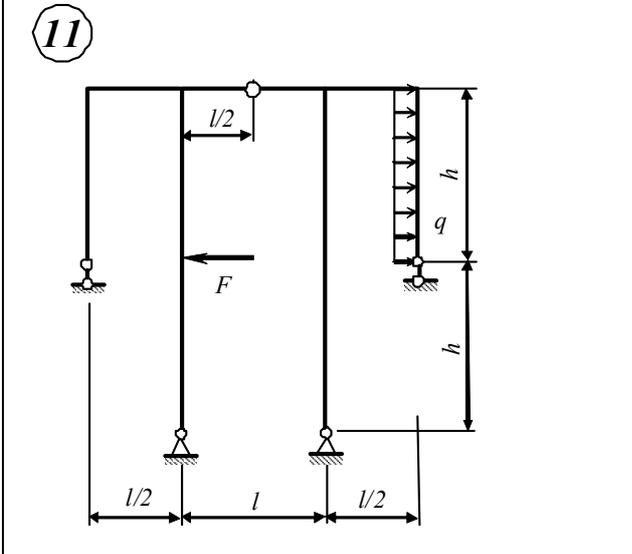
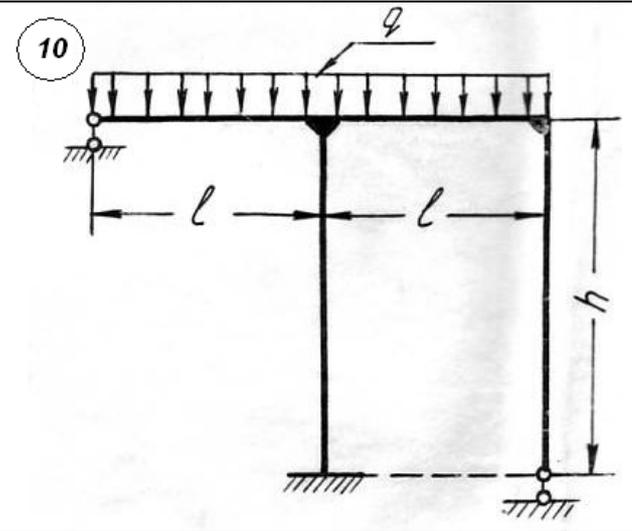
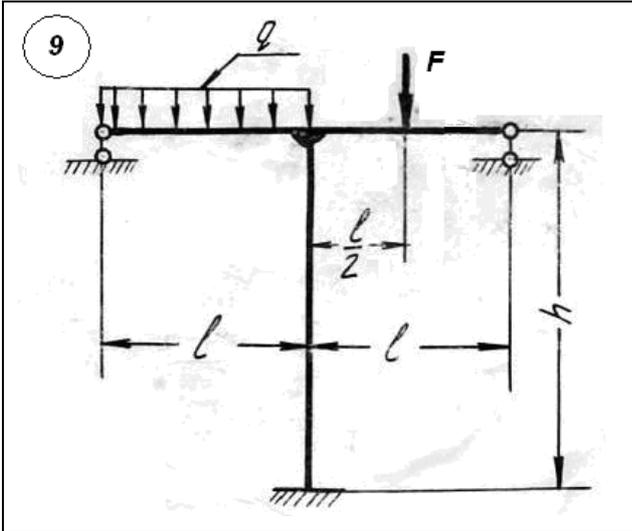
Т а б л и ц а 36

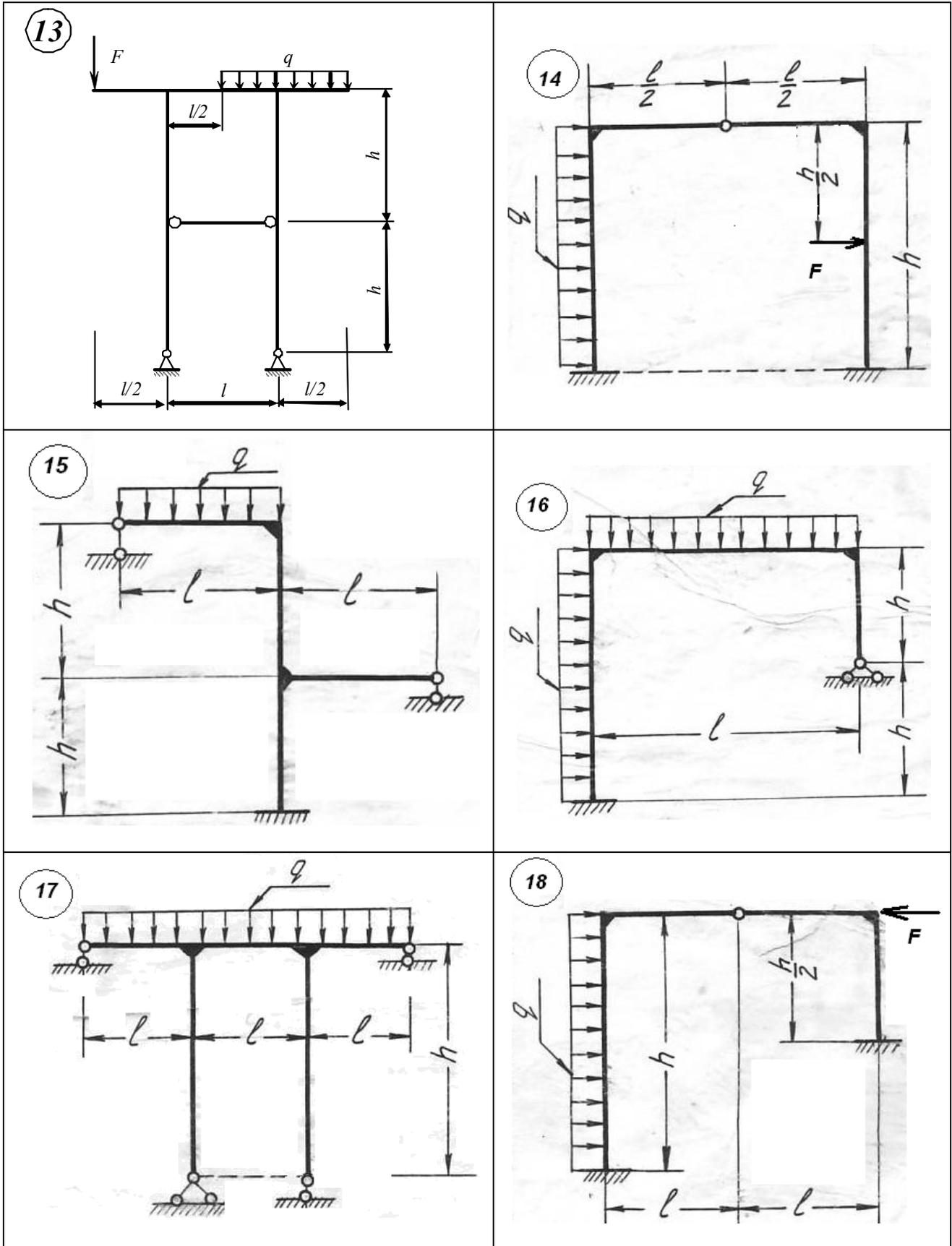


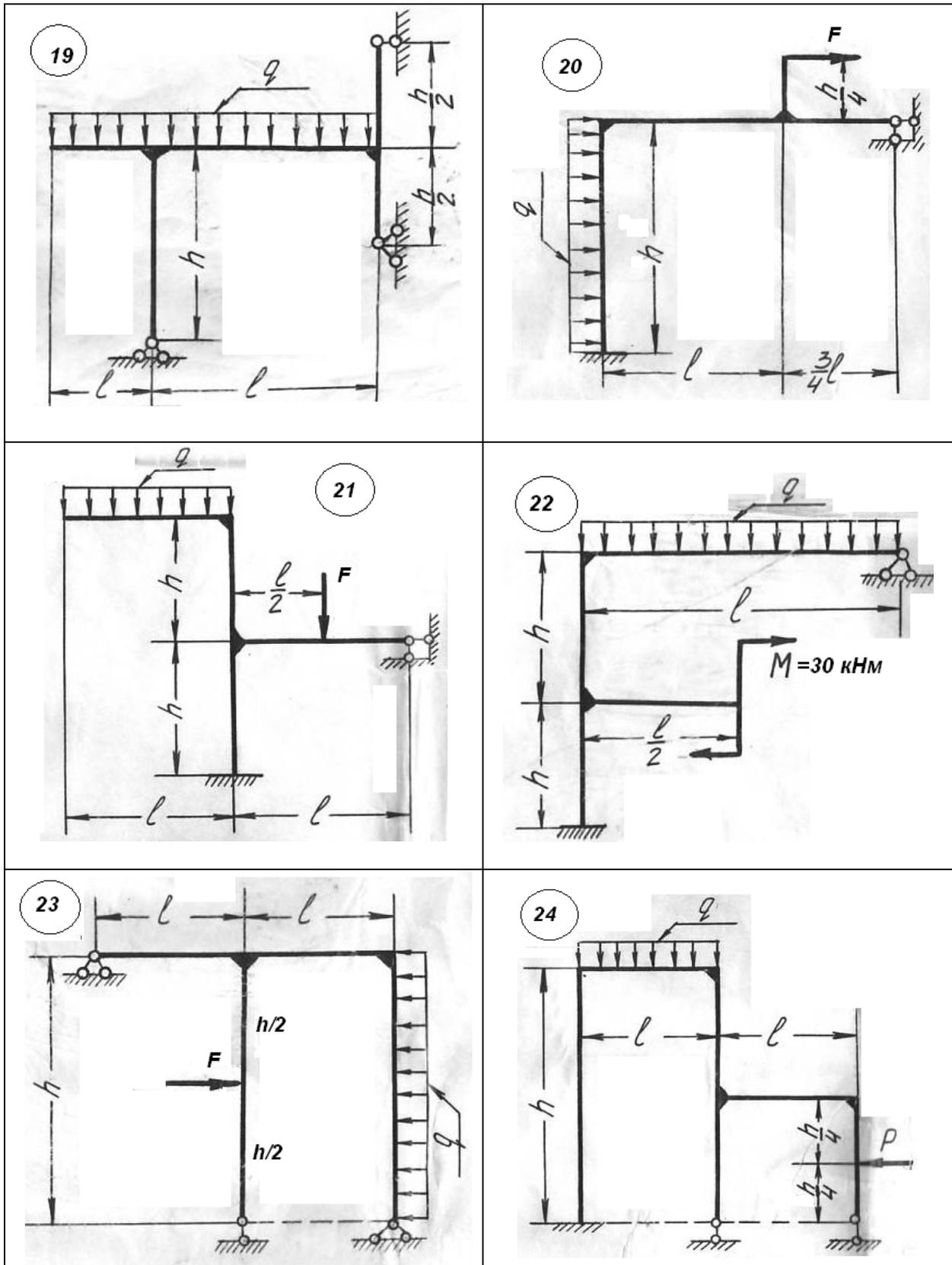


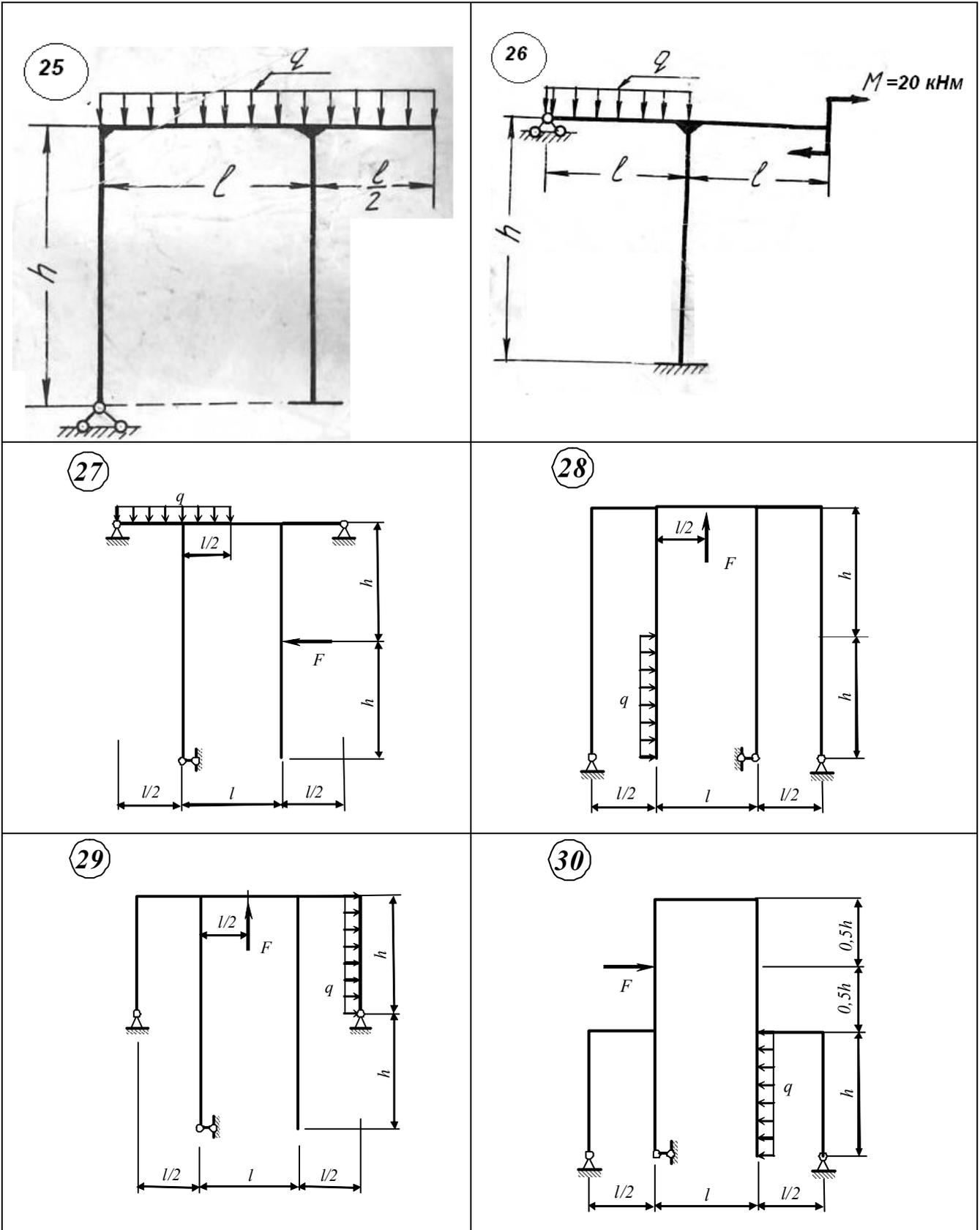
Продолжение табл. 36











ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 13

Рассчитаем статически неопределимую раму, изображенную на рис. 29 методом сил.

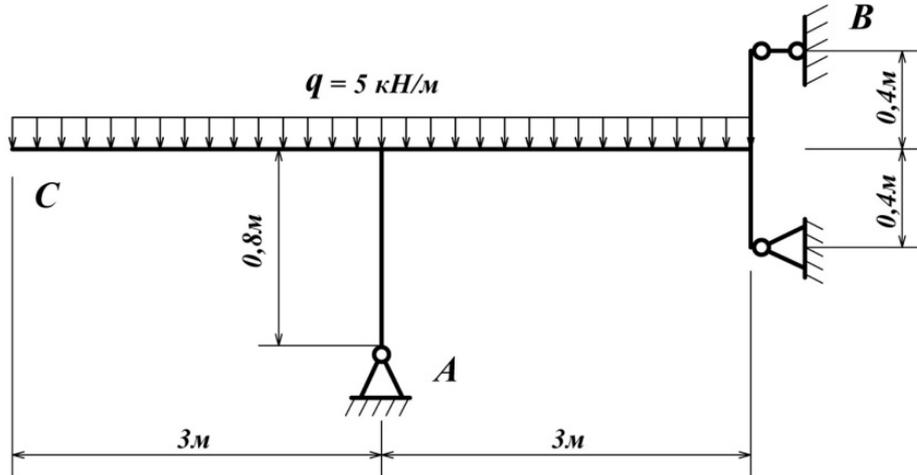
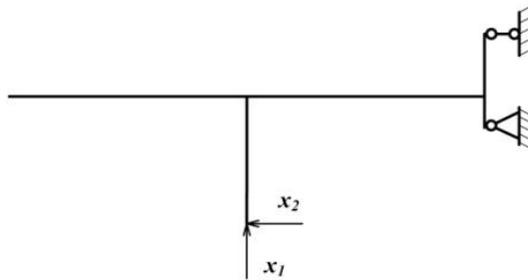


Рис. 29. Статически неопределимая рама

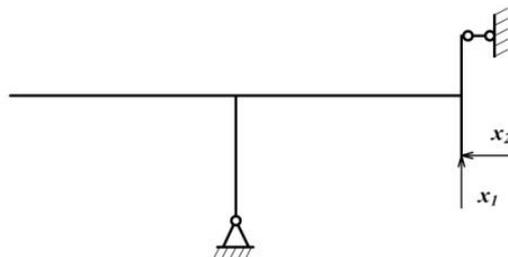
1. Определение степени статической неопределимости рамы и выбор основной системы.

$n = R - 3 = 5 - 3 = 2$ – рама дважды статически неопределима.

Первый вариант основной системы:



Второй вариант основной системы:



Принимаем для расчета второй вариант.

2. Составление системы канонических уравнений метода сил. Так как система два раза статически неопределима, получаем два уравнения.

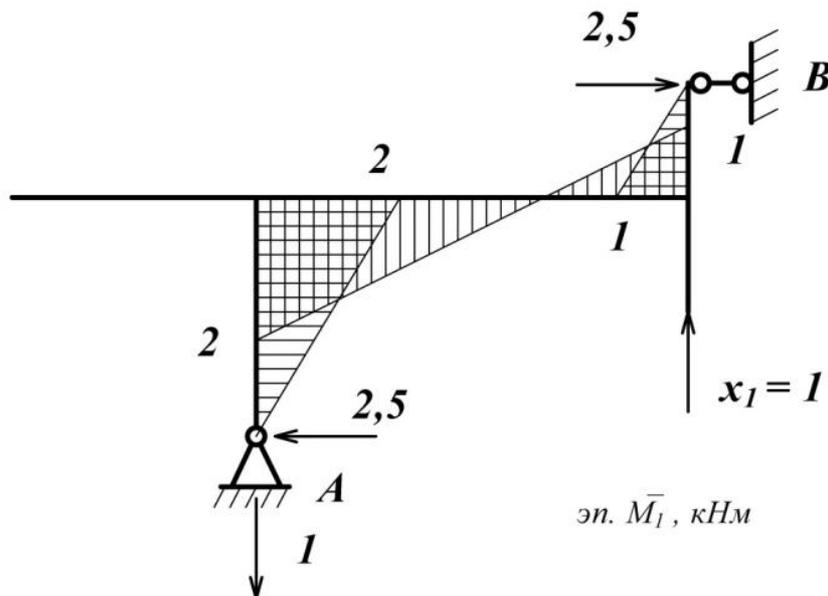
$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1p} = 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2p} = 0. \end{cases}$$

3. Построение единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов.

Строим эпюру M_1 только от действия усилия $x_1 = 1$.

Вначале определяем опорные реакции.

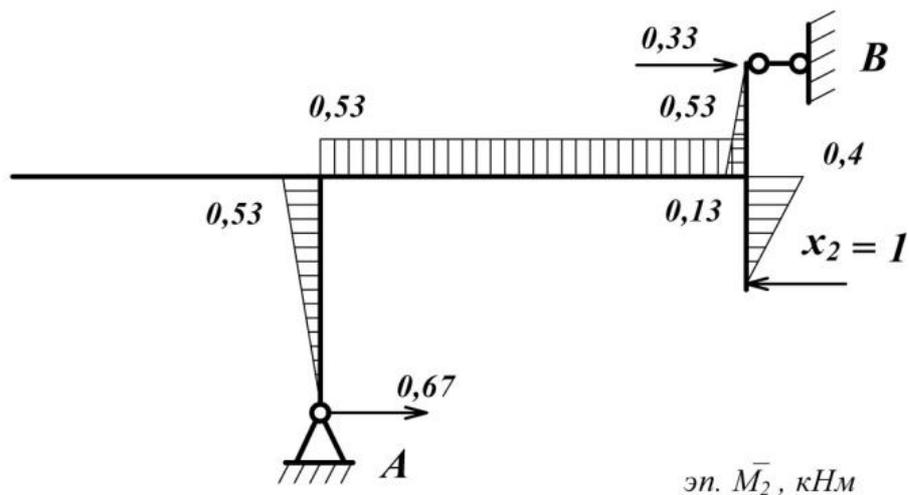
$\sum M_A = 0;$	$\sum X = 0;$	$\sum Y = 0;$	Проверка: $\sum M_B = 0;$
$1 \cdot 3 - R_B \cdot 1,2 = 0;$	$R_B + H_A = 0;$	$1 + R_A = 0;$	$-H_A \cdot 1,2 + R_A \cdot 3 = 0;$
$-1,2R_B = -3;$	$2,5 + H_A = 0;$	$R_A = -1 \text{ кН.}$	$-2,5 \cdot 1,2 + 1 \cdot 3 = 0;$
$R_B = 2,5.$	$H_A = -2,5.$		$-3 + 3 = 0.$



Строим эпюру M_2 только от действия усилия $x_2 = 1$.

Определяем опорные реакции.

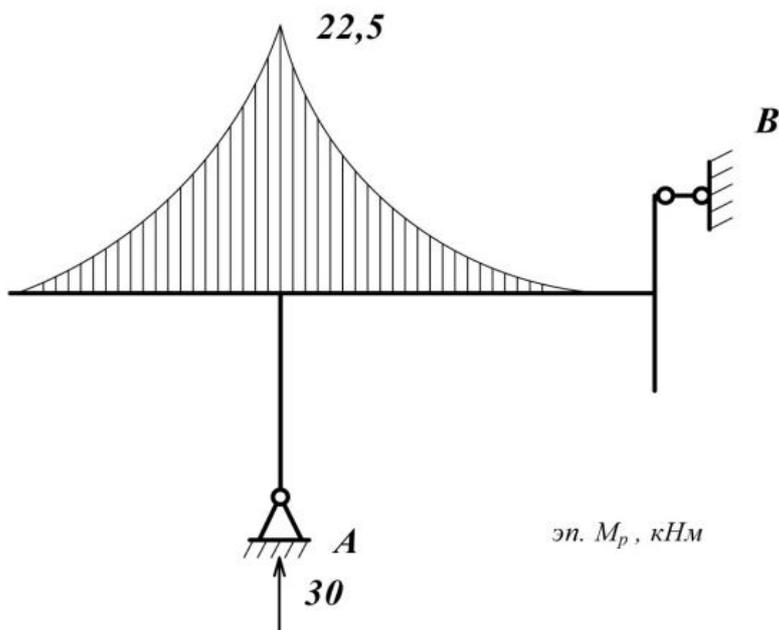
$\sum M_A = 0;$	$\sum X = 0;$	$\sum Y = 0;$	Проверка: $\sum M_B = 0;$
$1 \cdot 0,4 - R_B \cdot 1,2 = 0;$	$-1 + R_B + H_A = 0;$	$R_A = 0.$	$H_A \cdot 1,2 - 1 \cdot 0,8 = 0;$
$0,4 - 1,2R_B = 0;$	$-1 + 0,33 + H_A = 0;$		$0,67 \cdot 1,2 - 0,8 = 0;$
$R_B = 0,33.$	$H_A = 0,67.$		$0,004 \approx 0.$



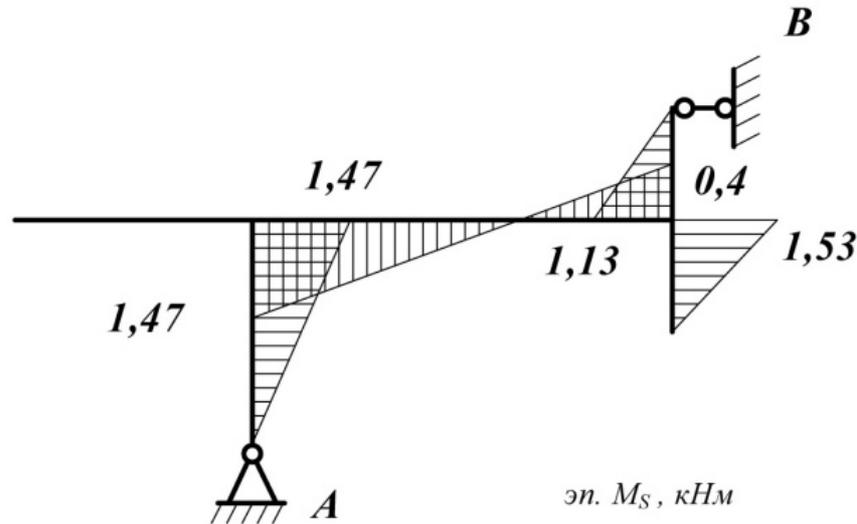
Строим эпюру моментов от действия только внешней нагрузки в основной системе.

Определяем опорные реакции.

$\sum M_A = 0;$	$\sum Y = 0;$	Проверка: $\sum M_B = 0;$
$R_B = 0;$	$-Q + R_A = 0;$	$Q \cdot 3 - R_A \cdot 3 = 0;$
$\sum X = 0;$	$-30 + R_A = 0;$	$30 \cdot 3 - 30 \cdot 3 = 0;$
$H_A = 0.$	$R_A = 30 \text{ кН.}$	$90 - 90 = 0.$



Строим суммарную эпюру изгибающих моментов: $M_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2.$



4. Определяем коэффициенты и свободные члены канонических уравнений перемножением эпюр.

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,8 \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{3}{6} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2(-1) \cdot (-1)) + \right. \\ \left. + 2(-1) + 2(-1)) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,4 \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{4,2}{EI}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,8 \frac{2}{3} \cdot 0,53 + \frac{1}{2} \cdot 0,13 \cdot 0,4 \frac{2}{3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 - 2) \cdot 3 \cdot 0,53 \right) = \frac{-1,06}{EI}.$$

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,53 \cdot 0,8 \frac{2}{3} \cdot 0,53 + 0,53 \cdot 3 \cdot 0,53 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 0,4 \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 0,13 \cdot 0,4 \frac{2}{3} \cdot 0,13 \right) = \frac{0,94}{EI}.$$

$$\Delta_{1p} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_p}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{3}{6} (-2 \cdot 2 \cdot 22,5 + 22,5) + \frac{5 \cdot 3^3}{12} \cdot 0,5 \right) = -\frac{28,12}{EI}.$$

$$\Delta_{2p} = \sum_{i=1}^n \int_0^l \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_p}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 22,5 \cdot 3 \cdot 0,53 - \frac{5 \cdot 3^3}{12} \cdot 0,53 \right) = \frac{11,93}{EI}.$$

5. Проверка единичных и грузовых перемещений.

$$\sum \delta = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_s \cdot \overline{M}_s}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} 1,47 \cdot 0,8 \frac{2}{3} 1,47 + \frac{1}{2} 0,4 \cdot 0,4 \frac{2}{3} 0,4 + \frac{1}{2} 1,13 \cdot 0,4 \frac{2}{3} 1,13 + \frac{3}{6} (2 \cdot 1,47^2 + 2 \cdot 1,53^2 - 2 \cdot 1,47 \cdot 1,53) \right) = \frac{3,02}{EI}.$$

$$\sum \delta = \delta_{11} + \delta_{21} + \delta_{12} + \delta_{22} = \frac{4,2 - 1,06 - 1,06 + 0,94}{EI} = \frac{3,02}{EI}.$$

$$\sum \Delta = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_s \cdot \overline{M}_p}{EI} dx = \frac{3}{6} (-2 \cdot 1,47 \cdot 22,5 + 1,53 \cdot 22,5) - \frac{5 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} (1,53 - 1,47) = -\frac{16,19}{EI}.$$

$$\sum \Delta = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{28,12}{EI} + \frac{11,93}{EI} = -\frac{16,19}{EI}.$$

6. Составляем и решаем систему канонических уравнений.

$$\begin{cases} 4,2x_1 + 1,06x_2 - 28,12 = 0; \\ -1,06x_1 + 0,94x_2 + 11,93 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4,2x_1 + 1,06x_2 = 28,12; \\ -1,06x_1 + 0,94x_2 = -11,93. \end{cases}$$

$$4,2x_1 = 28,12 + 1,06x_2;$$

$$x_1 = \frac{28,12 + 1,06x_2}{4,2};$$

$$-1,06 \left(\frac{28,12 + 1,06x_2}{4,2} \right) + 0,94x_2 = -11,93;$$

$$-1,06(28,12 + 1,06x_2) + 3,948x_2 = -50,106;$$

$$-29,807 - 1,123x_2 + 3,948x_2 = -50,106;$$

$$2,825x_2 = -20,299;$$

$$x_2 = -7,19 \text{ кН};$$

$$x_1 = \frac{28,12 + 1,06(-7,19)}{4,2} = 4,88 \text{ кН}.$$

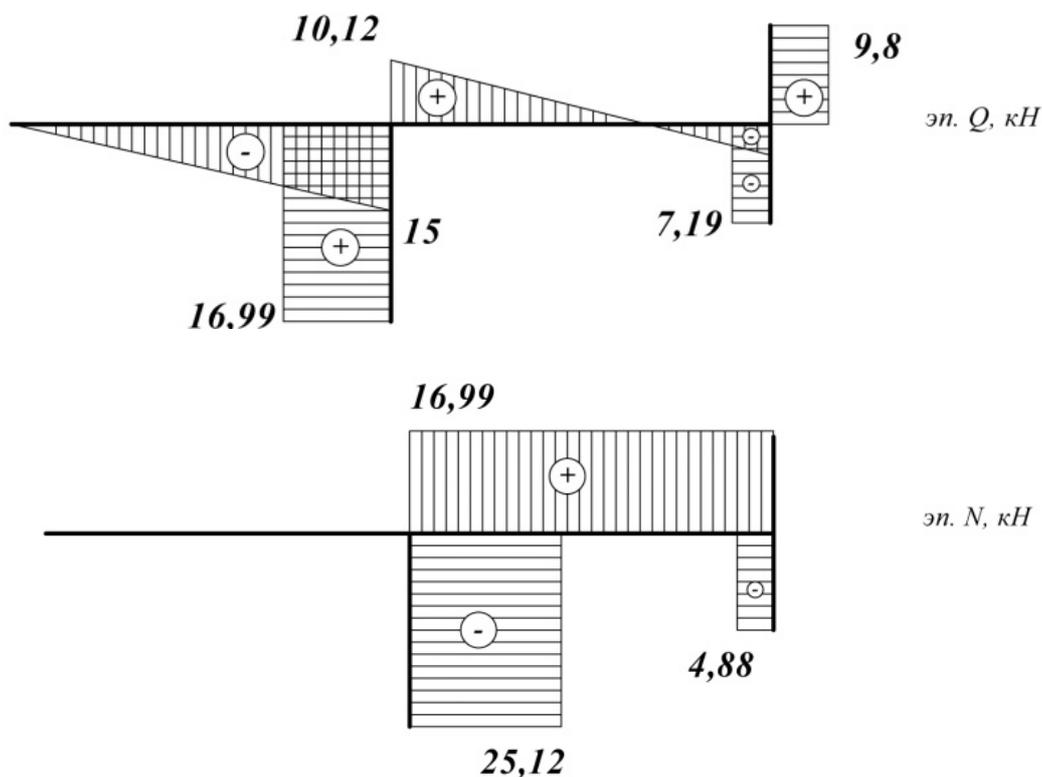
Для проверки необходимо подставить найденные x_1 и x_2 в исходную систему.

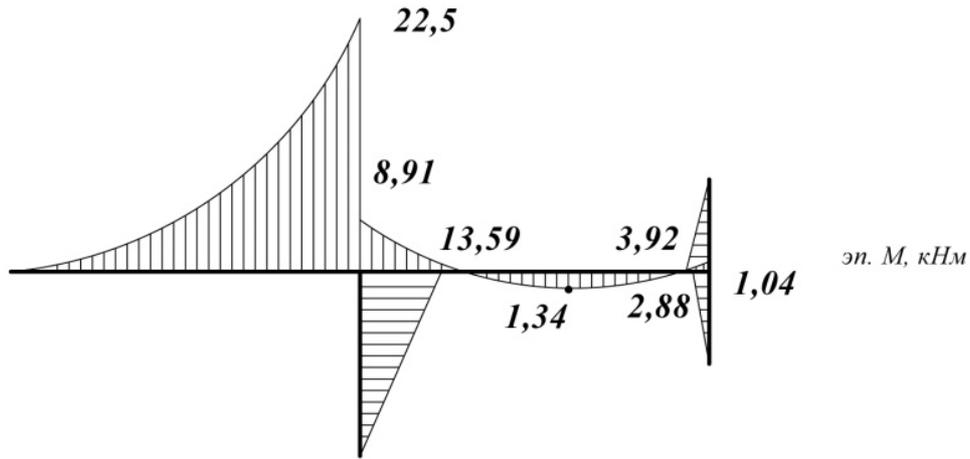
7. Определяем реакции в опорах исходной рамы с учетом найденных значений x_1, x_2 .

$$\begin{array}{lll} \sum M_A = 0; & \sum X = 0; & \sum Y = 0; \\ 4,88 \cdot 3 - 7,19 \cdot 0,4 - & 7,19 + R_B - H_A = 0; & R_A - q \cdot 6 + 4,88 = 0; \\ -R_B \cdot 1,2 = 0; & 7,19 + 9,8 - H_A = 0; & R_A - 30 + 4,88 = 0; \\ R_B = 9,8 \text{ кН.} & H_A = 16,99 \text{ кН.} & R_A = 25,12 \text{ кН.} \end{array}$$

Проверка: $\sum M_C = 0;$
 $-H_A \cdot 0,4 - R_A \cdot 3 + Q \cdot 3 - R_B \cdot 0,8 = 0;$
 $-16,99 \cdot 0,4 - 25,12 \cdot 3 + 30 \cdot 3 - 9,8 \cdot 0,8 = 0;$
 $90 - 90 = 0;$
 $0 = 0.$

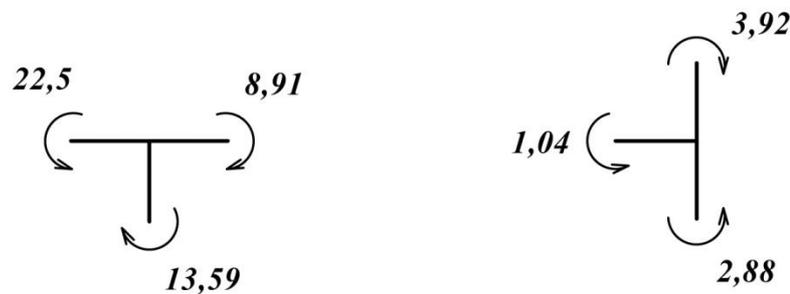
8. Определив усилия x_1, x_2 , показываем направление реакций с учетом знаков и строим эпюры Q, M и N известными методами.





9. Проверка в правильности построения эпюры М.

1) Статическая. Сумма моментов в узлах равняется нулю.



2) Кинематическая. $\sum_0^l \int \frac{\overline{M}_S \cdot M}{EI} dx = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_0^l \int \frac{\overline{M}_S \cdot M}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} 13,59 \cdot 0,8 \frac{2}{3} 1,47 + \frac{1}{2} 3,92 \cdot 0,4 \frac{2}{3} 1,13 - \right. \\ &- \frac{1}{2} 2,88 \cdot 0,4 \frac{2}{3} 0,4 + \frac{3}{6} (2 \cdot 8,91 (-1,47) + 2 \cdot 1,04 \cdot 1,53 + 8,91 \cdot 1,53 - \\ &- 1,47 \cdot 1,04) + \frac{5 \cdot 3^3}{12} (-0,03) \left. \right) = \frac{5,327 + 0,59 - 0,153 - 5,7915}{EI} = \frac{0,0275}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

10. Подбор двутаврового сечения рамы.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,14 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 140 \text{ см}^3.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-89) предварительно выбираем двутавр № 18 с $W_x = 143 \text{ см}^3$, $A = 23,4 \text{ см}^2$.

Проверим его на действие продольной силы N по условию прочности при сложном сопротивлении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W} + \frac{N}{A} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

$$M_u = 22,5 \text{ кНм}, N = 25,12 \text{ кН.}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{22,5 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^{-6}} + \frac{25,12 \cdot 10^3}{23,4 \cdot 10^{-4}} = 0,157 \cdot 10^9 + 1,073 \cdot 10^7 = \\ &= 0,157 \cdot 10^3 + 1,073 \cdot 10 = 157 + 10,73 = 167,73 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Принимаем двутавр № 18а с $W_x = 159 \text{ см}^3$, $A = 25,4 \text{ см}^2$.

$$\sigma_{\max} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{159 \cdot 10^{-6}} + \frac{25,12 \cdot 10^3}{25,4 \cdot 10^{-4}} = 0,141 \cdot 10^9 + 0,988 \cdot 10^7 =$$

$$= 141 + 9,88 = 150,88 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

Окончательно принимаем конструкцию рамы из двутавра № 18а.

НЕРАЗРЕЗНЫЕ БАЛКИ

Неразрезной называется такая балка, которая перекрывает два или более пролетов и проходит через свои опоры, не прерываясь нигде шарнирами или разрезами (рис. 30, 31). Характерным отличием неразрезной балки от разрезной является то, что нагрузка, стоящая в любом ее пролете, изгибает балку на протяжении всех ее пролетов, создавая плавную упругую линию.

При конструировании неразрезных балок всегда принимаются меры к тому, чтобы они не могли отделяться от своих опор. Свободная укладка балок на опоры допускается только в тех случаях, когда есть уверенность, что балка, прогибаясь, будет находиться в контакте со всеми своими опорами и не будет отделяться ни от одной. Расчетная схема неразрезной балки предполагает идеальное шарнирное прикрепление ее ко всем промежуточным опорам. На крайних опорах допускается также абсолютная или упруго-податливая заделка. Действительная конструкция прикрепления балки к ее опорам обычно отступает от этой схемы.

Неразрезная балка принадлежит к числу весьма распространенных конструкций. Она применяется в железобетонных, металлических и деревянных конструкциях в качестве их элемента или основной части. На рис. 30 изображен мост с металлическим неразрезным пролетным строением.



Рис. 30. Муромский неразрезной металлический мост

Из различных статически неопределимых систем неразрезные балки обладают простотой структуры и решаются при помощи простых уравнений.

Расчетно-графическая работа № 14

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЯ ТРЕХ МОМЕНТОВ

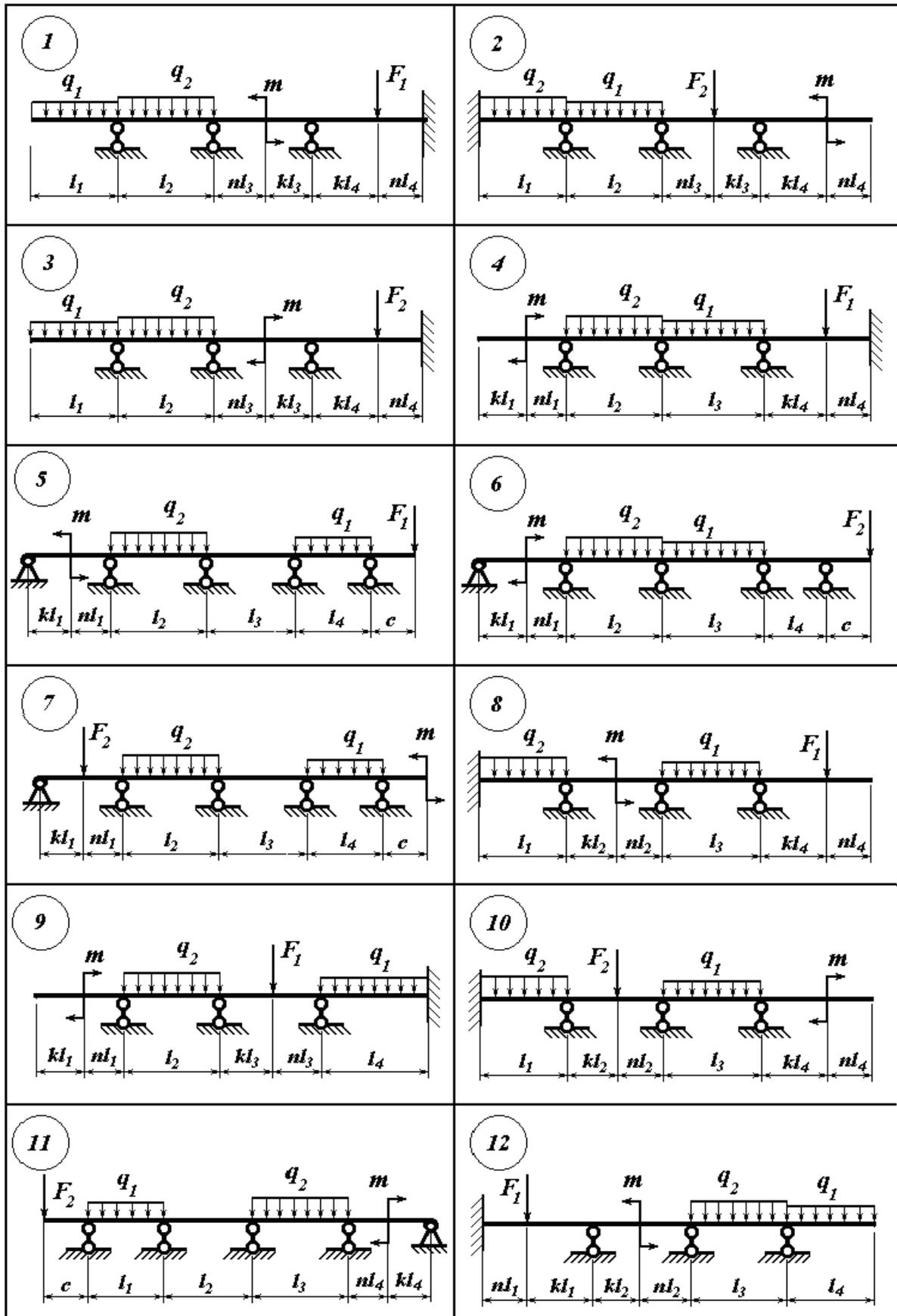
Для заданной неразрезной балки постоянной жесткости (табл. 38) при числовых значениях размеров и нагрузок по строке варианта из табл. 37 требуется:

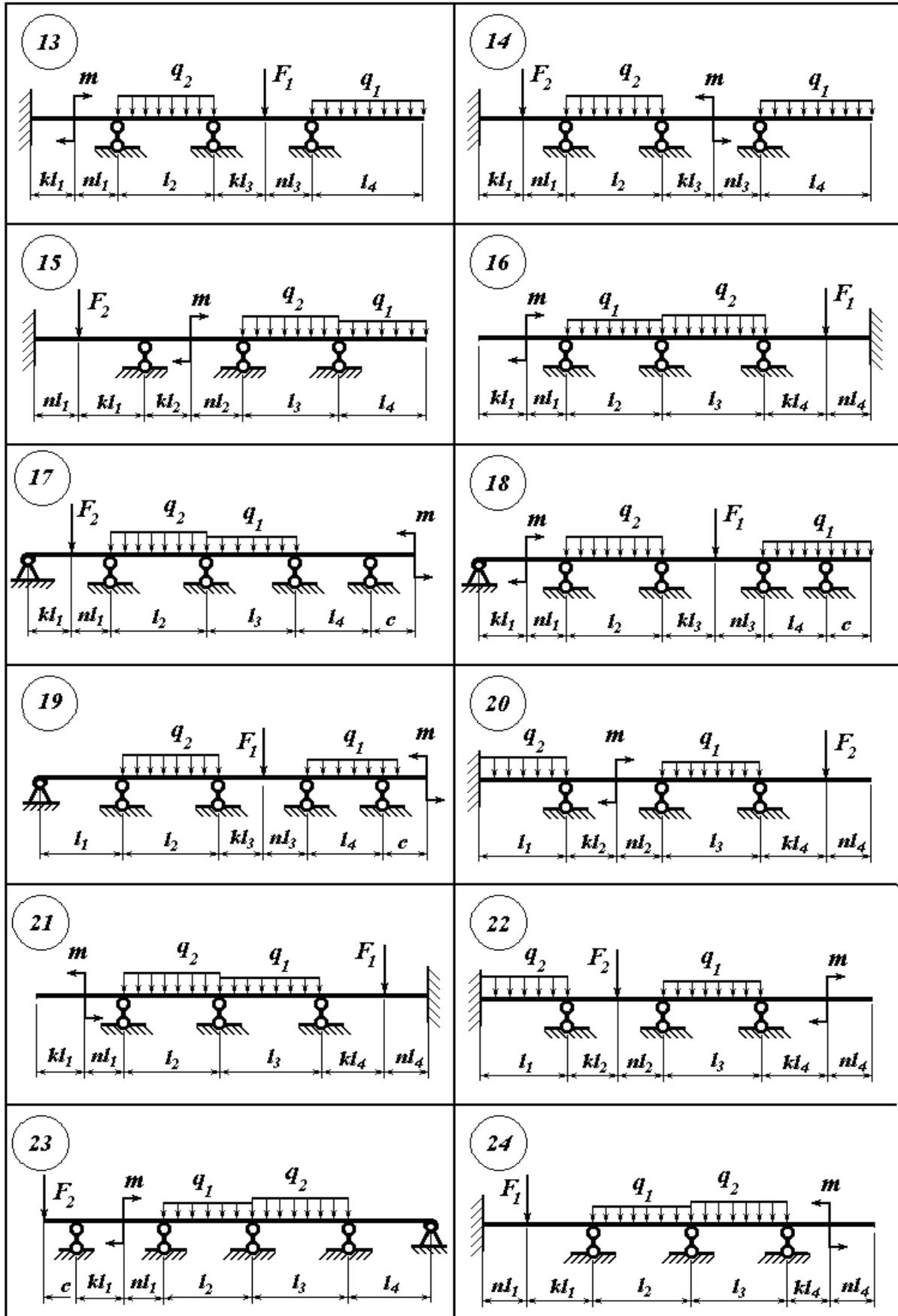
- 1) определить степень статической неопределимости заданной системы и выбрать основную систему.
- 2) построить грузовую эпюру моментов M_p от заданной нагрузки, в основной системе.
- 3) записать уравнение трех моментов и составить систему канонических уравнений трех моментов.
- 4) пользуясь табл. 39, определить «фиктивные» опорные реакции каждого i -го загруженного пролета.
- 5) решить систему канонических уравнений, т.е. найти неизвестные i -е опорные моменты.
- 6) построить эпюру опорных моментов $M_{оп}$ и окончательно эпюру M .
- 7) построить эпюру поперечных сил Q и определить опорные реакции в заданной системе.
- 8) проверить правильности построения эпюр M и Q ;
- 9) из условий прочности подобрать стальное двутавровое сечение балки, приняв $[\sigma] = 160$ МПа.

Т а б л и ц а 37

Исходные данные для расчета балок

№ вар.	Размеры							Нагрузки				
	l_1 , (м)	l_2 , (м)	l_3 , (м)	l_4 , (м)	c , (м)	k	n	m (кНм)	q_1 (кН/м)	q_2 (кН/м)	F_1 (кН)	F_2 (кН)
1	16	10	12	15	1,5	0,3	0,7	17	1,2	2,4	11	6
2	8	11	14	10	1,0	0,4	0,6	14	1,6	2,2	15	7
3	7	10	12	8	2,0	0,1	0,9	10	0,6	1,4	18	8
4	10	11	14	9	3,0	0,3	0,7	19	0,9	1,8	14	9
5	14	12	11	13	2,2	0,2	0,8	12	2,5	3,1	12	10
6	16	15	10	18	1,0	0,7	0,3	20	0,9	2,0	19	11
7	12	14	11	17	2,0	0,5	0,5	15	1,2	1,8	16	12
8	8	10	12	9	3,0	0,4	0,6	16	1,6	2,3	22	13
9	9	7	13	10	1,8	0,3	0,7	17	1,8	2,5	13	14
10	13	16	9	14	1,0	0,2	0,8	18	2,2	3,4	19	15
11	12	10	15	14	2,0	0,1	0,9	19	3,4	1,8	16	16
12	10	16	14	9	3,0	0,5	0,5	15	1,9	0,7	17	17
13	7	8	10	9	1,5	0,7	0,3	17	2,4	1,2	10	18
14	10	8	9	12	3,0	0,6	0,4	16	2,6	1,8	11	19
15	9	11	10	12	2,0	0,8	0,2	18	2,3	0,8	12	20
16	15	12	8	11	1,0	0,9	0,1	14	1,9	0,6	13	21
17	14	9	9	11	3,1	0,7	0,3	13	0,8	2,2	14	22
18	11	15	10	14	1,0	0,3	0,7	17	1,2	2,8	15	5
19	13	8	9	15	2,0	0,6	0,4	14	1,3	3,1	16	6
20	7	9	12	8	3,0	0,5	0,5	13	0,7	1,9	17	7
21	8	10	8	11	2,1	0,1	0,9	19	0,9	1,6	18	8
22	14	8	12	17	3,0	0,5	0,5	15	2,7	3,5	19	9
23	10	11	10	13	2,0	0,4	0,6	16	3,4	2,1	20	10
24	10	13	8	11	1,0	0,2	0,8	18	3,1	2,5	21	11





ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РГР № 14

Заданная неразрезная балка постоянной жесткости (рис. 31) составлена из однопролётных шарнирно-опёртых балок. Опоры и соответствующие им моменты нумеруют слева направо, присваивая первой опоре «0» и далее «1», «2», «3». Пролётам присваивается номер правой опоры.

1. Определим степень статической неопределимости.

$$n = R - 3;$$

$$n = 6 - 3 = 3.$$

Вывод: заданная балка три раза статически неопределима.

2. Выбираем основную систему.

Выбираем основную систему путём введения над опорами промежуточных шарниров, превращая тем самым неразрезную балку в совокупность однопролётных шарнирно-опёртых балок и в качестве неизвестных примем опорные изгибающие моменты.

При выборе основной системы следует:

а) заделки на крайних опорах балки в основной системе условно заменять дополнительными пролётами бесконечно малой длины;

б) консольные части балки в основной системе условно отбрасывать и их действие заменять известными моментами и поперечными силами.

3. Построим грузовую эпюру M_p .

Эпюра M_p учитывает только внешнюю нагрузку на балку. Вычисления производим для каждой балки отдельно в основной системе:

$$M_1 = \frac{q_1 \cdot l_1^2}{8} = \frac{1,2 \cdot 14^2}{8} = 29,4 \text{ кНм};$$

$$M_2 = \frac{q_2 \cdot l_2^2}{8} = \frac{2,4 \cdot 9^2}{8} = 24,3 \text{ кНм};$$

$$M_3 = \frac{F_2 \cdot l_{3\text{лев}} \cdot l_{3\text{прав}}}{l_3} = \frac{18 \cdot 2,7 \cdot 6,3}{9} = 34 \text{ кНм}.$$

4. Запишем уравнение трёх моментов и систему канонических уравнений трёх моментов.

$$M_{n-1} \cdot l_n + 2 \cdot M_n (l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6 \cdot B_n^\phi - 6 \cdot A_{n+1}^\phi - \text{уравнение}$$

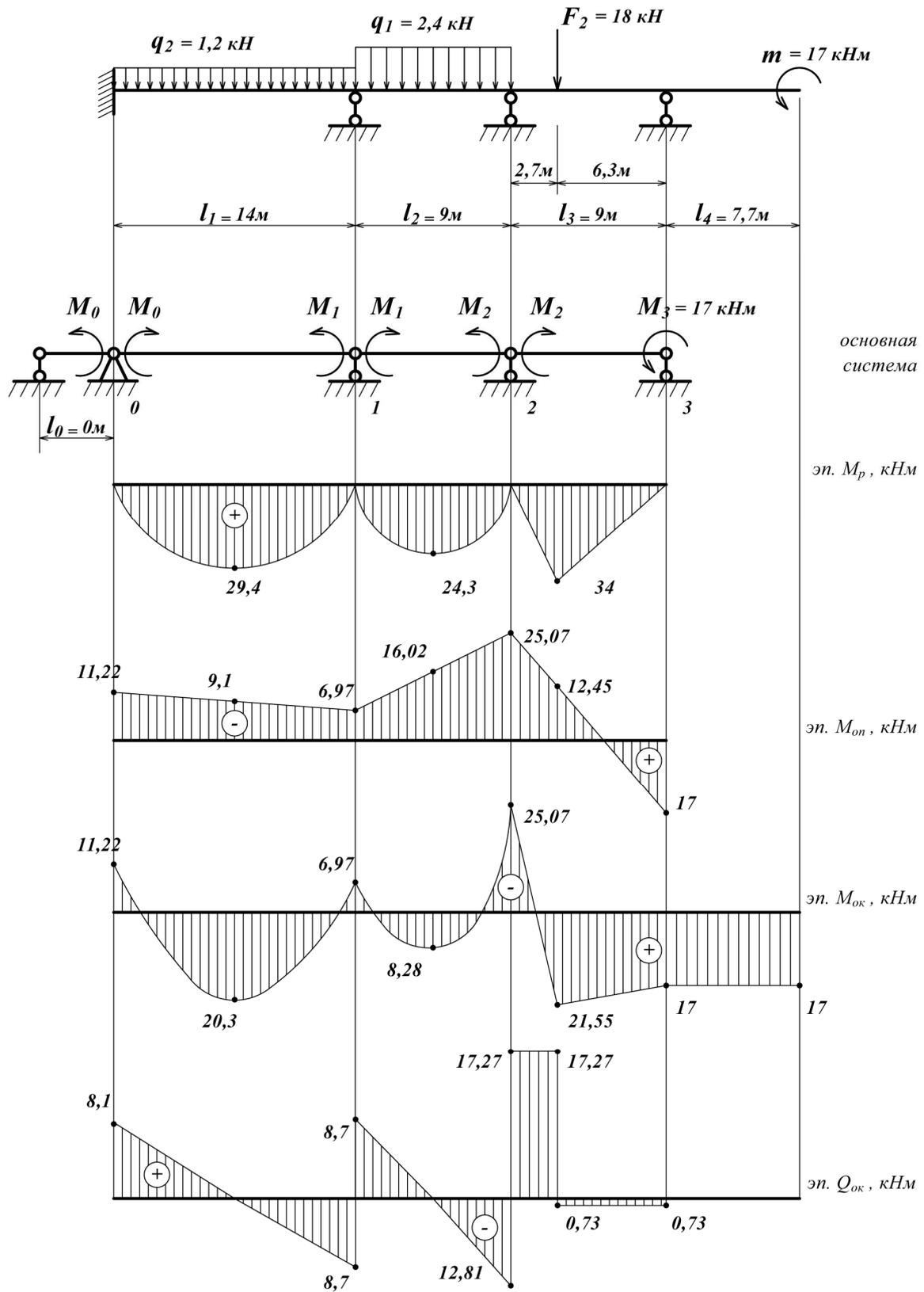


Рис. 31. К расчету неразрезной балки

трех моментов, где n – соответствующая опора или момент; A , B – «фиктивные» опорные реакции.

Составим систему канонических уравнений трёх моментов:

$$\begin{cases} M_{-1}l_0 + 2M_0(l_0 + l_1) + M_1l_1 = -6(B_0^\phi + A_1^\phi); \\ M_0l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = -6(B_1^\phi + A_2^\phi); \\ M_1l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3l_3 = -6(B_2^\phi + A_3^\phi). \end{cases}$$

Определим «фиктивные» опорные реакции:

$$6A_1^\phi = \frac{q_1l_1^3}{4} = \frac{1,2 \cdot 14^3}{4} = 823,2 \text{ кНм}^2;$$

$$6B_1^\phi = \frac{q_1l_1^3}{4} = \frac{1,2 \cdot 14^3}{4} = 823,2 \text{ кНм}^2;$$

$$6A_2^\phi = \frac{q_2l_2^3}{4} = \frac{2,4 \cdot 9^3}{4} = 437,4 \text{ кНм}^2;$$

$$6B_2^\phi = \frac{q_2l_2^3}{4} = \frac{2,4 \cdot 9^3}{4} = 437,4 \text{ кНм}^2;$$

$$6A_3^\phi = F_2l_3^2uv(1+v) = 18 \cdot 81 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,7 = 520,51 \text{ кНм}^2.$$

5. Решим систему канонических уравнений.

$$\begin{cases} 2M_0 \cdot 14 + 14M_1 = -823,2 \frac{1}{2}; \\ 14M_0 + 2M_1 \cdot 23 + 9M_2 = -823,2 \frac{1}{2} - 437,4 \frac{1}{1,5}; \\ 9M_1 + 2M_2 \cdot 18 + 17 \cdot 9 = -437,4 \frac{1}{1,5} - 520,51 \cdot 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_0 = \frac{-411,6 - 14M_1}{28}; \\ M_2 = -437,4 \frac{1}{1,5} - 520,51 - 17 \cdot 9 - 9M_1; \\ 14 \left(\frac{-411,6 - 14M_1}{28} \right) + 46M_1 + 9 \left(\frac{-965,11 - 9M_1}{36} \right) = -703,2. \end{cases}$$

$$-823,2 - 28M_1 + 184M_1 - 965,11 - 9M_1 = -2812,8;$$

$$147M_1 = 1024,49;$$

$$M_1 = -6,97 \text{ кНм};$$

$$M_2 = \frac{-965,11 - 9(-6,97)}{36} = -25,07 \text{ кНм};$$

$$M_0 = \frac{-411,6 - 14(-6,97)}{28} = -11,22 \text{ кНм}.$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2(-11,22)14 + 14(-6,97) = -823,2 \frac{1}{2}; \\ 14(-11,22) + 2(-6,97)23 + 9(-25,07) = -823,2 \frac{1}{2} - 437,4 \frac{1}{1,5}; \\ 9(-6,97) + 2(-25,07)18 + 17 \cdot 9 = -437,4 \frac{1}{1,5} - 520,51 \cdot 1. \\ \begin{cases} -411,74 \approx -411,6; \\ -703,33 \approx -703,2; \\ -812,25 \approx -812,11. \end{cases} \end{cases}$$

Учитывая найденные значения моментов, можно строить опорную эпюру моментов $M_{оп}$ в основной системе. Найдём промежуточные моменты:

$$\frac{11,22 - 6,97}{x} = \frac{14}{7}; \quad \frac{25,07 - 6,97}{x} = \frac{9}{4,5}; \quad \frac{25,07 + 17}{x} = \frac{9}{6,3};$$

$$x = 2,125;$$

$$x = 9,05;$$

$$x = 29,45;$$

$$x + 6,97 = 9,1 \text{ кНм}.$$

$$x + 6,97 = 16,02 \text{ кНм}.$$

$$x - 17 = 12,45 \text{ кНм}.$$

Строим окончательную эпюру моментов $M_{ок}$ по формуле

$$M_{ок} = M_p + M_{оп}.$$

$$29,4 - 9,1 = 20,3 \text{ кНм};$$

$$24,3 - 16,02 = 8,28 \text{ кНм};$$

$$34 - 12,45 = 21,55 \text{ кНм}.$$

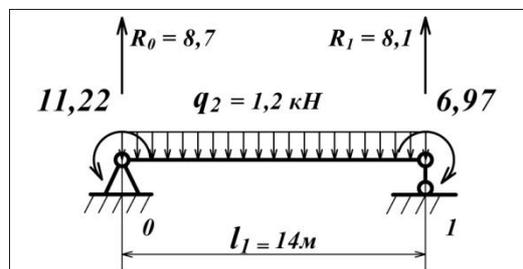
6. Построим окончательную эпюру поперечных сил $Q_{ок}$.

Строим эпюру $Q_{ок}$, вырезая соответствующие балки и рассматривая их равновесие с учетом действующих моментов на опорах.

Q_1 :

$$\sum M_0 = 0, \rightarrow R_1 = \frac{6,97 + 1,2 \cdot 14 \cdot 7 - 11,22}{14} = 8,1 \text{ кН};$$

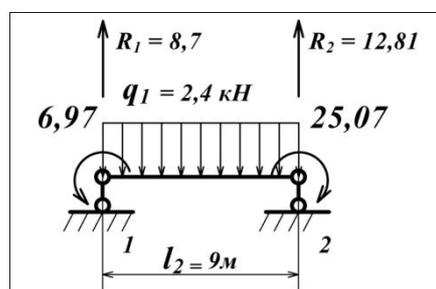
$$\sum M_1 = 0, \rightarrow R_0 = \frac{11,22 - 6,97 + 1,2 \cdot 14 \cdot 7}{14} = 8,7 \text{ кН}.$$



Q_2 :

$$\sum M_1 = 0, \rightarrow R_2 = \frac{25,07 - 6,97 + 2,4 \cdot 9 \cdot 4,5}{9} = 12,81 \text{ кН};$$

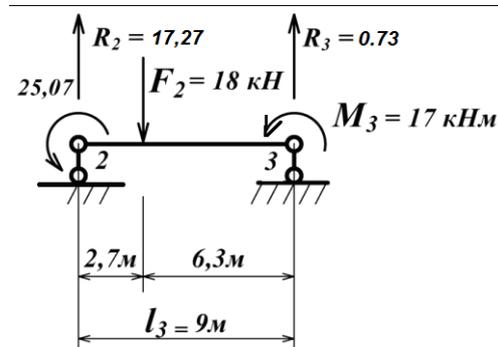
$$\sum M_2 = 0, \rightarrow R_1 = \frac{25,07 - 6,97 - 2,4 \cdot 9 \cdot 4,5}{9} = 8,7 \text{ кН}.$$



Q_3 :

$$\sum M_2 = 0; \rightarrow R_3 = \frac{-25,07 - 17 + 18 \cdot 2,7}{9} = 0,73 \text{ кН};$$

$$\sum M_3 = 0; \rightarrow R_2 = \frac{-25,07 - 17 - 18 \cdot 6,3}{9} = 17,27 \text{ кН}.$$



7. Проверка правильности построения эпюр.

Для проверки определим по окончательной эпюре Q реакции в опорах балки и составим уравнение равновесия в проекции на ось y .

$$\sum y = 0; \quad 8,1 + 17,4 + 30,08 + 0,73 - 1,2 \cdot 1,4 - 2,4 \cdot 9 - 18 = 0,07 \approx 0$$

Следовательно, эпюры построены верно.

8. Подбираем стальное двутавровое сечение балки.

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа};$$

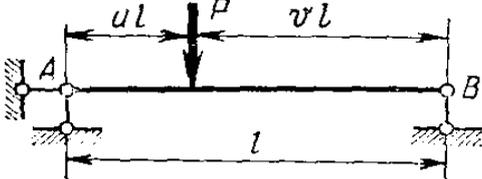
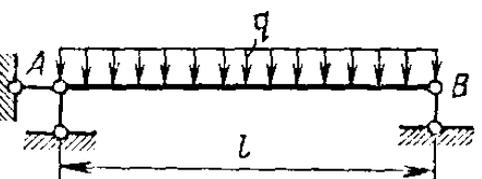
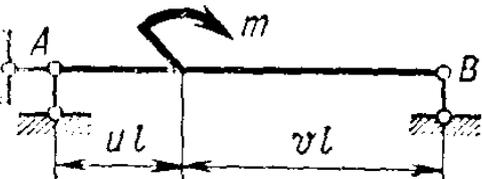
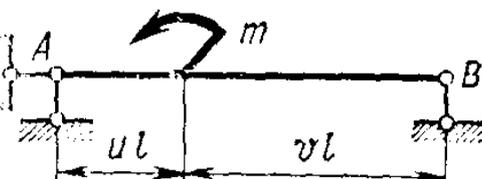
$$M_{\max} = 25,07 \text{ кНм};$$

$$W \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{25,07 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,157 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 157 \text{ см}^3.$$

По сортаменту двутавров ГОСТ 8239-89 (табл. 18) принимаем двутавр № 18а с $W_x = 159 \text{ см}^3$.

Т а б л и ц а 39

«Фиктивные» опорные реакции, умноженные на 6, от различных основных видов нагружения пролетов

Схема нагрузки	$6A^\Phi$	$6B^\Phi$
	$Pl^2uv(1+v)$ При $u = v = 0,5$ $\frac{3}{8}Pl^2$	$Pl^2uv(1+u)$ При $u = v = 0,5$ $\frac{3}{8}Pl^2$
	$\frac{ql^3}{4}$	$\frac{ql^3}{4}$
	$-ml(1-3v^2)$ При $u = v = 0,5$ $-\frac{ml}{4}$	$ml(1-3u^2)$ При $u = v = 0,5$ $\frac{ml}{4}$
	$ml(1-3v^2)$ При $u = v = 0,5$ $\frac{ml}{4}$	$-ml(1-3u^2)$ При $u = v = 0,5$ $-\frac{ml}{4}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Строительная механика как одна из важнейших физико-механических дисциплин играет существенную роль в подготовке инженеров и архитекторов любых специальностей, поэтому для ее успешного освоения студентам необходимо в достаточной степени овладеть практическими навыками решения задач, что и было предложено в данном пособии.

Учебно-методическое пособие было разработано в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования III поколения для специальности Архитектура.

Современные базовые учебники по теоретической механике, сопротивлению материалов, строительной механике изложены во внушительных объемах и в основном ориентированы на подробном изложении теории для инженеров. Это обстоятельство усложняет процесс самостоятельного изучения предмета в не инженерном вузе архитекторами и послужило причиной подготовки авторами настоящего издания.

В пособии были в доступной, но достаточно строгой форме изложены основные разделы классического курса сопротивления материалов, теоретической и строительной механики, которые сопровождаются подробными примерами расчетов, что несомненно должно облегчить процесс самостоятельного освоения предмета студентами.

Все замечания и пожелания по структуре пособия и методике изложения материала будут приняты авторами с благодарностью.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М., 2001.

Яблонский А.А. Курс теоретической механики: в 2 т. М., 1995. Т. 1.

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учеб. пособие для вузов / под ред. А.А. Яблонского. 4-е изд. М., 1995.

Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М., 2000.

Беляев Н.М. Сопротивление материалов. М., 1996.

Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев, 1995.

Бледнова Ж.М., Роцин К.В. Методическое пособие по изучению дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов всех форм обучения специальностей высшего профессионального образования. Краснодар, 2009.

Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем): учеб. пособие для студентов вузов/ Г.К. Клейн, Н.Н. Леонтьев, М.Г. Ванюшенков [и др.]; под ред. Г.К. Клейна. М., 1980.

Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов: учебник/ А.Е. Саргсян [и др.]; под ред. А.Е. Саргсяна. 2-е изд., испр. и доп. М., 2000.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Общие требования к оформлению расчетно-графических работ	5
1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. СТАТИКА	9
Связи и их реакции	11
Равновесие плоской системы сил	16
РГР № 1. Определение реакций опор в балках	17
Примеры выполнения РГР № 1	28
РГР № 2. Определение реакций опор в рамах	31
Примеры выполнения РГР № 2	42
РГР № 3. Определение реакций опор составной конструкции	44
Примеры выполнения РГР № 3	55
РГР № 4. Определение реакций опор системы сходящихся сил	61
Пример выполнения РГР № 4	65
Распорные системы. Трехшарнирные арки	68
РГР № 5. Расчет статически определимых арок	69
Пример выполнения РГР № 5	76
2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ	79
Геометрические характеристики поперечных сечений стержня	80
РГР № 6. Определение геометрических характеристик поперечных сечений	81
Примеры выполнения РГР № 6	87
Геометрические характеристики плоских фигур	97
Сортамент прокатной стали	99
Изгиб прямых брусьев	104
РГР № 7. Расчет на прочность при изгибе	105
Контроль правильности построения эпюр Q и M	124
Примеры выполнения РГР № 7	125
РГР № 8. Расчет на прочность при растяжении-сжатии	140
Примеры выполнения РГР № 8	145
Устойчивость сжатых стержней. Определение критической силы. Критическое напряжение	154

РГР № 9. Расчет на устойчивость продольно сжатых стержней	157
Пример выполнения РГР № 9	159
Кручение	165
РГР № 10. Расчет на прочность и жесткость вала при кручении	166
Пример выполнения РГР № 10	169
3. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА	174
Плоские фермы	175
РГР № 11. Расчет плоской фермы	177
Пример выполнения РГР № 11	182
Статически неопределимые системы	188
РГР № 12. Расчет статически неопределимых балок на прочность и жесткость при плоском изгибе	189
Пример выполнения РГР № 12	193
Метод сил	200
РГР № 13. Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил	203
Пример выполнения РГР № 13	210
Неразрезные балки	218
РГР № 14. Расчет неразрезной балки при помощи уравнения трех моментов	219
Пример выполнения РГР № 14	223
Заключение	229
Рекомендуемая литература	230

Учебное издание

Р О Щ И Н Константин Владимирович

К У З Ъ М Е Н К О Александр Николаевич

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие по выполнению
расчетно-графических работ

Подписано в печать 14.12.2013. Формат 60×84 1/16.

Уч.-изд. л. 15,6. Тираж 100 экз.

Заказ №

Кубанский государственный университет

350040 г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

Издательско-полиграфический центр

Кубанского государственного университета

350040 г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.