МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

Факультет компьютерных технологий и прикладной математики
Кафедра анализа данных и искусственного интеллекта

КУРСОВАЯ РАБОТА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ФИНАНСОВЫХ ПИРАМИД С ПОМОЩЬЮ ИТО-ПРОЦЕССОВ

Выполнил ______________________ Э.Е. Плигина
(подпись)

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль) Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности

Научный руководитель
доц. ______________________ Г.А. Кесиян
(подпись)

Нормоконтролер
канд. физ.-мат. наук, доц. ______________________ Г.В. Калайдина
(подпись)

Краснодар
2021

РЕФЕРАТ

Курсовая работа 30 страниц, 12 рисунков, 5 источников.

ФИНАНСОВАЯ ПИРАМИДА, НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ, ИТО-ПРОЦЕССЫ, СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛОГ, МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ПИРАМИД, РЕКЛАМНАЯ КАМПАНИЯ

Цель курсовой работы – реализация алгоритмов, моделирующих деятельность финансовых пирамид с помощью Ито-процессов.

В курсовой работе изучена задача вывода стохастических уравнений, рассмотрены некоторые модели деятельности финансовых пирамид.

В оригинальной части реализованы алгоритмы, позволяющие моделировать деятельность финансовых пирамид с помощью Ито-процессов. Программные скрипты реализованы на языке Python в среде Jupyter Notebook с использованием таких библиотек как numpy, matplotlib.pyplot, matplotlib.gridspec, statistics, scipy.integrate, warnings, grant_sde.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Первая в мире финансовая пирамида появилась в 1919 году в США, её создателем стал итальянский иммигрант Чарльз Понци. С этого времени и по сей день возникает множество финансовых пирамид. Причины их активного появления различны: низкие темпы инфляции, рост благосостояния основной массы населения, рыночные механизмы экономики, недостаточная финансовая грамотность населения и другие.

Крах финансовой пирамиды неизбежен. Он оказывает негативное влияние как на вкладчиков, так и на экономическую, социальную сферу страны. Таким образом, моделирование деятельности финансовых пирамид поможет исследовать их поведение с помощью построения и изучения их моделей. Благодаря моделированию мы сможем понять, как определенные факторы финансовой пирамиды влияют на её развитие и падение, и вследствие этому мы сможем предсказать её будущие состояния.

1 Непрерывные модели

Для моделирования финансовых пирамид существуют разные непрерывные модели, основанные на изменении количества клиентов. При рассмотрении данных моделей можно выявить основные закономерности деятельности финансовых пирамид.

В работе [5] рассматриваются такие непрерывные модели.

Общая формула в непрерывном случае в текущий момент времени t имеет вид:

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^t \alpha(\tau)d\tau - \beta m \int_0^t N(\tau)d\tau\,, t > 0 \qquad (1)$$

где S(t) – прибыль финансовой кампании в текущий момент времени t,

$\alpha(t)$ – расходы на рекламу в текущий момент времени t,

N(t) – количество клиентов в текущий момент времени t,

$\beta m \int_0^1 N(\tau)d\tau$ – выплата дивидендов клиентам,

$mN(t)$ – денежные поступления от клиентов.

Рекламная кампания является одним из важных факторов для повышения числа вкладчиков финансовой пирамиды.

Необходимо рассматривать два варианта финансирования рекламной кампании:

Первый вариант: расходы на рекламу $\alpha(t)$ каждый месяц одинаковы, следовательно, расходы на рекламу составят $R(t) = R_0 t$.

$$\alpha(t) = const = R_0\ \forall t > 0$$

Тогда формула вычисления прибыли финансовой кампании в текущий момент времени t имеет вид:

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - R_0 t - \beta m \int_0^t N(\tau)d\tau$$

Второй вариант: расходы на рекламу состоят из некоторого процента g от дохода финансовой кампании, 0 < g < 1. В процентной ставке g могут быть учтены расходы на выплату налогов, собственное потребление и другие расходы.

Пусть вновь поступающие средства на сумму финансовой пирамиды имеют вид: $m(N(t) - N(t-1))$.

Тогда расходы на рекламу составят $R(t) = R_0 + gmN(t)$, где $R_0 = -gmN_0$.

В данной варианте расходы на рекламу $\alpha(t)$ имеют вид:

$$\alpha(t) = gm\frac{dN}{dt} \ \forall t > 0$$

Тогда формула вычисления прибыли финансовой кампании в текущий момент времени t имеет вид:

$$S(t) = S_0 - (1-g)mN_0 + (1-g)mN(t) - \beta m \int_0^t N(\tau)d\tau$$

Для определения изменения количества клиентов рассматриваются следующие непрерывные модели:

1) Модель с постоянным количеством клиентов

Обозначим t* как момент времени, когда число клиентов финансовой пирамиды стабилизировалось (стало постоянным), то есть N(t)=const.

Тогда формула (1) при t > t* имеет вид:

$$S(t) = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_0^{t^*} \alpha(\tau)d\tau - \int_{t^*}^{t} \alpha(\tau)d\tau - \beta m \int_0^{t^*} N(\tau)d\tau - \beta m \int_{t^*}^{t} N(\tau)d\tau, \qquad t > 0$$

В данной модели S(t) линейно уменьшается с момента t* и в момент времени банкротства становится равной нулю, то есть финансовая пирамида разоряется.

Время банкротства t_b обратно пропорционально процентной ставке β:

$$t_b = t^* + \frac{1}{\beta}k, \qquad \text{где } k = \frac{S^*}{mN^*}$$

2) Модель с постоянным приростом клиентов

При $q = \frac{dN}{dt}$ число клиентов $N(t) = N_0 + qt$.

Рассмотрим два варианта финансирования рекламной кампании:

1) Постоянные расходы на рекламу, то есть $\alpha(t) = const = R_0\ \forall t > 0$. Тогда формула для вычисления суммы финансовой пирамиды в случае с постоянным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу в момент времени t имеет вид:

$$S(t) = -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0$$

2) Процентные расходы на рекламу, то есть $\alpha(t) = gm\frac{dN}{dt}\ \forall t > 0$, 0<g<1. Тогда формула для вычисления суммы финансовой пирамиды в случае с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу в момент времени t имеет вид:

$$S(t) = -\frac{1}{2}\beta mqt^2 + m\big((1-g)q - \beta N_0\big)t + S_0$$

Время банкротства t_b вычисляется по формуле:

$$t_b = \frac{1-g}{\beta} - \frac{N_0}{q} - \left(\left(\frac{(1-g)}{\beta} - \frac{N_0}{q}\right)^2 + \frac{2S_0}{m\beta q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3) Модель с линейным приростом клиентов

При $q_0 + qt = \frac{dN}{dt}$ число клиентов $N(t) = N_0 + q_0 t + \frac{1}{2}qt^2$.

Рассмотрим два варианта финансирования рекламной кампании:

1) Постоянные расходы на рекламу, то есть $\alpha(t) = const = R_0\ \forall t > 0$. Тогда формула для вычисления суммы финансовой пирамиды в случае с линейным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу в момент времени t имеет вид:

$$S(t) = -\frac{1}{6}\beta mqt^3 + \frac{1}{2}m(q - \beta q_0)t^2 + m\left(q - \beta N_0 - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0$$

2) Процентные расходы на рекламу, то есть $\alpha(t) = gm\frac{dN}{dt}\ \forall t > 0$, 0<g<1. Тогда формула для вычисления суммы финансовой пирамиды в случае

с линейным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу в момент времени t имеет вид:

$$S(t) = -\frac{1}{6}\beta m q t^3 + \frac{1}{2} m\big((1-g)q - \beta q_0\big)t^2 + m\big((1-g)q - \beta N_0\big)t + S_0$$

4) Модель со сверхлинейным приростом клиентов

Пусть количество клиентов растет с экспоненциальной скоростью, то есть $q_0 q^t = \frac{dN}{dt}$. Тогда число клиентов при начальном условии N(0)=N0 вычисляется по формуле: $N(t) = N_0 + q_0 q^t \ln q,\ t > 0$.

Формула вычисления суммы финансовой пирамиды при постоянном расходе на рекламу имеет вид:

$$S(t) = m(q_0 \ln q - \beta(N_0 + q_0))q^t + S_0 - R_0 t$$

5) Модель с приростом клиентов за счет рекламной кампании

При моделировании рекламной кампании стоит учитывать следующие предположения:

Скорость изменения числа клиентов пропорционально эффективности рекламной кампании и числу потенциальных клиентов. Пусть эффективность рекламной кампании в первом приближении будет пропорциональна расходам на рекламу a1(t), тогда будет выполняться:

$$\frac{dN}{dt} \sim \alpha_1(t)\big(N_n - N(t)\big) \qquad (2)$$

Слухи, передаваемые старыми клиентами для получения новых, пропорциональны количеству клиентов, их общительности a2(t) и числу потенциальных клиентов. Тогда должно выполняться:

$$\frac{dN}{dt} \sim \alpha_2(t)N(t)(N_n - N(t)) \qquad (3)$$

Суммируем (2) и (3), добавляем начальное условие N(0)=N0. Таким образом, получаем задачу Коши:

$$\frac{dN}{dt} = \big(k_1\alpha_1(t) + k_2\alpha_2(t)N(t)\big)\big(N_n - N(t)\big), \qquad t > 0$$

$$N(0) = N_0$$

Рассмотрев данные непрерывные модели, можно сделать вывод о том, что деятельность любой финансовой пирамиды рано или поздно приведет к банкротству. Причины краха пирамиды разные: отсутствие рекламы, невозможность покрыть расходы при постоянном или линейном приросте числа клиентов, неизбежность отсутствия притока новых клиентов.

2 Стохастический аналог

Для вычисления числа клиентов финансовой пирамиды N(t) будем использовать модели не только из работы [5], но и стохастические аналоги.

При моделировании финансовых пирамид стоит учитывать то, что на число клиентов могут влиять случайные факторы, поэтому N(t) целесообразнее вычислять с помощью Ито-процессов.

Общая формула непрерывного случая в дифференциальной форме Ито-процесса:

$$\mathrm{dS} = \left(m\frac{dN}{dt} - a(t) - bmN(t)\right)dt + b(S,t)\delta W$$

Формула непрерывного случая в интегральной форме Ито-процесса:

$$\mathrm{S(t)} = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau - bm\int_{t_0}^{t} N(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} b(S(\tau),\tau)\,\delta W_\tau$$

Если волатильность зависит только от времени b(t), то формула точного решения в неявной форме имеет вид:

$$\mathrm{S(t)} = S_0 - mN_0 + mN(t) - \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau - bm\int_{t_0}^{t} N(\tau)d\tau + \sqrt{\int_{t_0}^{t} b^2(\tau)\,d\tau} \cdot \varepsilon$$

2.1 Модель с постоянным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу

При постоянном притоке новых клиентов $q = \frac{dN}{dt}$, $N(t) = N_0 + qt$.

Расходы на рекламу в текущий момент времени t константно: $\alpha(t) = const = R_0$.

Прибыль финансовой кампании в текущий момент времени t вычисляется по формуле:

$$S(t) = -\frac{1}{2}bmqt^2 + m(q - \frac{bN_0}{2} - \frac{R_0}{m}))dt + \sigma\delta W$$

где S(t) – прибыль финансовой кампании в текущий момент времени t,

q – прирост участников,

m – сумма вклада,

b – процент по вкладу,

N0 – количество участников до начала деятельности финансовой пирамиды,

R0 – постоянные расходы на рекламу,

σ – волатильность (интенсивность шума),

S0 – сумма вклада на начало деятельности финансовой пирамиды,

t0 – начальный момент времени,

t1 – время, до которого моделируем процесс,

h – шаг моделирования.

Стохастический аналог:

$$dS(t) = \left(-bmqt + m\left(q - \frac{bN_0}{2} - \frac{R_0}{m}\right)\right)dt + \sigma\delta W$$

Точное решение при $t_0 \neq 0$:

$$\mathrm{S(t)} = S_0 + mqt - R_0(t - t_0) - \frac{bm}{2}\left(N_0(t - t_0) + q(t^2 - t_0^2)\right) + \sigma\sqrt{t - t_0} \cdot \varepsilon$$

Точное решение при $t_0 = 0$:

$$\mathrm{S(t)} = -\frac{1}{2}bmqt^2 + m\left(q - \frac{bN_0}{2} - \frac{R_0}{m}\right)t + S_0 + \sigma\sqrt{t} \cdot \varepsilon$$

Стохастический аналог с линейным шумом имеет вид:

$$dS(t) = \left(-bmqt + m\left(q - bN_0 - \frac{R_0}{m}\right)\right)dt + \sigma S\delta W$$

2.2 Модель с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу

В данной модели на рекламную кампанию каждый месяц уходит некоторый процент g от прибыли финансовой пирамиды. Процент g зависит также от расходов на собственное потребление, уплату налогов и другие расходы, $0 < g < 1$.

При постоянном притоке новых клиентов $q = \frac{dN}{dt}$, $N(t) = N_0 + qt$.

Расходы на рекламу в текущий момент времени t: $\alpha(t) = gm\frac{dN}{dt}$.

Прибыль финансовой кампании в текущий момент времени t вычисляется по формуле:

$$S(t) = -\frac{1}{2}bmqt^2 + m((1-g)q - bN_0))t + S_0$$

где g – процент на рекламу от вновь поступивших средств.

Стохастический аналог:

$$dS(t) = \left(-bmqt + m((1-g)q - bN_0)\right)dt + \sigma\delta W$$

Точное решение имеет вид:

$$\mathrm{S(t)} = S_0 + mqt - R_0(t - t_0) - \frac{bm}{2}(N_0(t - t_0) + q(t^2 - t_0^2)) + \sigma\sqrt{t - t_0} \cdot \varepsilon$$

2.3 Общее сингулярно возмущенное уравнение

Задача сингулярного возмущения содержит небольшой параметр, который невозможно приблизить, установив значение параметра равным нулю. То есть решение не может быть равномерно аппроксимировано асимптотическим разложением. Асимптотическое разложение функции f(x) это выражение функции в виде ряда, у которого частичные суммы могут не сходиться, но при этом любая частичная сумма дает правильную асимптотическую оценку f. Следовательно, каждый следующий элемент асимптотического разложения дает чуть более точное описание порядка роста функции f.

Рассмотрим уравнение, задающее деятельность финансовой пирамиды с ажиотажным спросом:

$$dS_t = \frac{1}{\lambda}\alpha(S,t)dt + \frac{1}{\lambda}b(S,t)\delta W,$$

где $0 < \lambda \ll 1$.

Тогда общее сингулярно возмущенное уравнение имеет вид:

$$\mathrm{dS} = \frac{1}{\lambda}\left(m\frac{dN}{dt} - a(t) - bmN(t)\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}b(S,t)\delta W$$

где λ – малый параметр.

Стохастический аналог:

$$\mathrm{dS} = \frac{1}{\lambda}\left(-bmqt + m(q - \frac{bN_0}{2} - \frac{R_0}{m})\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sigma\delta W$$

2.4 Модель с приростом клиентов за счет рекламной кампании

Рассмотрим случай, когда число клиентов зависит от одного из важных параметров существования финансовой пирамиды: вклад в рекламную кампанию.

Уравнение модели с приростом клиентов за счет рекламной кампании имеет вид:

$$\frac{dN}{dt} = (k_1a_1(t) + k_2a_2(t)N(t))(N_n - N(t))$$

где a1(t) – эффективность рекламной кампании,

a2 – общительность старых участников с потенциальными,

k1 – коэффициент эффективности рекламной кампании,

k2 – коэффициент общительности старых участников с потенциальными,

Nn – общее число потенциальных клиентов.

Стохастический аналог с малым параметром λ:

$$\mathrm{d}N = \frac{1}{\lambda}(k_1a_1(t) + k_2a_2(t)N(t))(N_n - N(t))dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sigma_2\delta W_2$$

где σ_2 – интенсивность шума для моделирования клиентов.

2.5 Модель прироста клиентов в форме Логистического уравнения

Динамика роста в условиях ограниченности ресурсов описывается при помощи логистического уравнения, стохастический аналог которого с начальным условием $x_0 = x(0)$ имеет вид:

$$dx = (\alpha x - \beta x^2)dt + \sigma x \delta W$$

Данное уравнение используется для моделирования финансовой пирамиды. Эта модель называется приростом клиентов в форме Логистического уравнения с линейным шумом.

Стохастический аналог вычисления прироста клиентов имеет вид:

$$dN = \frac{1}{\lambda}\left(k_1\alpha_1(t)N_n + (k_2\alpha_2(t)N_n - k_1\alpha_1)N(t) - k_2\alpha_2 N^2(t)\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sigma_2 N\delta W_2$$

2.6 Модель прироста клиентов за счет рекламной кампании и постоянных расходов на рекламу

В данной модели расходы на рекламу каждый месяц имеют одно и то же значение.

Уравнение модели прироста клиентов за счет рекламной кампании и постоянными расходами на рекламу имеет вид:

$$dS_t = (m\frac{dN}{dt} - \alpha(t) - bmN(t))dt + \sigma_1\, \delta W_1$$

где σ_1 – интенсивность шума для моделирования суммы,

σ_2 – интенсивность шума для моделирования клиентов.

Тогда стохастический аналог моделирования притока клиентов финансовой пирамиды в момент времени t имеет вид:

$$dN = \frac{1}{\lambda}\left(k_1\alpha_1(t)N_n + (k_2\alpha_2(t)N_n - k_1\alpha_1)N(t) - k_2\alpha_2 N^2(t)\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sigma_2 N\delta W_2$$

Задача Коши для данного уравнения:

$$N(0) = N_0$$

$$S(0) = S_0$$

Общие данные: h, t0, t1.

Данные для количества прироста клиентов: a1, k1, a2, k2, Nn, N0, sigma2.

Данные для расчета суммы на счетах финансовой пирамиды: m, b, R0, sigma1, S0.

Также стоит учитывать факторы того, что половина потенциальных клиентов разочаровалась в рекламе и не доверяет друзьям. И часто в исходных данных учитывается то, что близкие лучшие друзья участвуют в финансовой пирамиде до момента начала её деятельности.

3 Программная реализация

Моделирование финансовых пирамид будет представлять собой набор скриптов, написанных на языке Python в среде Jupyter Notebook. Пользователь с помощью этого инструмента сможет задать исходные данные, выбрать модель для моделирования финансовой пирамиды, получить график числа клиентов и график суммы финансовой пирамиды.

Результат представлен на рисунке 1.

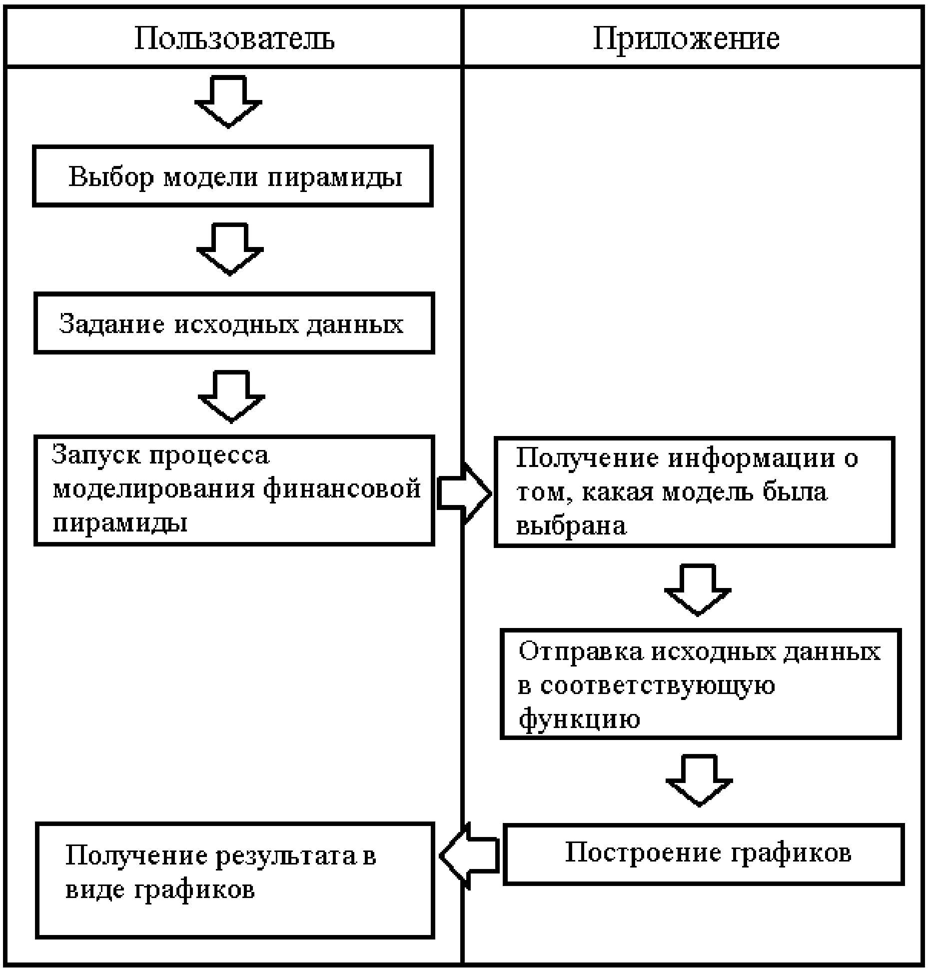

Рисунок 1 – Модель взаимодействия пользователя-программиста со скриптами

На рисунке 1 пользователь – это человек, использующий скрипты, написанные на языке Python в среде Jupyter Notebook. Пользователь выбирает модель финансовой пирамиды, задает исходные данные, нажимает на кнопку

«Запуск (Run)», которая запускает процесс моделирования, результат которого представлен на графиках.

Порядок взаимодействия пользователя с программой должен быть простым и понятным. Однако вместе с этим должен и обеспечивать достаточную функциональность. Для достижения такого эффекта в среде Jupyter Notebook был реализован такой подход: сначала пользователь видит название модели с соответствующими ей формулами, затем скрипты, написанные на языке Python, в которых можно задать или изменить исходные данные, а ниже скриптов можно рассмотреть график, демонстрирующий деятельность финансовой пирамиды.

Таким образом, моделирование деятельности финансовых пирамид в среде Jupyter Notebook состоит из четырех блоков:

1) Название модели финансовой пирамиды.
2) Формулы модели финансовой пирамиды.
3) Скрипты, написанные на Python, в которых можно задать или изменить исходные данные.
4) График прибыли финансовой пирамиды.

3. Модель с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу

$\frac{dN}{dt} = q, N(t) = N_0 + qt$

$a(t) = gm\frac{dN}{dt}$

$S(t) = -\frac{1}{2}bmqt^2 + m((1-g)q - bN_0)t + S_0$

Стохастический аналог: $dS(t) = (-bmqt + m((1-g)q - bN_0))dt + \sigma\delta W$

```
#Исходные данные
q = 100 #Прирост
m = 10000 #Сумма вклада
b = 1.1 #Процент по вкладу
N0 = 1 #Количество участников до начала деят. фин. пир.
R0 = 1000 #Расход на рекламу
sigma = 100000 #Интенсивность шума
S0 = -10000 # Сумма вклада на начала деят. фин. пир.
t0 = 0
t1 = 2
g = 0.5 #Процент на рекламу от вновь поступивших средств
h = 0.001
def A(S,t):
    return -b*m*q*t+m*((1-g)*q-b*N0)
def B(S,t):
    return sigma
def diffB(x,t):
    return 0
```

Рисунок 2 – Интерфейс в среде Jupyter Notebook, состоящий из трех блоков

Ниже скриптов, написанных на языке программирования Python, находятся скрипты с осуществлением моделирования деятельности финансовой пирамиды, благодаря которым строится график, который можно увидеть ниже данных скриптов.

```
tt = np.arange(t0,t1+h,h)
len_=len(tt)

for i in range(50):
    vec_rnd = np.random.normal(0, 1, len_)
    x = gs.VectorRungeKutta4order(x0=S0, t0=t0, t1=t1, h=h, Axt=A, Bxt=B, Dif
    plot(tt, x, linestyle='solid', linewidth = 1, label='S', scalex=True, sca

title='Деятельность финансовой пирамиды'
plt.title(title, fontsize=16)
plt.xlabel('t', fontsize=18)
plt.ylabel('$S_t$', fontsize=18)

plt.grid(True)
plt.xlim((t0-0.01,t1+0.1))
#plt.ylim((-1, 2.5))
N = 3
params = plt.gcf()
plSize = params.get_size_inches()
params.set_size_inches((plSize[0]*N, plSize[1]*N))
plt.show()
```

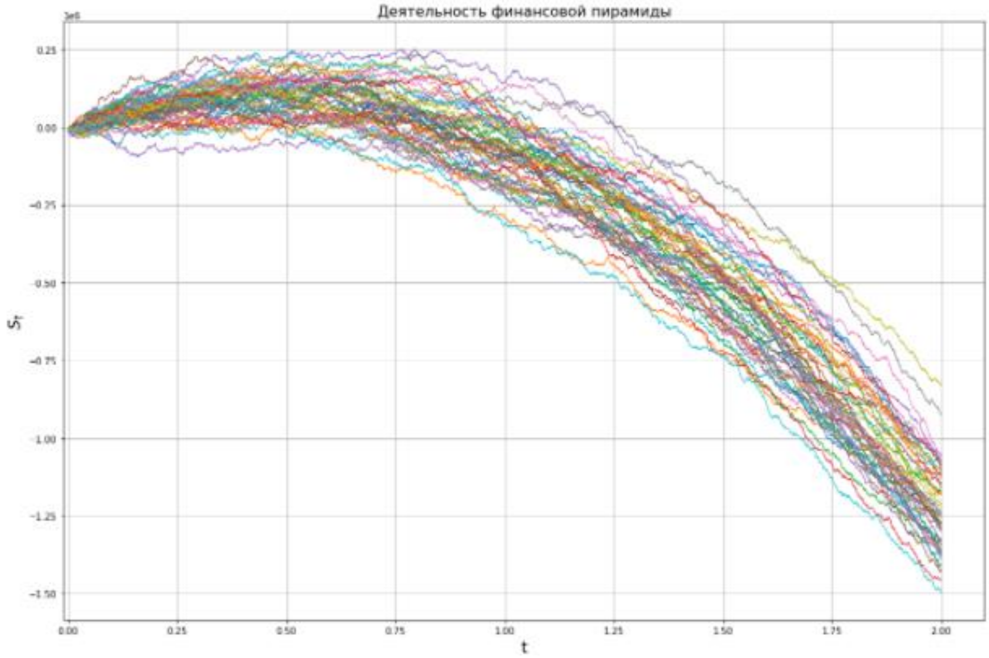

Рисунок 3 – Интерфейс в среде Jupyter Notebook: четвертый блок с графиком

3.1 Описание алгоритмов

Для разработки приложения для моделирования деятельности финансовых пирамид был использован язык программирования Python и среда Jupyter Notebook.

Рассмотрим моделирование деятельности финансовых пирамид с помощью стохастических аналогов.

Рассмотрим модель с постоянным приростом клиентов и постоянными расходами на рекламу.

Стохастический аналог:

$$dS(t) = \left(-bmqt + m\left(q - \frac{bN_0}{2} - \frac{R_0}{m}\right)\right)dt + \sigma\delta W$$

Исходные данные: q = 100, m = 10000, b = 1.1, N0 = 1, R0 = 1000, sigma = 100000, S0 = -10000, T0 = 0, t1 = 2, h = 0.001.

Тогда результаты моделирования с помощью численной схемы Рунге-Кутта 4 порядка:

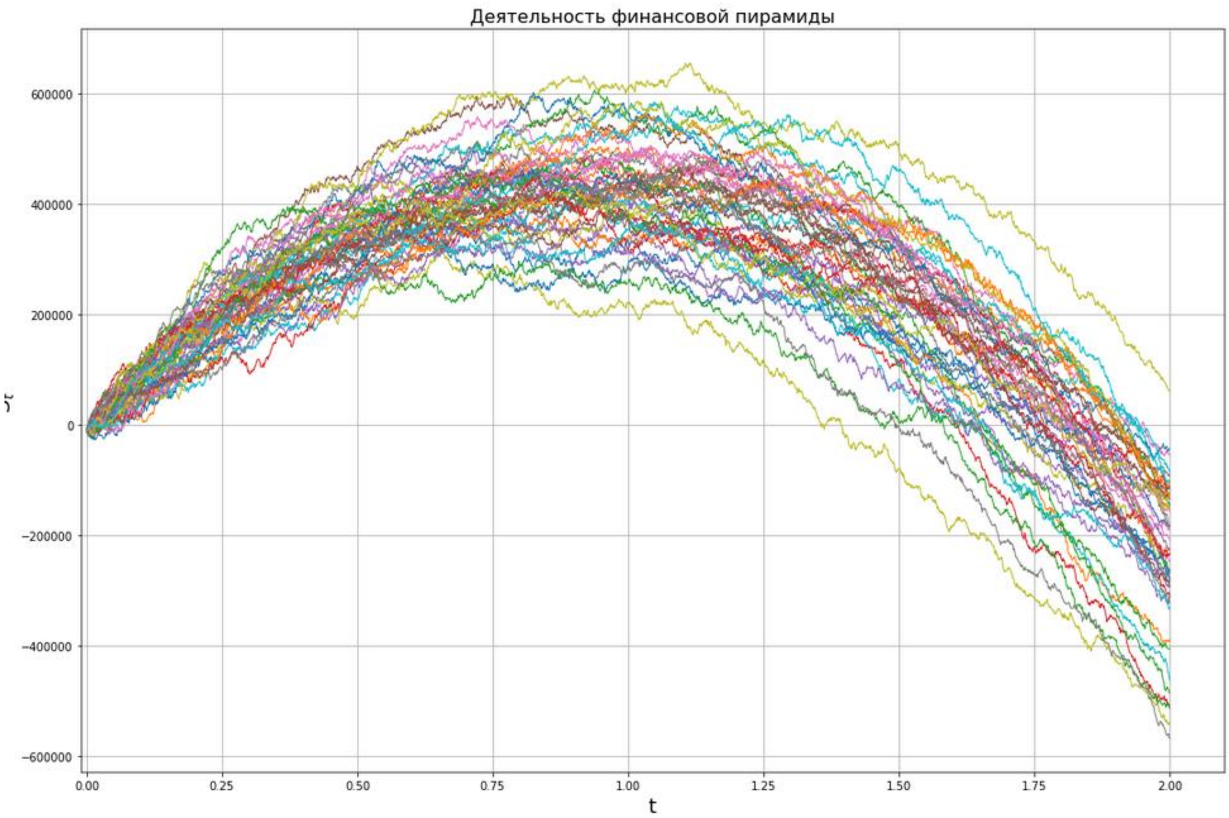

Рисунок 4 – Результаты моделирования схемой Рунге-Кутта 4 порядка

Исходные данные: q = 100, m = 10000, b = 1.8, N0 = 1, R0 = 1000, sigma = 100000, S0 = -30000, T0 = 0, t1 = 2, h = 0.001.

Тогда результаты моделирования с помощью численной схемы Рунге-Кутта 4 порядка:

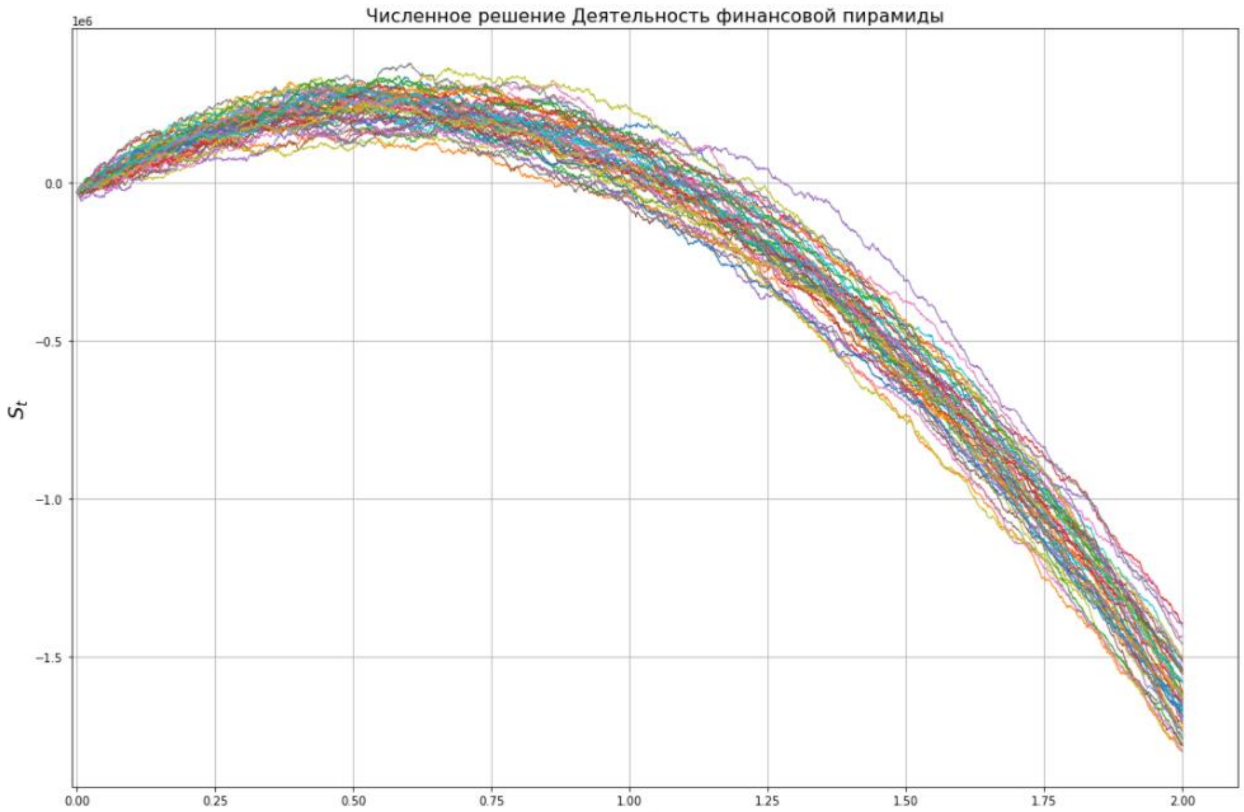

Рисунок 5 – Результаты моделирования схемой Рунге-Кутта 4 порядка с процентом по вкладу, равным 1.8

Стохастический аналог с линейным шумом:

$$dS(t) = \left(-bmqt + m\left(q - bN_0 - \frac{R_0}{m}\right)\right)dt + \sigma S\delta W$$

При задании тех же исходных данных, но с интенсивностью шума равной 0,2, то есть sigma = 0.02.

Тогда результаты моделирования случая постоянного прироста клиентов и постоянного расхода на рекламу с линейным шумом с помощью численной схемы Рунге-Кутта 4 порядка имеет вид:

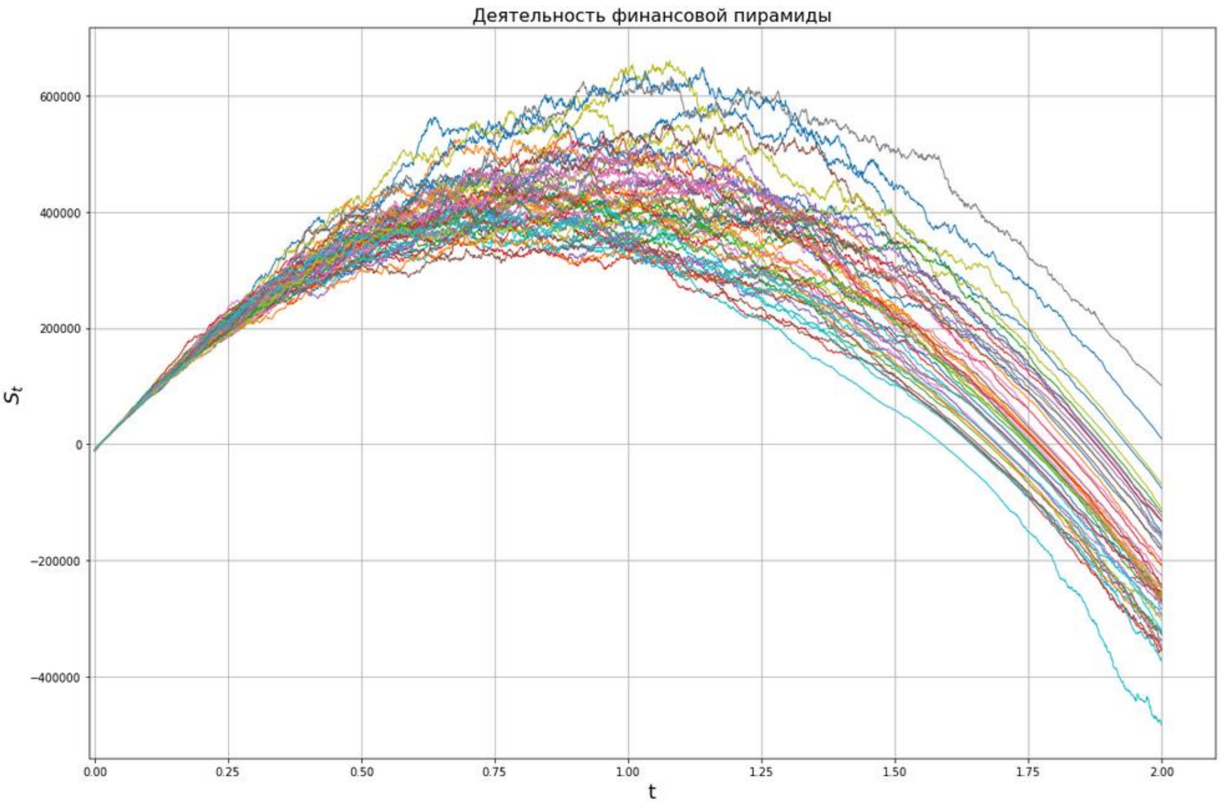

Рисунок 6 – Результаты моделирования схемой Рунге-Кутта 4 порядка с линейным шумом

Рассмотрим модель с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу.

Стохастический аналог:

$$dS(t) = \big(-bmqt + m((1-g)q - bN_0)\big)dt + \sigma\delta W$$

Исходные данные: q = 100, m = 10000, b = 1.1, N0 = 1, R0 = 1000, sigma = 100000, S0 = 10000, T0 = 0, t1 = 2, g = 0.5, h = 0.001.

Тогда результат моделирования имеет вид:

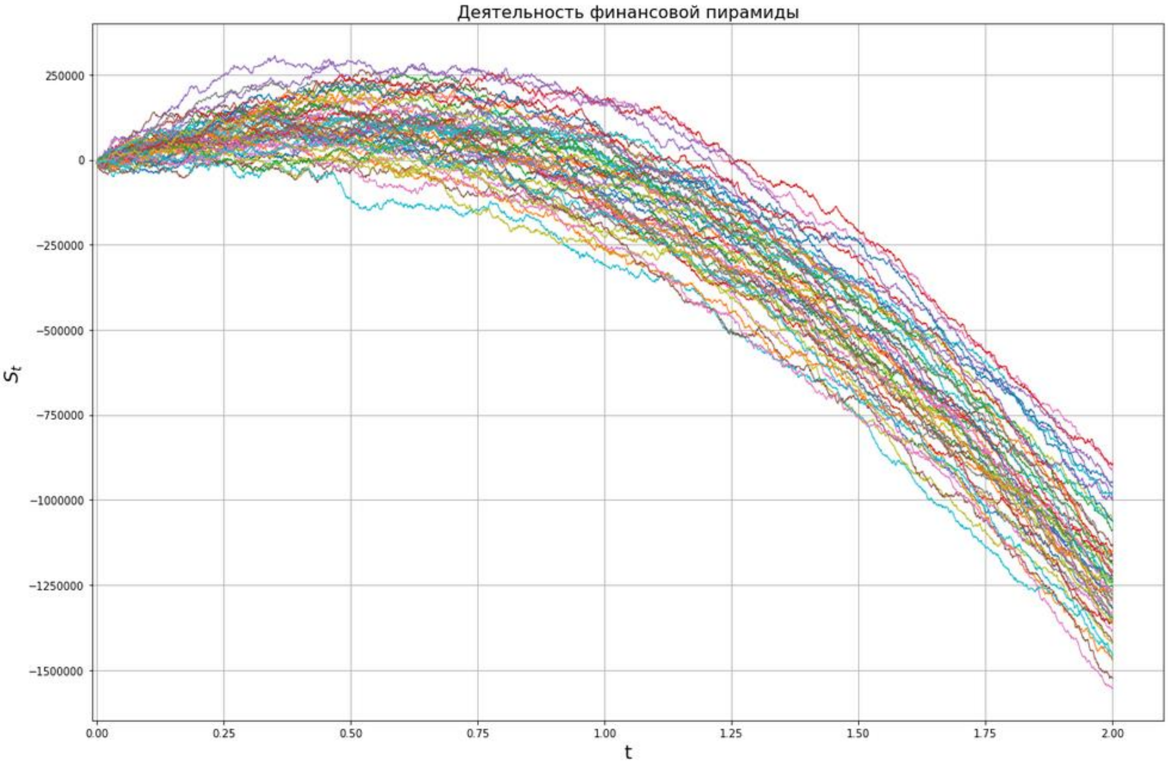

Рисунок 7 – Результаты моделирования случая с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу

Формула точного решения модели с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу имеет вид:

$$\mathrm{S(t)} = S_0 + mqt - R_0(t - t_0) - \frac{bm}{2}\left(N_0(t - t_0) + q(t^2 - t_0^2)\right) + \sigma\sqrt{t - t_0} \cdot \varepsilon$$

Исходные данные (в месяцах): q = 10, m = 30000, b = 0.1, N0 = 1, R0 = 10000, sigma = 50000, S0 = 10000, T0 = 0, t1 = 24, h = 1.

Тогда результат моделирования точного решения с заданными исходными данными имеет вид:

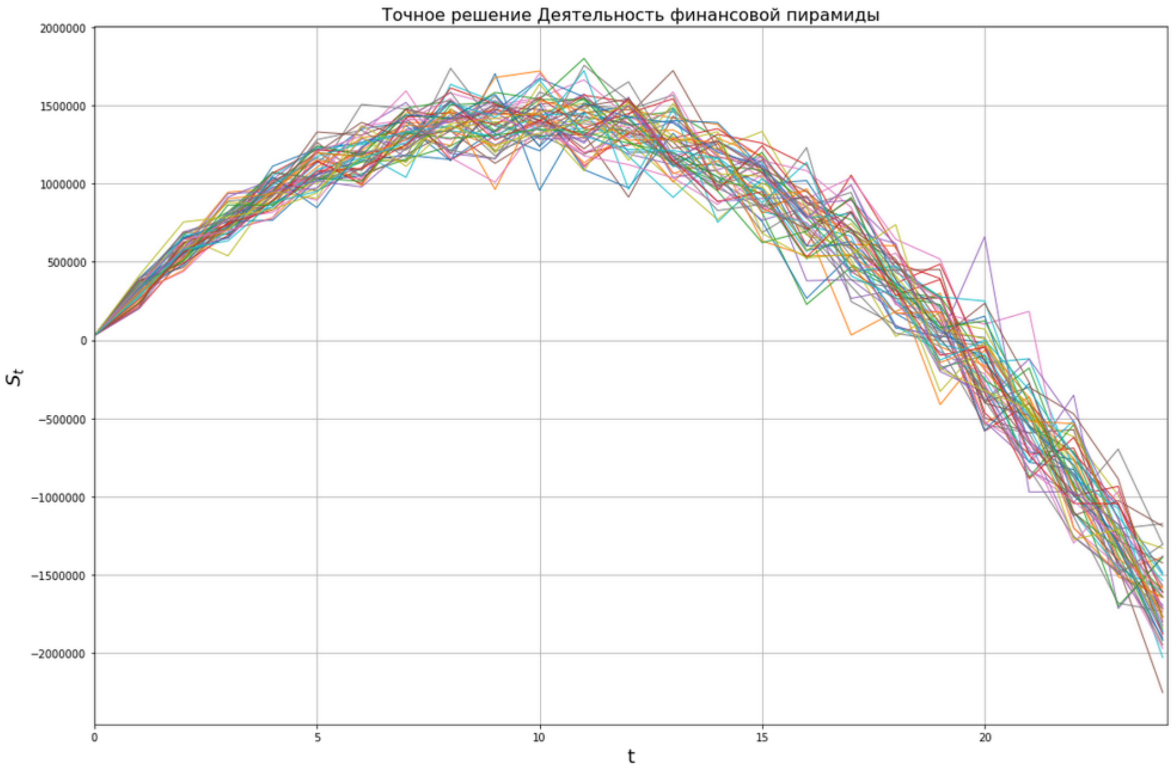

Рисунок 8 – Результаты моделирования точного решения случая с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу

Исходные данные (в месяцах): q = 10, m = 30000, b = 1.1, N0 = 1, R0 = 10000, sigma = 50000, S0 = 10000, T0 = 0, t1 = 5, h = 1.

Тогда результат моделирования точного решения модели с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу с другими исходными данными имеет вид:

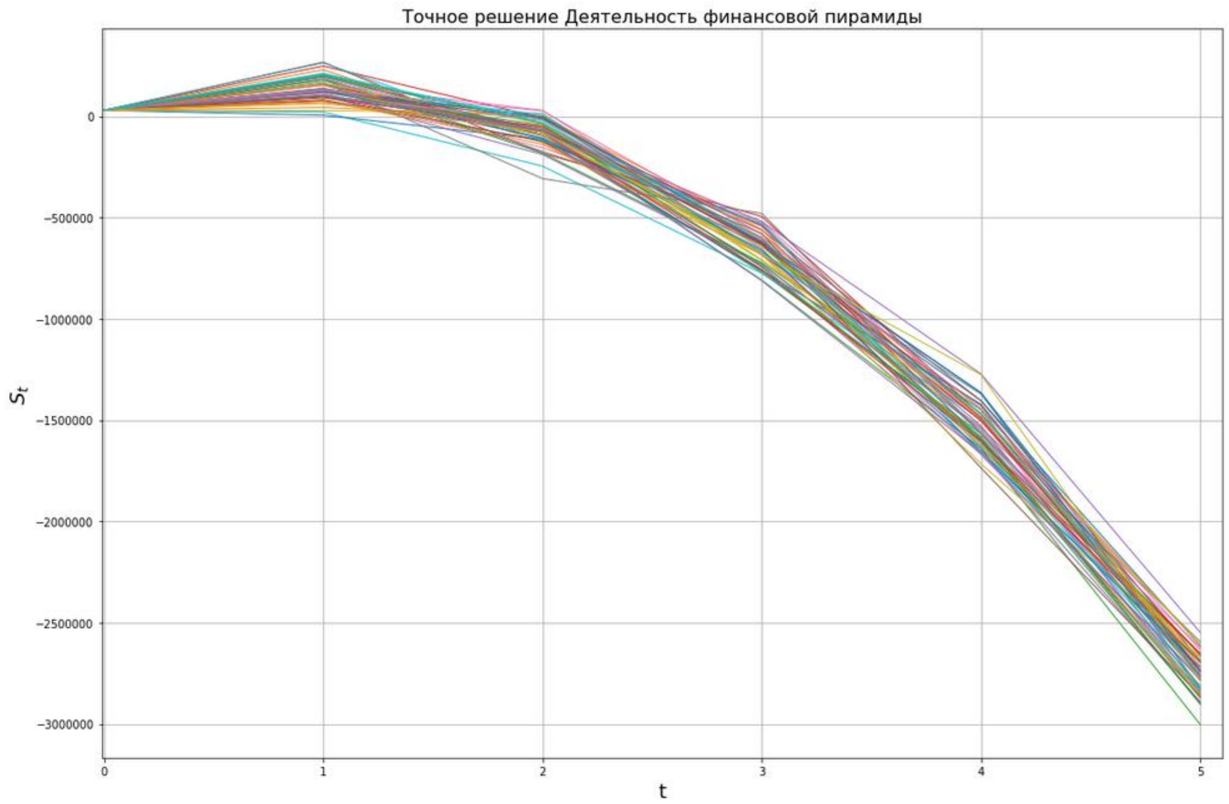

Рисунок 9 – Результаты моделирования точного решения с шагом в месяц, равному 1

Исходные данные (в месяцах): q = 10, m = 30000, b = 1.1, N0 = 1, R0 = 10000, sigma = 50000, S0 = 10000, T0 = 0, t1 = 5, h = 0.1.

Тогда результат моделирования точного решения модели с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу имеет вид:

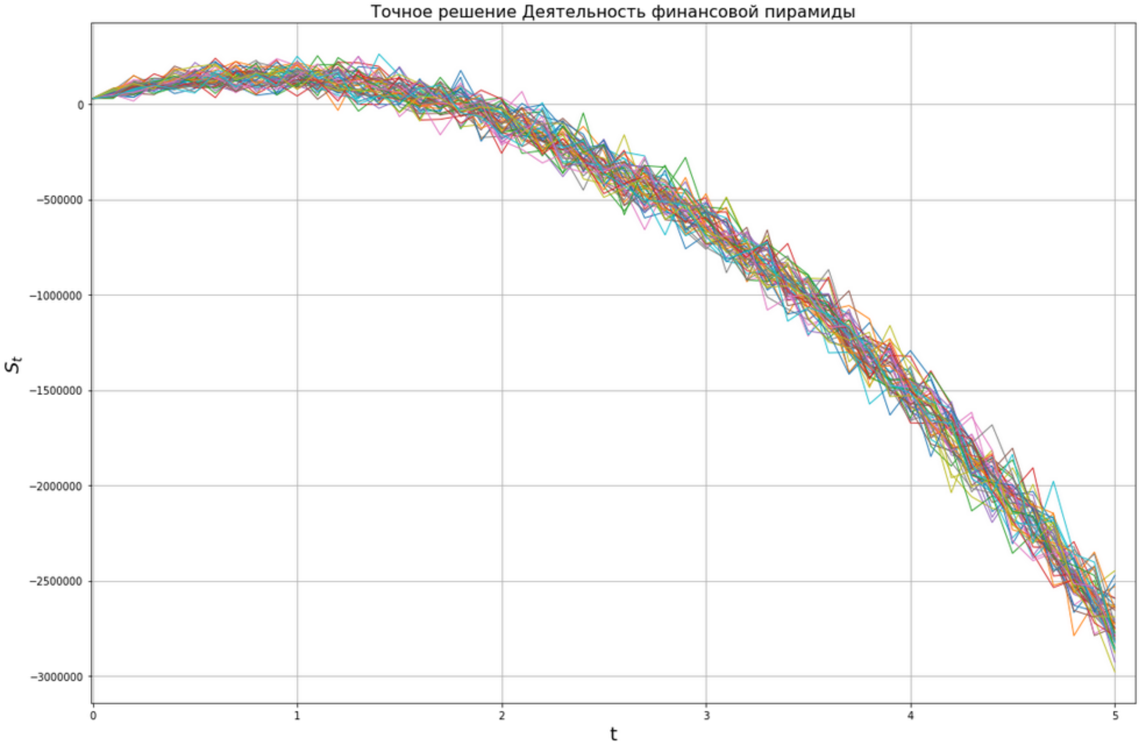

Рисунок 10 – Результаты моделирования точного решения с шагом в месяц, равному 0.1

Исходные данные (в месяцах): q = 10, m = 30000, b = 0.5, N0 = 1, R0 = 10000, sigma = 50000, S0 = 10000, t0 = 0, t1 = 5, h = 0.1.

Тогда результат моделирования точного решения модели с постоянным приростом клиентов и процентными расходами на рекламу имеет вид:

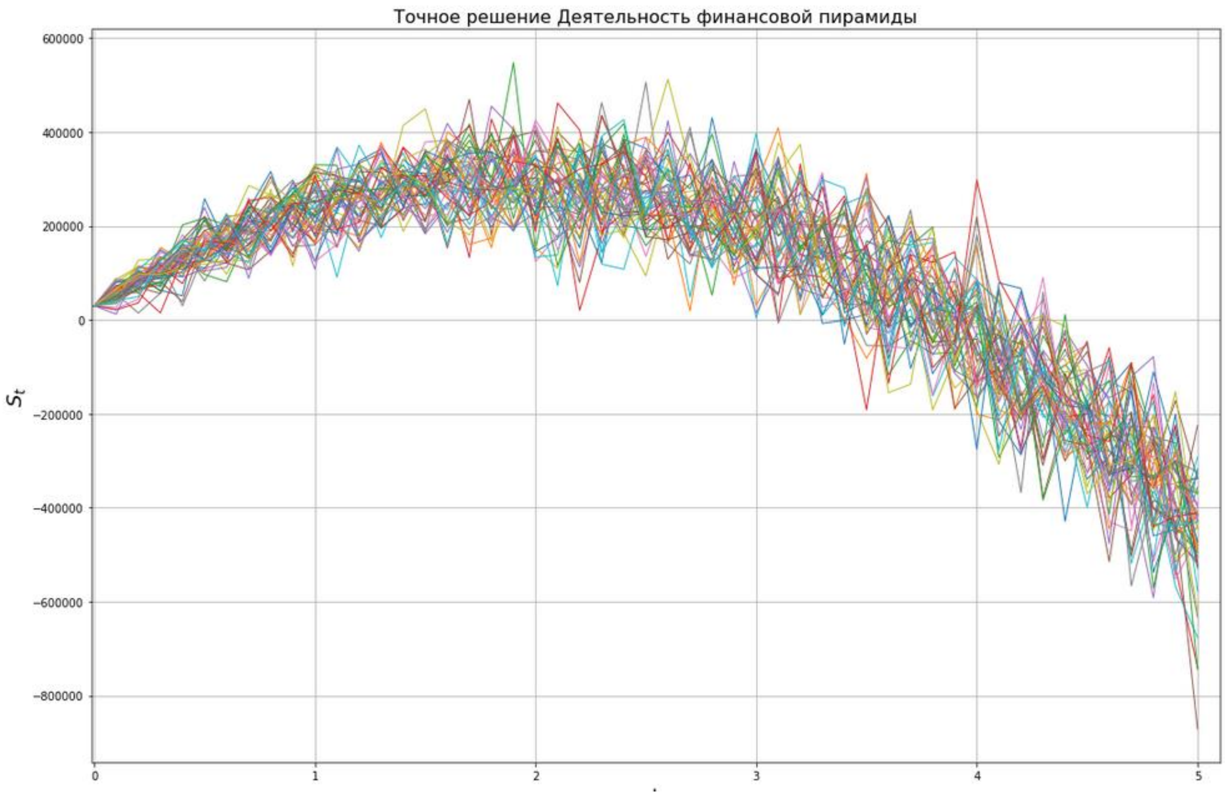

Рисунок 11 – Результаты моделирования точного решения с шагом в месяц 0.1 и с процентом по вкладу 0.5

Рассмотрим модель сингулярно возмущенного уравнения.

Общее сингулярно возмущенное уравнение имеет вид:

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{\lambda}\left(m\frac{dN}{dt} - a(t) - bmN(t)\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}b(S,t)\delta W$$

Стохастический аналог:

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{\lambda}\left(-bmqt + m(q - \frac{bN_0}{2} - \frac{R_0}{m})\right)dt + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sigma\delta W$$

Исходные данные: q = 100, m = 10000, b = 1.1, N0 = 1, R0 = 1000, sigma = 1000000, S0 = 100000, t0 = 0, t1 = 2, h = 0.0001, λ = 0.001.

Тогда результат моделирования данной модели имеет вид:

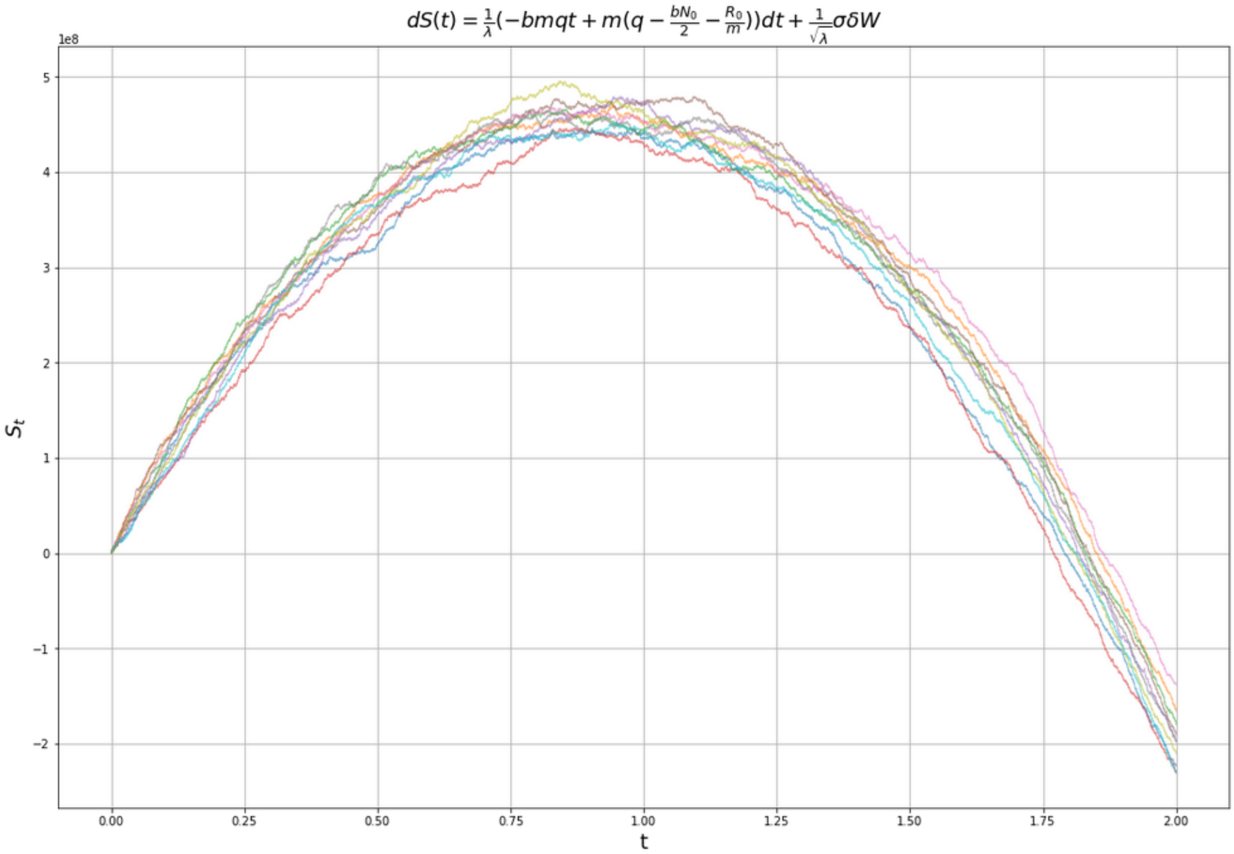

Рисунок 12 – Результаты моделирования стохастического аналога сингулярно возмущенного уравнения

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель курсовой работы – реализация алгоритмов, моделирующих деятельность финансовых пирамид с помощью Ито-процессов – достигнута.

В теоретической части курсовой работы изучены и описаны некоторые виды моделей финансовых пирамид и выведены их стохастические аналоги.

В работе предложено моделирование деятельности финансовых пирамид с помощью набора скриптов, реализованных на языке Python в среде Jupyter Notebook.

Данный инструмент может использоваться для выявления основных закономерностей деятельности финансовых пирамид. Для проведения анализа предусмотрено несколько шагов: выбор модели, задание исходных данных, графический анализ динамики изменения количества клиентов финансовой пирамиды и собираемой суммы.

Планируется продолжать работу и создать приложение на объектно-ориентированном языке программирования C#, в котором также можно будет выбрать модель финансовой пирамиды, задать исходные данные и увидеть динамику деятельности финансовых пирамид с помощью соответствующих графиков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Стохастический мир URL – http://314159.ru/stepanov/stepanov1.pdf (10.10.2021).

2 Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели / А. Н. Ширяев. – М.: Лань, 1998. – 440 с.

3 Коваленко А. В. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамидой. Часть 1. Основные понятия / А. В. Коваленко, М.Х. Уртенов, Р.Х. Чагаров // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №08(82). – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/29.pdf, 0,688 у.п.л.

4 Коваленко А. В. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамидой. Часть 2. Дискретные модели / А. В. Коваленко, М.Х. Уртенов, Р.Х. Чагаров // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №08(82). – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/30.pdf, 0,813 у.п.л.

5 Коваленко А. В. Математическое моделирование деятельности финансовой пирамидой. Часть 3. Непрерывные модели / А. В. Коваленко, М.Х. Уртенов, Р.Х. Чагаров // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №08(82). – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/08/pdf/31.pdf, 0,688 у.п.л.