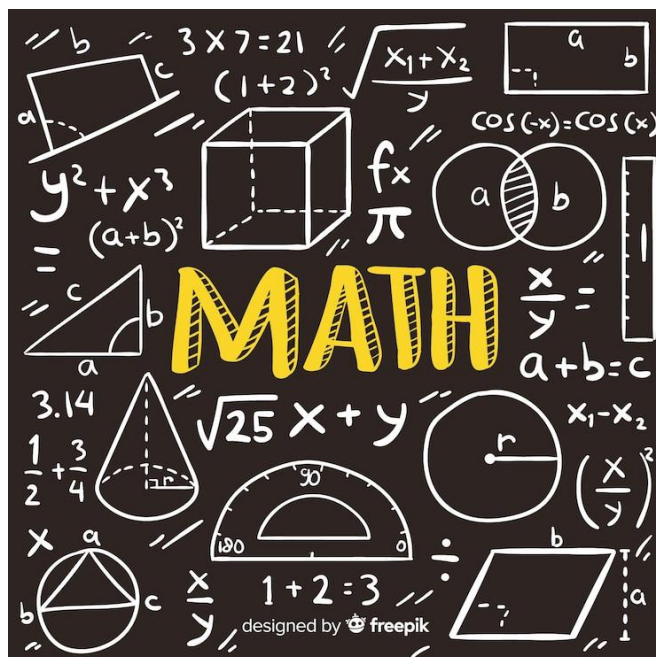


**В.В. ВАСИЛЕНКО, А.А. КРАМАРЕНКО,  
О.В. РУДЕНКО**

# **ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**Учебное пособие**



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.В. ВАСИЛЕНКО, А.А. КРАМАРЕНКО, О.В. РУДЕНКО

# ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Краснодар  
2025

УДК 517.1(075.8)

ББК 22.161.0я73

В 19

Рецензенты:

Доктор технических наук, доцент

*Н.А. Наумова*

Кандидат технических наук, доцент

*Е.Е. Полупанова*

**Василенко, В.В., Крамаренко, А.А., Руденко, О.В.**

В 19 Введение в математический анализ: учебное пособие /  
В.В. Василенко, А.А. Крамаренко, О.В. Руденко;  
Министерство науки и высшего образования Российской  
Федерации, Кубанский государственный университет. –  
Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2025. – 211 с. – 500 экз.  
ISBN 978-5-8209-2730-0

Пособие содержит материалы по учебным дисциплинам  
«Дифференциальное исчисление» и «Математический анализ».  
Теоретический материал сопровождается доказательствами,  
некоторыми решенными задачами и заданиями для  
самостоятельного выполнения.

Адресуется студентам, обучающимся по направлению  
02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные  
технологии.

УДК 517.1(075.8)

ББК 22.161.0я73

ISBN 978-5-8209-2730-0

© Кубанский государственный  
университет, 2025

© Василенко В.В., Крамаренко А.А.,  
Руденко О.В., 2025

## ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ по праву считается одной из основополагающих дисциплин высшей математики. В нем впервые для студентов младших курсов отделяются понятия от определений, вводятся общие представления и аксиоматика, на базе которых выстраивается фундаментальный курс. Овладеть основами математического анализа – значит не только научиться грамотно, четко и лаконично выстраивать коммуникацию с научным сообществом, но и получить универсальный инструмент для собственного восприятия и понимания потенциалов информационного трафика. Понимание основ математического анализа необходимо для будущего специалиста, так как оно закладывает базу для освоения ряда дисциплин – от теоретической механики до машинного обучения и финансовой математики.

Стоит учитывать, что у авторов других учебных пособий могут быть различные взгляды на структуру дисциплин «Дифференциальное исчисление» и «Математический анализ», что ведёт к различиям в организации и последовательности изложения материала.

В данном учебном пособии материал представлен в соответствии с хронологией становления дисциплин и учетом требований к формированию необходимых компетенций по направлению 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии. Порядок следования материала формирует нужные причинно-следственные связи для понимания предмета: от элементов теории множеств до определения функции одной вещественной переменной с целью ее дальнейшего исследования методами дифференциального исчисления.

Учебное пособие отражает лишь часть смежных дисциплин, поэтому может быть использовано как базовый вариант для изучения основ математического анализа. Некоторые разделы не вошли в пособие, но все желающие, используя рекомендуемую литературу, могут продолжить свое знакомство с математическим анализом.

Авторы выражают благодарность студентам Кубанского государственного университета за техническую помощь в процессе формирования учебного пособия.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для краткой записи математических высказываний будем употреблять следующие логические символы:

**1. Квантор всеобщности** –  $\forall$ , который читается как «любой», «всякий», «для любого», «для всякого», «для каждого», «для всех».

**2. Квантор существования** –  $\exists$ , который читается как «существует», «можно найти», «найдется».

**3. Знак перечисления свойств и качеств** – это либо двоеточие «:», либо прямой слэш «|».

**4. Знак единственности** – это знак «!»

Знак  $\forall$  – перевернутая буква A, а знак  $\exists$  – перевернутая E, которые являются первыми буквами английских слов *All* – все и *Exists* – существует.

Например, запись  $\forall x \exists! y : x + y = 5$  читается следующим образом: «для любого  $x$  можно найти единственный  $y$  такой, что  $x + y = 5$ ».

**5. Знак следования**  $\Rightarrow$ . Если  $\alpha$  и  $\beta$  – два высказывания, то запись  $\alpha \Rightarrow \beta$  будет означать: «из  $\alpha$  следует  $\beta$ », « $\alpha$  влечет за собой  $\beta$ », «если  $\alpha$ , то  $\beta$ », «для того чтобы было выполнено  $\alpha$ , необходимо, чтобы выполнялось  $\beta$ » или «для того чтобы выполнялось  $\beta$ , достаточно, чтобы было выполнено  $\alpha$ ». Кроме того, таким символом может быть обозначено необходимое свойство (либо доказательство необходимости выполнения требований).

Достаточное требование может быть обозначено как  $\Leftarrow$ .

Например, запись  $x : 6 \Rightarrow x : 2$  можно прочесть следующим образом: «если  $x$  делится на 6, то  $x$  делится на 2» или «для того чтобы  $x$  делился на 6, необходимо, чтобы  $x$  делился на 2», или «для того чтобы  $x$  делился на 2, достаточно, чтобы  $x$  делился на 6».

**6. Знак равносильности**  $\Leftrightarrow$ . Запись  $\alpha \Leftrightarrow \beta$  означает: « $\alpha$  равносильно  $\beta$ », «из  $\alpha$  следует  $\beta$  и из  $\beta$  следует  $\alpha$ », « $\alpha$  необходимо и достаточно для выполнения  $\beta$ » или « $\alpha$  выполнено тогда и только тогда, когда выполнено  $\beta$ ».

Например,  $\forall P_n(x)$  – многочлен,  $P_n(x) : (x - x_0) \Leftrightarrow x_0$  – корень  $P_n(x)$  можно прочесть таким образом: «для того чтобы многочлен  $P_n(x)$  делился на  $(x - x_0)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $x_0$  было

корнем этого многочлена» или «многочлен  $P_n(x)$  делится на  $(x - x_0)$  тогда и только тогда, когда  $x_0$  является корнем этого многочлена».

# 1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

## 1.1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Строгого математического определения понятие *множество* не имеет. Поэтому «множество» будем понимать, как всякую совокупность, набор объектов (элементов). При этом, как правило, можно указать общее свойство, которым обладают или которым характеризуются элементы, входящие во множество. Например, множество студентов в группе. Элементами данного множества являются студенты, характеризующиеся общим свойством: студенты некоторой группы. Для обозначения множеств в математике принято использовать прописные символы. Объекты, входящие во множества или элементы множеств, обозначаются с помощью соответствующих строчных символов.

Пусть элемент  $a$  входит в некоторое множество  $A$ . Данный факт будем записывать с помощью выражения  $a \in A$ .

Запись  $a \in A$  понимается как « $a$  является элементом множества  $A$ » или «элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ ». Если объект  $a$  не содержится во множестве  $A$ , то запись этого факта имеет вид  $a \notin A$ . Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается специальным символом  $\emptyset$ . Множество, состоящее из всех возможных элементов, называется *универсумом* и обозначается как  $U$ . Любое множество можно таким образом считать частью  $U$ , что приводит к определению:

Для представления или задания множеств используется несколько разных способов.

### 1. *Непосредственное задание*

Множества задаются перечислением всех входящих в них элементов, которые заключаются в фигурные скобки.

Например, множество рек России можно задать как {Волга, Кубань, Ока, Лена, Енисей}.

2. *Задание множества указанием характеристического свойства*

В таком способе задания множеств используются записи в фигурных скобках. Пространство между открывающей и закрывающей скобками делится на две части с помощью вертикальной черты. Слева от разделителя записывается общий вид элементов множества, а справа – свойство, которым обладают элементы данного множества и не обладают никакие другие элементы. Свойство элементов множества, указанное в задании множества, называется характеристическим свойством.

Например, множество  $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$  – это множество всех четных натуральных чисел.

### 3. Представление множеств с помощью диаграмм Венна

Диаграммы Венна — это наглядный способ одновременного представления нескольких произвольных множеств. При этом всякое множество представляется областью на плоскости, ограниченной замкнутой линией. Обычно такие области ограничиваются линиями, подобными окружностям.

В изображении нескольких множеств на диаграммах Венна представляется их возможное взаимное расположение. Общие части замкнутых областей для множеств задают общие части соответствующих множеств. В частности, эти части могут быть пустыми.

Например, диаграммы Венна для произвольных двух и трех множеств имеют вид (рис. 1.1):

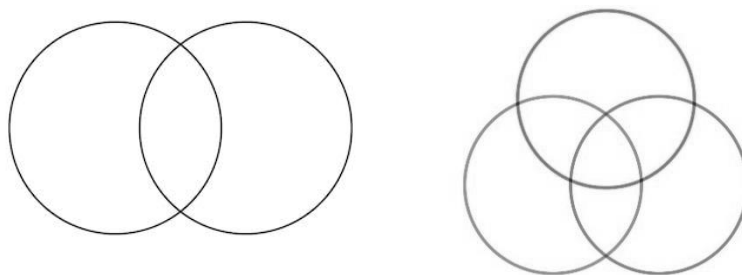


Рис. 1.1. Вид диаграмм Венна

**Определение 1.** Множество  $B$  называется подмножеством множества  $A$ , если каждый элемент множества  $B$  является элементом множества  $A$ . Обозначается это как  $B \subseteq A$  (нестрогое включение и допускает совпадение этих множеств). Запись  $B \subset A$  означает строгое включение, при котором  $B \neq A$ . В этом случае подмножество  $B$  называется собственным подмножеством

множества  $A$ . Заметим, что для любого множества  $A$  справедливо включение:  $\emptyset \subseteq A$ .

**Пример 1.** Пусть  $B = \{1,2,3\}$ , тогда  $\{1,2\}$ ,  $\{2,3\}$ ,  $\{3,1\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$  – собственные подмножества множества  $B$ .

**Определение 2.** Множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов. Очевидно, что множества  $A$  и  $B$  являются равными тогда и только тогда, когда  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$  одновременно.

**Пример 2.** Пусть  $A = \{3,4,5,6\}$ ,  $B = \{4,5,6,3\}$ . Тогда  $A = B$ .

Пусть  $A$  и  $B$  – некоторые множества. Над этими множествами могут выполняться пять **основных операций**.

### **1. Объединение множеств**

**Определение 3.** Объединением множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество, определяемое соотношением:

$$\{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\},$$

т.е. в объединение двух множеств входят те и только те элементы, которые содержатся хотя бы в одном из объединяемых множеств. Для обозначения операции объединения используется специальный символ  $\cup$ , а объединение множеств  $A$  и  $B$  записывается как  $A \cup B$ .

**Пример 3.** Пусть  $A = \{1, 2, 5, 8\}$ ,  $B = \{2, 4, 8, 10\}$ .

Тогда  $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$ . В самом деле, число 1 входит в объединение  $A \cup B$ , так как оно входит в  $A$ :  $1 \in A \cup B$ , так как  $1 \in A$ . По той же причине числа 2, 5, 8 входят в  $A \cup B$ . Числа 4 и 10 входят в  $A \cup B$ , поскольку они входят в  $B$ .

Универсальное множество графически изображают в виде множества точек прямоугольника, отдельные области внутри этого прямоугольника соответствуют различным подмножествам универсального множества. На диаграмме Эйлера – Венна можно проиллюстрировать все основные операции над множествами. На рис. 1.2 изображена диаграмма Венна для объединения двух множеств.

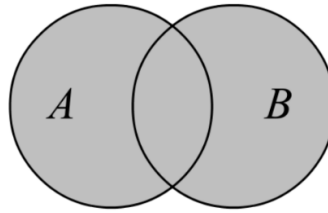


Рис. 1.2. Объединение двух множеств на диаграмме Венна

Операция объединения множеств обладает следующими свойствами:

- 1)  $A \cup B = B \cup A$  – коммутативность;
- 2)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  – ассоциативность;
- 3)  $A \cup \emptyset = A$ ;
- 4)  $A \cup A = A$  – идемпотентность;
- 5)  $A \cup U = U$ .

## 2. Пересечение множеств

**Определение 4.** Пересечением множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $\{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ , т.е. в пересечение двух множеств  $A$  и  $B$  входят только такие элементы, которые содержатся одновременно в обоих множествах. Для обозначения операции пересечения используется специальный символ  $\cap$ , а пересечение множеств  $A$  и  $B$  записывается как  $A \cap B$ .

Соответствующая диаграмма Венна имеет вид:

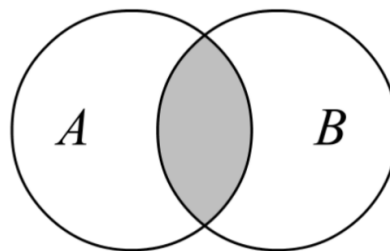


Рис. 1.3. Пересечение двух множеств на диаграмме Венна

**Пример 4.** Пусть  $A = \{1, 5, 7, 8\}$ ,  $B = \{2, 5, 7, 9, 10\}$ , тогда  $A \cap B = \{5, 7\}$ .

Операция пересечения множеств обладает следующими свойствами:

- 1)  $A \cap B = B \cap A$ ;
- 2)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
- 3)  $A \cap A = A$ ;

$$4) A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$5) A \cap U = A.$$

Для двух операций – объединение и пересечение, справедливы следующие свойства:

1)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  – дистрибутивность  $\cap$  относительно  $\cup$ ;

2)  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  – дистрибутивность  $\cup$  относительно  $\cap$ .

Законы поглощения:

$$1) A \cup (B \cap A) = A;$$

$$2) A \cap (B \cup A) = A.$$

### 3. Разность множеств

**Определение 5.** Разностью двух множеств  $A$  и  $B$  называется новое множество  $\{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ , т.е. в разность множеств  $A$  и  $B$  входят только те элементы из  $A$ , которые не содержатся в  $B$ . Для обозначения операции разности множеств используется специальный символ  $\setminus$ , а разность множеств  $A$  и  $B$  записывается как  $A \setminus B$ .

Диаграмма Венна для разности множеств  $A$  и  $B$  имеет вид:

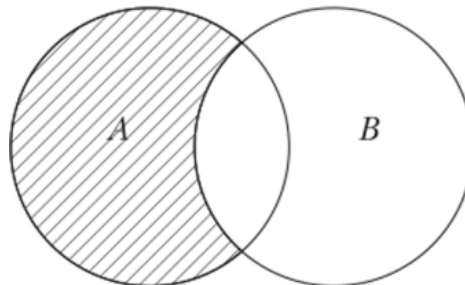


Рис. 1.4. Разность множеств  $A \setminus B$

В определенных случаях приходится рассматривать все возможные элементы или объекты, которые не содержатся в некотором множестве  $A$ . Для такой ситуации разность между универсумом  $U$  и данным множеством  $A$  называется *дополнением* множества  $A$ . Дополнение  $A$  обозначается как  $\bar{A}$ . Диаграмма Венна для дополнения множеств  $A$  имеет вид:

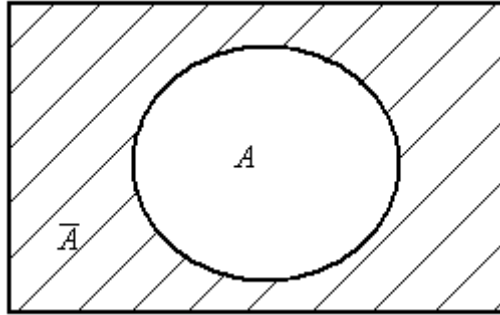


Рис. 1.5. Дополнение множества  $A$

**Пример 5.** Пусть  $A = \{1,2,3,4,5\}$ ,  $B = \{2,4,6,7\}$ . Тогда  $A \setminus B = \{1,3,5\}$ ;  $B \setminus A = \{6,7\}$ .

Свойства разности и дополнения:

- 1)  $\overline{\emptyset} = U$ ;
- 2)  $\overline{U} = \emptyset$ ;
- 3)  $A \setminus \emptyset = A$ ;
- 4)  $\overline{\overline{A}} = A$ ;
- 5)  $\overline{A} \cap A = \emptyset$ ;
- 6)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ;
- 7)  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

Свойства 6 и 7 называют законами де Моргана.

#### 4. Симметрическая разность множеств

**Определение 6.** Симметрической разностью множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству  $A$ , но не принадлежат  $B$  или принадлежат множеству  $B$ , но не принадлежат  $A$ . Симметрическая разность двух множеств  $A$  и  $B$  обозначается  $A \Delta B$ . Это множество всех таких  $x$ , что  $x \in A$ ,  $x \in B$ , за исключением их общих элементов.

$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \in B \text{ и } x \notin A)\}$  или можно записать так:  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Диаграмма Венна для симметрической разности множеств  $A$  и  $B$  имеет вид:

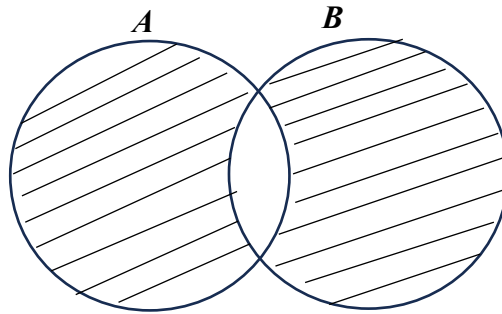


Рис. 1.6. Симметрическая разность двух множеств

Операция симметрической разности множеств обладает следующими свойствами:

1)  $A \Delta B = B \Delta A$ ;

2)  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ ;

3)  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;

4)  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$  – дистрибутивность  $\cap$  относительно  $\Delta$ .

В примере 5 можно видеть, что

$$A \Delta B = \{1,3,5\} \cup \{6,7\} = \{1,3,5,6,7\}.$$

### 5. Произведение множеств

**Определение 7.** Произведением двух множеств  $A$  и  $B$  (декартовым произведением) называется множество  $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$ , т.е. новое множество состоит из всевозможных пар элементов, в которых первая компонента является элементом  $A$ , а вторая – элементом  $B$ .

Для обозначения операции произведения множеств используется специальный символ  $\times$ , а произведение  $A$  и  $B$  обозначается как  $A \times B$ .

Операцию произведения множеств можно продемонстрировать на примере произведения двух подмножеств множества вещественных чисел, представляемых отрезками на числовой оси (рис. 1.7).

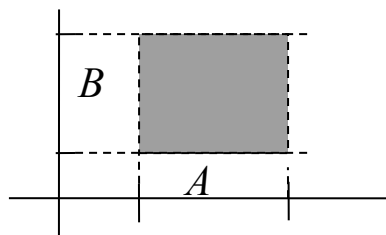


Рис. 1.7. Декартово произведение двух вещественных множеств

Здесь множества  $A$  и  $B$  представлены отрезками числовых осей. Тогда произведение этих множеств – это множество точек плоскости, образующее прямоугольник, проекции которого на оси совпадают с отрезками, представляющими  $A$  и  $B$ .

Множество  $A \times A$  обозначают  $A^2$  и называют декартовым квадратом множества  $A$ . Аналогично определяется степень  $A^n$  для любого натурального  $n$ .

Заметим, что если  $R$  – это множество всех вещественных чисел, то  $R \times R$  или  $R^2$  представляет собой множество всех пар вещественных чисел. Это множество принято отождествлять с двумерной координатной плоскостью.

Соответственно  $R^3$  обозначает множество троек вещественных чисел. Это множество отождествляется с множеством точек в трехмерном пространстве.

Перечислим некоторые простейшие свойства такого произведения:

- 1) если  $A \subset C, B \subset D$ , то  $(A \times B) \subset (C \times D)$ ;
- 2)  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

Отметим, что  $B \times A = A \times B$  тогда и только тогда, когда  $A = B$ .

**Пример 6.** Найдем декартового произведения двух множеств  $A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}$ . По определению  $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$ .

**Пример 7.** Пусть  $A, B, C$  – множества точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям  $x + 2 > y, x^2 + y^2 \leq 4, \{|x| \leq 2, |y| \leq 2\}$  соответственно. Изобразите в системе координат  $xOy$  множество  $D$ , полученное из множеств  $A, B, C$  по формуле  $A \setminus (B \Delta C)$ .

*Решение.*

Множество  $B$  представляет собой множество точек круга радиуса 2 с центром в начале координат, включая границу,  $A$  – множество точек плоскости, расположенных выше и на прямой  $y = x + 2$ ,  $C$  – множество точек, лежащих внутри и на границе квадрата  $\{|x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ . Отметим горизонтальной штриховкой множество  $(B \Delta C)$ , а вертикальной – множество  $A$ . Для изображения результирующего множества удалим из области, помеченной вертикальной штриховкой, точки области, помеченные горизонтальной штриховкой.

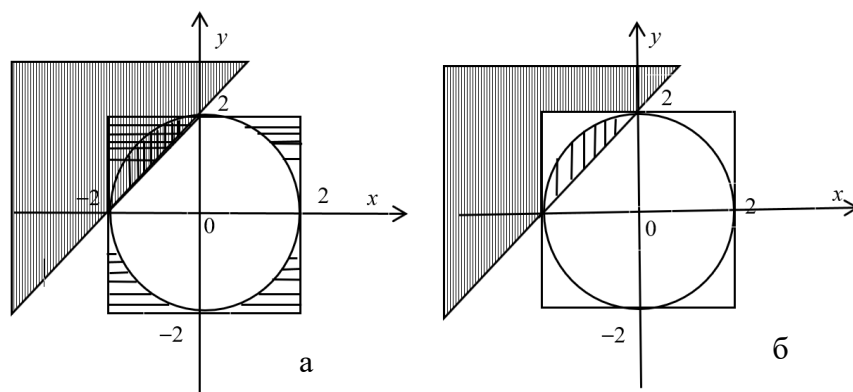


Рис. 1.8. Заштриховано множество точек плоскости, принадлежащих:  
 а) множествам  $(B \Delta C)$  и  $A$ ; б) множеству  $A \setminus (B \Delta C)$

Характеристика множеств, представляющая количество содержащихся в них элементов, называется *мощностью множеств*.

Если некоторое множество  $A$  содержит конечное число элементов, то его мощность равна числу элементов этого множества. Для бесконечных множеств понятие мощности требует уточнения.

В общем случае понятие мощности произвольных множеств определяется через их равномощность.

**Определение 8.** Множества  $A$  и  $B$  называются равномощными, если их элементы можно поставить во взаимно однозначное соответствие.

То есть можно определить такое множество пар  $(a, b)$ , первая компонента которых принадлежит  $A$ , а вторая компонента принадлежит  $B$ . При этом для каждого  $a \in A$  существует одна пара, первая компонента которой равна  $a$ . Аналогично для каждого элемента  $b \in B$  существует одна пара, вторая компонента которой равна  $b$ .

**Определение 9.** Мощностью множества  $A$  называется семейство всех множеств, равномощных  $A$ .

Поскольку всякое множество равномощно самому себе, то мощность всякого множества является непустым семейством. Поэтому мощность – реальная характеристика всякого множества. Мощность произвольного множества  $A$  обозначается символически как  $|A|$ .

Множество  $A$  – *конечно*, если оно пустое или равномощно некоторому началу  $\{1, 2, \dots, k\}$  множества натуральных чисел  $N$ . Для непустого конечного множества  $A$ , состоящего из  $k$  элементов, принято использовать число  $k$  в качестве обозначения мощности этого множества. Мощность пустого множества считается равной нулю.

Множество  $A$  называется *счетно-бесконечным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел  $N$ . Множество  $A$  называется *счетным*, если оно конечно или счетно-бесконечно. Счетность множества означает, что его элементы можно последовательно пересчитать подобно тому, как могут быть пересчитаны все элементы множества натуральных чисел. Для этого достаточно организовать пересчет  $N$ , при котором для каждого натурального числа указывается соответствующий ему элемент счетного множества  $A$ .

Нетрудно убедиться в том, что объединение и пересечение всякого конечного числа счетных множеств также является счетным множеством.

## 1.2. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Множества, элементами которых являются числа, будем называть *числовыми*. Самые естественные числа – натуральные (обозначается  $N$ ): такими можно посчитать естественные объекты в натуральном смысле – к примеру: 7 деревьев, 4 моря, 2 птицы и т.п.

Зададим множество натуральных чисел посредством последовательного прибавления единицы к предыдущему элементу:

$$N: 1+1+1+1\dots$$

Однако такой способ задания множества натуральных чисел оказывается некорректным. К примеру, он точно не противоречит случаю, когда к параметру прибавим единицу либо к  $1/3$  прибавим единицу. Контрпримеров можно привести много.

Рассуждая над тем, как же формализовать задание множества натуральных чисел, в научном сообществе был предложен

аксиоматический подход. Рассмотрим аксиомы Пеано, положенные в основу формального задания множества  $N$ .

### Аксиомы Пеано

1. Существует единственный элемент «1», до которого во множестве  $N$  нет определенных элементов.

2. Если  $n \in N$ , то всегда можно найти  $(n + 1)$  – следующий элемент.

3. Для любого  $n \neq 1$  всегда можно найти  $(n - 1)$  – предыдущий элемент.

Аксиом Пеано недостаточно для того, чтобы организовать множество, поскольку не всегда получится однозначно ответить на вопрос о принадлежности какого-то элемента конкретному множеству.

Например, не противоречит аксиомам Пеано то, что множество

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n \begin{array}{l} \nearrow n+1, n+2, \dots \\ \searrow n+1, n+2, \dots \end{array} \}$$

можно считать множеством натуральных чисел. Хотя понятно, что в этом есть абсурд и нет истины.

*Замечание.* Отметим, что любое множество обладает набором свойств. Числовое множество в этом смысле – не исключение: для любого существует как набор общих свойств, так и специфических. Эти свойства влияют как на само множество, так и на регламентированные действия над элементами множеств. Например: рассмотрим множество рациональных чисел

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in Z \setminus \{0\} \right\}, \text{ тогда } \forall a, b, c \in Q \Rightarrow$$

1.  $\forall a, b \in Q$  можно однозначно сказать, каким соотношением они связаны ( $>$ ,  $<$ ,  $=$ ), причём для каждой пары это будет только одно соотношение, т.е. существует правило упорядочивания элементов.

2.  $\forall a, b \in Q \exists F: (a, b) \rightarrow c; a + b = c; a + b \in Q; c \in Q$  – правило суммы.

3.  $\forall a, b \in Q \exists F: (a, b) \rightarrow c; a \cdot b = c; a \cdot b \in Q; c \in Q$  – правило произведения.

4. Если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$  – правило транзитивности.

5.  $\forall a, b \in Q: a + b = b + a$  – правило коммутативности.

6.  $\forall a, b \in Q: (a + b) + c = a + (b + c)$  – правило ассоциативности.

7.  $\forall a, b \in Q: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .

8.  $(a + b) \cdot c = a \cdot b + a \cdot c$ .

9.  $\forall a, b \in Q \Rightarrow \exists a^*: a + a^* = 0$ ,  $a^*$  – противоположный элемент.

10.  $\forall a, b \in Q \Rightarrow \exists 0: a + 0 = a$ .

11.  $\forall a, b \in Q \Rightarrow \exists a^{-1}: a \cdot a^{-1} = 1$ .

12.  $\forall a, b \in Q \Rightarrow \exists 1: a \cdot 1 = a$ .

13. *Аксиома Архимеда*: любому  $a$  можно прибавить 1 столько раз, чтобы результат стал больше  $a$ .

14. Если  $a > c$ , то  $a + b > c + b$ ;  $a \cdot b > b \cdot c$ .

Однако множества  $Q$  с введенными операциями и определениями оказывается недостаточно для решения большинства задач.

Наряду со множеством, к неопределяемым, но достаточно важным понятиям относят понятие точки, в том числе точки на вещественной прямой.

**Определение 10.** Определим числовую ось как прямую с определённой на ней точкой 0, выбранным направлением роста значений и единицей.

Объединение рациональных и иррациональных чисел даёт возможность отметить любую точку на числовой оси.

Заметим справедливость **утверждения**: всякому действительному числу можно сопоставить точку на числовой оси. Верно и обратное.

Множество действительных чисел  $R$ , дополненное символами  $\infty$  и  $-\infty$ , обозначается  $\bar{R}$  и называется расширенным множеством действительных чисел, бесконечности  $\infty$  и  $-\infty$  называются бесконечно удаленными точками числовой прямой, остальные точки – конечными точками числовой прямой.

В аксиоматической теории действительного числа для любого числа  $x$  число, обозначаемое  $|x|$  и определяемое по правилу  $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ , называется *абсолютной величиной* числа  $x$  или его *модулем*.

**Определение 11.** Окрестностью точки  $x_0$  числовой оси называют  $U(x_0)$  – множество таких точек  $x$ , что  $U(x_0) = \{x: |x| < x_0\}$ .

**Определение 12.**  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $x_0$  называют множество  $U_\varepsilon(x_0) = \{x: |x - x_0| < \varepsilon\}$ .

Для всякой точки окрестности можно определить, является ли она:

- 1) внутренней  $\Leftrightarrow$  существует  $U(x) : U(x) \subset U(x_0)$ ;
- 2) граничной  $\Leftrightarrow$  любая  $U(x)$  такая, что в ней содержатся точки, как принадлежащие окрестности  $x_0$ , так и не принадлежащие ей;
- 3) внешней  $\Leftrightarrow$  существует хотя бы одна  $U(x) \not\subset U(x_0)$ .

**Определение 13.** Множество  $X$  называется упорядоченным множеством, если для любых двух его элементов  $a$  и  $b$  определено одно из трех отношений:  $a < b$ ,  $a = b$  и  $a > b$ , причем, если  $a < b$  и  $b < c$ , то  $a < c$ .

Примером упорядоченного множества является множество действительных чисел.

**Определение 14.** Пара непустых подмножеств  $A$  и  $B = X \setminus A$  упорядоченного множества  $X$  называется его сечением и обозначается  $A|B$ , если любой элемент из  $A$  меньше любого элемента из  $B$ .

То есть каждое множество, образующее сечение, содержит хотя бы один элемент, эти множества не содержат общих элементов и, если  $a \in A$  и  $b \in B$ , то  $a < b$ . Множество  $A$  будем называть *нижним классом*, а множество  $B$  – *верхним классом* сечения. Самыми простыми примерами сечений являются сечения, полученные следующим образом: возьмем какое-либо число  $\alpha$  и положим  $A = \{x | x < \alpha\}$ ,  $B = \{x | x \geq \alpha\}$ . Легко видеть, что эти множества не пусты, не пересекаются и если  $a \in A$  и  $b \in B$ , то  $a < b$ , поэтому множества  $A$  и  $B$  образуют сечение.

Аналогично можно образовать сечение множествами  $A = \{x | x \leq \alpha\}$ ,  $B = \{x | x > \alpha\}$ .

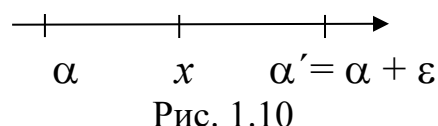
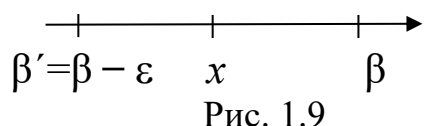
**Определение 15.** Множество  $X \subset R$  называется *ограниченным сверху*, если существует такое число  $b \in R$ , что для всех  $x \in X$  имеет место неравенство  $x \leq b$ . Число  $b$  называется в этом случае числом, *ограничивающим сверху* множество  $X$ . Очевидно, что такое число может быть не единственным.

**Определение 16.** Множество  $X$  называется *ограниченным снизу*, если существует такое число  $a \in R$ , что для всех  $x \in X$  выполняется неравенство  $x \geq a$ . Число  $a$  называется в этом случае числом, *ограничивающим снизу* множество  $X$ . Множество, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным*.

Пусть числовое множество  $X$  ограничено сверху. Наименьшее среди всех чисел, ограничивающих сверху множество  $X \subset R$ , называется его *верхней гранью* и обозначается  $\sup X$  (от лат. *supremum* – наибольший). Если числовое множество  $X$  ограничено снизу, то наибольшее среди всех чисел, ограничивающих снизу множество  $X$ , называется его *нижней гранью* и обозначается  $\inf X$  (от лат. *infimum* – наименьший). Итак,  $\beta = \sup X$ , если, во-первых, число  $\beta$  ограничивает сверху множество  $X$ , т. е. для всех  $x \in X$  выполняется неравенство  $x \leq \beta$ , а, во-вторых, число  $\beta$  является наименьшим среди всех чисел, ограничивающих сверху множество  $X$  (т. е. если  $\beta' < \beta$ , то число  $\beta'$  уже не ограничивает сверху множество  $X$ , а это означает, что существует такое  $x \in X$ , что  $x > \beta'$ ). Таким образом, определение верхней грани можно перефразировать в следующем виде:

Число  $\beta$  называется *верхней гранью числового множества  $X$* , если:

- 1) для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $x \leq \beta$ ;
- 2) для любого  $\beta' < \beta \exists$  такой  $x \in X$ , что  $x > \beta'$  (рис. 1.9).



Аналогично число  $\alpha$  называется *нижней гранью числового множества  $X$* , если:

- 1) для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $x \geq \alpha$ ;
- 2) для любого  $\alpha' > \alpha \exists$  такой  $x \in X$ , что  $x < \alpha'$  (рис. 1.10).

Если во втором условии положить  $\varepsilon = \beta - \beta'$  (соответственно  $\varepsilon = \alpha' - \alpha$ ), то это условие можно перефразировать следующим образом: для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой  $x \in X$ , что  $x > \beta - \varepsilon$  (соответственно  $x < \alpha + \varepsilon$ ).

**Пример 8.** Пусть  $a \in R$  и  $b \in R$ ,  $a \leq b$ , тогда  $\sup [a, b] = \sup (a, b) = b$ ,  $\inf [a, b] = \inf (a, b) = a$ .

**Теорема (об ограниченности числовых множеств)**

Пусть  $X$  – непустое числовое множество, ограниченное сверху. Тогда существует  $\sup X$ .

*Доказательство.*

Пусть  $A$  – непустое ограниченное сверху множество. Рассмотрим непустое множество  $B$ , элементами которого являются все числа  $b$ , ограничивающие множество  $A$  сверху.

Тогда  $\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a \leq b$ .

Из аксиомы непрерывности [25] следует, что для некоторого  $c \in R \forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a \leq c \leq b$ . Покажем, что существует  $\sup A = c$ . Первое условие из определения верхней грани выполнено для  $c$  в силу того, что  $\forall a \in A \Rightarrow a \leq c$ .

Покажем, что выполняется и второе условие. Пусть  $c' < c$ . Тогда  $c' \notin B$ , так как  $\forall b \in B \Rightarrow c \leq b$ . Следовательно,  $c'$  не ограничивает множество  $A$  сверху, т. е.  $\exists x \in A : x > c'$  и второе условие также выполнено. Следовательно,  $c = \sup A$ , теорема доказана.

Множество натуральных чисел  $N$  является примером ограниченного снизу множества. Если  $a \in R$  и  $b \in R$ , то отрезок  $[a, b]$  представляет собой ограниченное множество. Множества рациональных и иррациональных чисел дают примеры неограниченных множеств.

Рассмотрим четыре свойства верхних и нижних граней множеств, связанных с арифметическими операциями над числовыми множествами.

1.  $\sup(X_1 + \dots + X_n) = \sup(X_1) + \dots + \sup(X_n)$ ,  $\inf(X_1 + \dots + X_n) = \inf(X_1) + \dots + \inf(X_n)$ .

2.  $\sup(X - Y) = \sup(X) - \inf(Y)$ .

3. Если  $\lambda \geq 0$ , то  $\sup \lambda X = \lambda \sup X$ ,  $\inf \lambda X = \lambda \inf X$ . А если  $\lambda < 0$ , то  $\sup \lambda X = \lambda \inf X$ ,  $\inf \lambda X = \lambda \sup X$ .

4. Если все числа, входящие в множества  $X$  и  $Y$ , неотрицательны, то  $\sup XY = \sup X \cdot \sup Y$ ,  $\inf XY = \inf X \cdot \inf Y$ .

**Пример 9.** Доказать, что всякое непустое числовое множество, ограниченное снизу, имеет нижнюю грань, а всякое

непустое числовое множество, ограниченное сверху, имеет верхнюю грань.

*Доказательство.*

Обозначим само числовое множество за  $X$ . Множество верхних границ будем обозначать за  $\{M\}$ .

Рассмотрим два случая:

- 1) у множества  $x$  есть наибольший элемент;
- 2) у множества  $x$  нет наибольшего элемента.

*Случай 1*

Итак, во множестве  $X$  есть наибольший  $x'$ . По определению это означает, что  $\forall x \in X: x \leq x'$ . Так как  $x'$  не меньше любого элемента из  $X$ , то он же является одной из верхних границ множества  $X$ .

Докажем, что он является точной верхней гранью множества  $X$ :  $x' = \sup X$ . Докажем от противного. Пусть  $x'$  не наименьшая верхняя граница, значит, существует  $x'' < x'$ . Так как  $x''$  – верхняя граница, то он должен быть не меньше любого элемента из  $X$ , в том числе не меньше  $x'$ , так как  $x' \in X$ :

Получаем два противоречащих неравенства:  $x'' < x'$  и  $x' \leq x''$ . То есть  $x''$  одновременно строго меньше и не меньше  $x'$ . Получили противоречие, а значит верно исходное предположение.

Итак, мы доказали, что  $x' = \sup X$ . Доказательство существования верхней грани для второго случая и нижней грани проведите самостоятельно.

**Предельная точка множества. Теорема Больцано-Вейерштрасса.**

Пусть  $E$  – множество, расположенное на числовой оси, и точка  $c \in E$ . Любой интервал, содержащий точку  $c$ , будем называть окрестностью точки  $c$ .

Интервал  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$ , будем называть  $\varepsilon$  – окрестностью точки  $c$  и символически обозначать  $U(c, \varepsilon)$ .

Если  $x \in U(c, \varepsilon)$ , то это равносильно неравенству  $|x - c| < \varepsilon$ .

**Определение 17.** Точка  $x_0$  называется *предельной точкой множества  $E$* , если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку множества  $E$ , отличную от точки  $x_0$ .

Заметим, что сама точка  $x_0$  может принадлежать, а может и не принадлежать множеству  $E$ .

Если точка  $x_0 \in E$ , но не является предельной, то она называется *изолированной*. Иначе говоря, точка  $x_0$  называется изолированной точкой этого множества, если существует окрестность точки  $x_0$ , не содержащая точек множества  $E$ , отличных от  $x_0$ .

**Теорема 1.** Если  $x_0$  – предельная точка множества  $E$ , то любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек  $E$ .

*Доказательство.*

Предположим противное. Пусть  $x_0$  – предельная точка, а некоторая ее окрестность содержит конечное множество точек  $E$ , отличных от  $x_0$ . Обозначим их  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

Пусть  $\varepsilon = \min_{i=1,k} |x_0 - x_i|$ . Тогда  $\varepsilon$  – окрестность точки  $x_0$  не будет содержать ни одной точки множества  $E$ , отличной от  $x_0$  и, следовательно, точка  $x_0$  не будет предельной.

В определении предельной точки требовалось, чтобы в любой ее окрестности нашлась хотя бы одна точка множества  $E$ , отличная от точки  $x_0$ .

Из этого требования вытекает, что в действительности в любой окрестности предельной точки будет бесконечно много точек множества  $E$ . Отсюда следует, что конечные точечные множества предельных точек не имеют.

**Пример 10.** Приведем пример предельных и изолированных точек.

Пусть  $E = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \right\}$ , где  $n \in N$  (рис. 1.11).

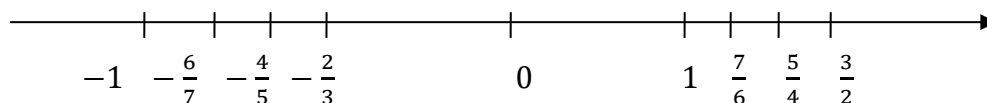


Рис. 1.11.

Множество  $E$  имеет две предельные точки  $x_0=1, x_1= -1$ . Обе они не принадлежат  $E$ . Точки множества  $E$  «сгущаются» у точек 1 и  $-1$  (поэтому предельные точки множества  $E$  часто называют точками сгущения множества  $E$ ).

Точка 0 (как и все точки  $E$ ) – изолированная точка. Заметим, что все остальные точки множества  $E$ , будут изолированными.

В рассмотренном примере точка  $x_0 = -1$  является нижней гранью (она не принадлежит  $E$ , но является для  $E$  предельной), а верхней гранью является точка  $x_2 = 3/2$ , которая принадлежит  $E$ , но не является для  $E$  предельной.

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Если верхняя (нижняя) грань не принадлежит множеству, то она является для этого множества предельной точкой.

Для доказательства этой теоремы достаточно сопоставить определения верхней (нижней) грани и предельной точки.

Множество предельных точек множества  $E$  принято обозначать через  $E'$ .

Точки множества  $E$  и его предельные точки принято называть точками прикосновения для множества  $E$ , а их совокупность обозначают через  $\bar{E}$ . Очевидно,  $\bar{E} = E' \cup E$ ,  $E' \subset \bar{E}$ ,  $E \subset \bar{E}$ ,  $\bar{E} \setminus E \subset E'$ .

**Теорема Кантора.** Для последовательности отрезков таких, что каждый следующий вложен в предыдущий  $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$  существует число, принадлежащее всем отрезкам.

Нетрудно видеть, что если в теореме Кантора отрезки стягиваются, то число  $c$ , о котором говорится в теореме, единственное. Действительно, если предположить, что таких числа два  $c$  и  $d$ , то мы приходим к неравенству  $|c - d| \leq b_n - a_n < \varepsilon$ . Так как  $\varepsilon$  – любое положительное число, то неравенство  $|c - d| < \varepsilon$  справедливо лишь в случае, если  $|c - d| = 0$ . Отсюда следует, что  $c = d$ . Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

Для открытых и полуоткрытых промежутков утверждение теоремы Кантора, вообще говоря, неверно.

Следующая теорема устанавливает класс бесконечных множеств, имеющих предельные точки.

**Теорема 3 (Больцано–Вейерштрасса).** Всякое бесконечное ограниченное множество имеет хотя бы одну предельную точку.

*Доказательство.*

Так как  $E$  ограничено, то можно указать отрезок  $[a, b]$ , содержащий множество  $E$ . Возьмем значение  $c = \frac{a+b}{2}$ . Тогда хотя бы один из отрезков  $[a, c]$  или  $[c, b]$  содержит бесконечное

множество точек  $E$ . Обозначим его через  $[a_1, b_1]$ . Отрезок  $[a_1, b_1]$  вновь разделим пополам и обозначим через  $[a_2, b_2]$  ту половину, которая содержит бесконечное множество точек  $E$ . Продолжая процесс, мы получим бесконечную последовательность вложенных отрезков  $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ , каждый из которых содержит бесконечное множество точек  $E$ . Так как длина отрезка  $[a_n, b_n]$  равна  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ , то для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется  $n_0 \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n > n_0$  разность  $b_n - a_n < \varepsilon$ .

Следовательно, по теореме Кантора существует единственная точка  $x_0$ , общая точка для всех отрезков  $[a_n, b_n]$ .

Докажем теперь, что точка  $x_0$  предельная точка множества  $E$ . Рассмотрим произвольный интервал  $(\alpha, \beta)$ , содержащий точку  $x_0$ . При достаточно большом  $n$   $[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta)$ . Так как отрезок  $[a_n, b_n]$  содержит бесконечное множество точек  $E$ , то и интервал  $(\alpha, \beta)$  содержит бесконечное множество точек  $E$ . Значит, точка  $x_0$  — предельная для множества  $E$ .

Итак, отметим:

- 1) Множество  $E$  может иметь не одну предельную точку.
- 2) Предельная точка может и не принадлежать множеству  $E$ .
- 3) Оба условия теоремы существенны.

### Принцип Архимеда

Принцип Архимеда для действительных чисел состоит в следующем.

**Теорема.** Каково бы ни было действительное число  $a$ , существует такое натуральное число  $n$ , что  $n > a$ , т.е.  $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}: n > a$ .

**Следствие 1.** Для любого числа  $x \in \mathbb{R}$  существует и притом единственное число  $k \in \mathbb{Z}$  такое, что  $k \leq x < k+1$ .

Указанное число  $k$  обозначается  $[x]$  и называется целой частью числа  $x$ . Величина  $\{x\} = x - [x]$  называется дробной частью числа  $x$ . Итак,  $x = [x] + \{x\}$ , причем  $\{x\} \geq 0$ .

**Следствие.** Каковы бы ни были числа  $a$  и  $b$ ,  $0 < a < b$ , существует такое натуральное число  $n$ , что  $na > b$ .

Это утверждение имеет простой геометрический смысл: если взять два отрезка соответственно длины  $a$  и  $b$ ,  $0 < a < b$ , то, последовательно откладывая на большем отрезке от одного из его концов меньший отрезок, мы через конечное число шагов выйдем за пределы большого отрезка (рис.1.12).

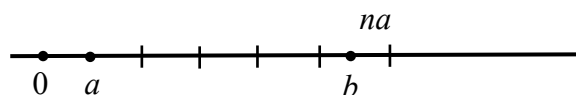


Рис. 1.12

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Выполните операции над множествами.

№	Дано	Найти
1	а) $A, B \subseteq Z, A = \{1;2;5;7;9;11\}, B = \{1;4;6;7\};$ б) $A, B \subseteq R, A = [-3; 7), B = [-4; 4].$	$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{B}, B \setminus A$
2	а) $A, B \subseteq Z, A = \{3;6;7;10\}, B = \{2;3;10;12\};$ б) $A, B \subseteq R, A = [1;6), B = [-1;9].$	$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{B}, B \setminus A$
3	а) $A, B \subseteq Z, A = \{1;2;5;7;9;11\}, B = \{1;4;6;7\}$ б) $A, B \subseteq R, A = [4; 7), B = [3; 6]$	$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{B}, B \setminus A$
4	а) $A, B \subseteq Z, A = \{0;4;6;7\}, B = \{-3;3;7\};$ б) $A, B \subseteq R, A = [-15;0), B = [-2;1].$	$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{B}, B \setminus A$
5	а) $A, B \subseteq Z, A = \{0;9\}, B = \{-6;0;3;9\};$ б) $A, B \subseteq R, A = [-10; 5), B = [-1; 6].$	$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{B}, B \setminus A$
6	а) $A, B \subseteq Z, A = \{1;7;9;17\}, B = \{-2;1;9;10;25\};$ б) $A, B \subseteq R, A = [4;9), B = [3;7].$	$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{B}, B \setminus A$
7	а) $A, B \subseteq Z, A = \{-1;0;9;17\}, B = \{-1;1;9;10;25\};$ б) $A, B \subseteq R, A = [-4;9), B = [-5;7].$	$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{B}, B \setminus A$

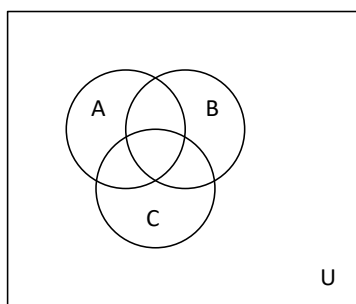
8	а) $A, B \subseteq Z, A = \{1;2;9;37\},$ $B = \{-1;1;9;11;15\};$ б) $A, B \subseteq R, A = [-8;1), B = [-5;7].$	$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{B},$ $B \setminus A$
9	а) $A, B \subseteq Z, A = \{-1;0;2;10\},$ $B = \{-1;2;9;10\};$ б) $A, B \subseteq R, A = [-10;9), B = [-5;15].$	$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{B},$ $B \setminus A$
10	а) $A, B \subseteq Z, A = \{0;6;9\},$ $B = \{-6;0;3;7\};$ б) $A, B \subseteq R, A = [-8;3), B = [2;16].$	$A \cap B, A \cup B, A \setminus B, \bar{B},$ $B \setminus A$

Задание 2. На координатной плоскости  $Oxy$  укажите множества  $A, B, C$  и постройте множество  $D$ .

№	УСЛОВИЯ		№	УСЛОВИЯ	
1	A	$x^2 + y^2 - 6y \leq 0$	2	A	$x^2 + y^2 - 25 \leq 0$
	B	$y + x^2 + 1 \geq 0$		B	$y - \frac{4}{x} \leq 0$
	C	$ x  \leq 6; -3 \leq y \leq 2$		C	$ x  \leq 1,  y  \leq 1$
	D	$(A \cup B) \Delta C$		D	$(A \cap B) \setminus C$
3	A	$0 \leq y \leq \sqrt{x}$	4	A	$ x  \leq 5,  y  \leq 1$
	B	$2 \leq x \leq 6,$ $-3 \leq y \leq -2$		B	$ x  \leq 1,  y  \leq 5$
	C	$x^2 + y^2 - 18x \leq 0$		C	$x^2 + y^2 - 16 \leq 0$
	D	$(A \cup B) \setminus C$		D	$A \cup B \cup C$
5	A	$y - x^2 - 1 \leq 0$	6	A	$y - \frac{4}{x} \leq 0$
	B	$y - x^3 + 3 \geq 0$		B	$y - \frac{4}{x} \geq 0$
	C	$x > 0$		C	$x^2 + y^2 - 25 \leq 0$
	D	$(A \cap B) \setminus C$		D	$(A \cap B) \setminus C$
7	A	$x^2 + y^2 - 4x \leq 0$	8	A	$y - x^4 - 1 \leq 0$
	B	$x^2 + y^2 + 4x \leq 0$		B	$0 \leq y \leq \sqrt{x}$

	$C$	$ x  \leq 2,  y  \leq 2$		$C$	$x^2 + y^2 - 4x \leq 0$
	$D$	$(A \cup B) \Delta C$		$D$	$(A \cap B) \Delta C$
9	$A$	$x^2 + y^2 - 25 \leq 0$	10	$A$	$x^2 + y^2 - 6y \leq 0$
	$B$	$y - \frac{4}{x} \leq 0$		$B$	$y + x^2 + 1 \geq 0$
	$C$	$ x  \leq 1,  y  \leq 1$		$C$	$ x  \leq 6; -3 \leq y \leq 2$
	$D$	$(A \cap B) \Delta C$		$D$	$(A \cap B) \setminus C$

Задание 3. Даны три множества  $A, B, C$  такие, что на диаграмме Венна они изображаются следующим образом:



Необходимо изобразить на диаграммах Венна следующие множества.

№	1	2	3
1	$\overline{B} \cup A \cap \overline{C}$	$(\overline{A} \setminus (C \cup B)) \Delta (B \setminus \overline{C})$	$(\overline{B} \setminus C \Delta A) \cap (\overline{A} \cup B)$
2	$(A \cup B) \cap C$	$(A \cup (B \setminus C)) \cap (C \Delta A)$	$\overline{(C \cup B \setminus B \Delta A)} \cap \overline{A}$
3	$(A \cap B) \setminus C$	$(\overline{A \cup D}) \Delta (\overline{B \cap C \cap E})$	$(\overline{B} \Delta \overline{A} \cap B) \Delta (\overline{A} \cup B)$
4	$(A \cup B) \Delta C$	$(C \cup \overline{B} \cap \overline{A}) \Delta (\overline{B \setminus A})$	$(\overline{C} \cap (\overline{A} \Delta B)) \setminus \overline{B}$
5	$(A \cap B) \Delta C$	$(A \cup \overline{B \cup E}) \setminus (\overline{D} \Delta \overline{C})$	$(B \cup \overline{A} \cap \overline{C}) \Delta (\overline{C} \setminus A)$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Что называют множеством?
2. Охарактеризуйте способы задания множеств.
3. Задайте пустое множество.
4. Сформулируйте определения равенства и включения для двух множеств.

5. Назовите множество, которое является подмножеством любого множества.
6. Что называют универсальным множеством?
7. Дайте определение и графическую интерпретацию объединения множеств.
8. Дайте определение и графическую интерпретацию пересечения множеств.
9. Дайте определение и графическую интерпретацию разности множеств.
10. Дайте определение и графическую интерпретацию симметрической разности множеств.
11. Дайте определение и графическую интерпретацию дополнения множества до универсального.
12. Какие из операций над множествами обладают свойством коммутативности?
13. Какие из операций над множествами обладают свойством ассоциативности?
14. Какие из операций над множествами обладают свойством идемпотентности?
15. Для каких операций над множествами выполняется закон дистрибутивности?
16. Какими свойствами обладает операция дополнения множества до универсального?
17. Какие основные числовые множества вы знаете?
18. Что такое натуральные числа? Приведите примеры. Как обозначается множество натуральных чисел?
19. Что такое целые числа? Приведите примеры. Как обозначается множество целых чисел?
20. Что такое рациональные числа? Приведите примеры. Как обозначается множество рациональных чисел?
21. Что такое иррациональные числа? Приведите примеры.
22. Что такое действительные числа? Как обозначается множество действительных чисел?
23. Какие числа можно назвать точной верхней (нижней) гранью числового множества?
24. Какое множество называется ограниченным?
25. Что такое нижняя и верхняя грани множества?

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

### 2.1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Переход от общих утверждений к частным называется *дедукцией*, а переход от частных утверждений к общим – *индукцией*. Индукция может привести как к верным, так и к неверным выводам. Поясним это на примере.

Рассмотрим частное утверждение: «140 делится на 5» и общее утверждение: «все числа, оканчивающиеся нулем, делятся на 5». Из частного утверждения получено общее и оно верно. А теперь изменим общее утверждение: «все трехзначные числа делятся на 5». В этом случае вывод общего из частного неверен.

Дело в том, что мы высказали общее утверждение относительно любого числа только на основании того, что оно оказалось верным только для некоторых значений чисел. Тогда возникает вопрос, как из нескольких справедливых частных случаев определить, верно ли общее утверждение. Этот вопрос удается решить с помощью особого метода рассуждений, основанного на *аксиоматике математической индукции*: пусть имеются некоторые утверждения  $A_1, A_2, \dots, A_m, \dots, A_n$ , зависящие от натурального  $n$ . Если утверждение истинно при  $n = 1$  и из истинности его при каком-то произвольном натуральном  $n = k$  следует его справедливость и при следующем номере, равном  $(k + 1)$ , то данное утверждение верно для всех натуральных  $n$ .

Способ доказательства математических утверждений с помощью аксиоматики математической индукции называется *методом математической индукции*, который состоит в следующем:

1. Проверяют истинность утверждения при  $n = 1$  – первый шаг доказательства (первый индукционный шаг или *база индукции*).

2. Допускают, что утверждение справедливо при  $n = k$ , где  $k$  – произвольное натуральное число ( $k \in \mathbb{N}$ ), и доказывают, что тогда утверждение верно и при  $n = k + 1$  – второй шаг доказательства (второй *индукционный шаг*).

Если обе части доказательства проведены, то на основании принципа математической индукции утверждение истинно для всех натуральных  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) – вывод. В самом деле, если утверждение справедливо при  $n = 1$ , то по доказанному в шаге 2 оно верно и при  $n = 1 + 1 = 2$ .

Далее из того, что оно верно при  $n = 2$ , вытекает его справедливость при  $n = 2 + 1 = 3$ . Затем от  $n = 3$  переходят к  $n = 4$  и т.д. Ясно, что при этом рано или поздно мы доберемся до любого натурального числа  $n$ , а потому данное утверждение истинно для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Принцип математической индукции равносильен следующему свойству натуральных чисел.

**Принцип наименьшего числа.** В любом непустом множестве натуральных чисел есть наименьшее. В пустом множестве нет ни одного элемента, так что для него принцип наименьшего числа нарушается.

Метод математической индукции применяется во многих областях математики. Рассмотрим несколько примеров.

1. **Доказательство формул.** Например, как в примере с суммой первых  $n$  чисел, индукцию можно использовать для доказательства формул сумм квадратов, кубов и других последовательностей.

2. **Доказательство свойств прогрессий.** Например, индукцию можно применять к арифметическим и геометрическим прогрессиям.

3. **Доказательство свойств геометрических фигур.** Можно использовать индукцию для доказательства теорем в планиметрии и стереометрии.

## 2.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

### Доказательство равенств

**Пример 1.** Доказать, что для всех натуральных  $n$  верно равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (2.1)$$

*Доказательство.*

1. Проверим, выполняется ли равенство при  $n = 1$ . В этом случае левая часть этого равенства принимает вид  $1^3 = 1$ , а его правая часть принимает вид  $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ , значит, при  $n = 1$  равенство верное.

2. Обозначим левую часть равенства  $S_n: S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ . Допустим, что исходное равенство (2.1) является истинным при каком-то произвольном  $n = k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), т.е. что верно равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \text{ или } S_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4}.$$

Докажем, что тогда исходное равенство верно при  $n = k + 1$ , т.е. что справедливо равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \text{ или } S_{k+1} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Рассмотрим левую часть равенства и распишем  $k$ -е слагаемое в этой сумме

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k+1)^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k + (k+1)^3 = \\ & \text{(по предположению сумма первых } k \text{ слагаемых равна } S_k = \frac{k^2(k+1)^2}{4}) \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказали, что равенство (2.1) верно при  $n = 1$  и из истинности его при каком-то произвольном натуральном  $n = k$  следует его справедливость и при следующем  $n = k+1$ . В силу принципа математической индукции это означает справедливость для всех натуральных  $n$ .

**Пример 2.** Доказать, что для всех натуральных  $n$  верно равенство

$$\frac{1}{2} 2! + \frac{2}{2^2} 3! + \frac{3}{2^3} 4! + \dots + \frac{n}{2^n} (n+1)! = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2 \quad (2.2)$$

*Доказательство.*

1. Обозначим левую часть равенства через  $S_n$ :

$$S_n = \frac{1}{2} 2! + \frac{2}{2^2} 3! + \frac{3}{2^3} 4! + \dots + \frac{n}{2^n} (n+1)!$$

Проверим справедливость исходного равенства (2.2) при  $n = 1$ . Левая часть равенства принимает вид  $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2!$ , правая часть равна  $\frac{(1+2)!}{2^1} - 2 = \frac{3!}{2} - 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2} - 2 = 3 - 2 = 1$ .

Левая часть равенства (2.2) равна правой части равенства. Значит исходное равенство равно при  $n = 1$ .

2. Допустим, что исходное равенство верно при  $n = k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

$$\frac{1}{2} 2! + \frac{2}{2^2} 3! + \frac{3}{2^3} 4! + \dots + \frac{k}{2^k} (k+1)! = \frac{(k+2)!}{2^k} - 2,$$

т.е.  $S_k = \frac{(k+2)!}{2^k} - 2$ , и докажем, что равенство (2.2) верно при  $n = k+1$ ,

т.е. докажем, что выполняется равенство

$$\frac{1}{2} 2! + \frac{2}{2^2} 3! + \frac{3}{2^3} 4! + \dots + \frac{k+1}{2^{k+1}} (k+2)! = \frac{(k+3)!}{2^{k+1}} - 2 \text{ или } S_{k+1} = \frac{(k+3)!}{2^{k+1}} - 2.$$

Рассмотрим левую часть последнего равенства

$$S_{k+1} = \frac{1}{2} 2! + \frac{2}{2^2} 3! + \frac{3}{2^3} 4! + \dots + \frac{k+1}{2^{k+1}} (k+2)! =$$

(распишем  $k$ -е слагаемое в этой сумме)

$$= \frac{1}{2} 2! + \frac{2}{2^2} 3! + \frac{3}{2^3} 4! + \dots + \frac{k}{2^k} (k+1)! + \frac{k+1}{2^{k+1}} (k+2)! =$$

(сумма первых  $k$  слагаемых равна  $S_k = \frac{(k+2)!}{2^k} - 2$ )

$$= S_k + \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot (k+2)! = \frac{(k+2)!}{2^k} - 2 + \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot (k+2)! = \frac{(k+2)!}{2^{k+1}} (2 + k + 1) - 2 =$$

$$= \frac{(k+2)!(k+3)}{2^{k+1}} - 2 = \frac{(k+3)!}{2^{k+1}} - 2.$$

Поскольку выполнены оба условия принципа математической индукции, то равенство (2.2) справедливо для всех натуральных  $n$ .

### Доказательство утверждений о делимости

**Пример 3.** Доказать, что для всех натуральных  $n$  выражение  $(4^n - 1)$  делится без остатка на 3.

*Доказательство.*

1. Если  $n = 1$ , то  $4^1 - 1 = 3 : 3$  – истина. Значит исходное выражение справедливо при  $n = 1$ .

2. Предположим, что выражение  $(4^n - 1)$  кратно 3 при некотором  $n = k$ , т.е. допустим, что  $(4^k - 1) : 3$ . Докажем, что тогда

выражение  $(4^n - 1)$  делится на 3 и при  $n = k+1$ , т.е. докажем, что  $(4^{k+1} - 1) : 3$ .

Действительно,

$$4^{k+1} - 1 = 4^k \cdot 4 - 1 = 4^k \cdot 4 - 4 + 3 = [4 \cdot (4^k - 1) + 3] : 3.$$

По допущению  $(4^k - 1) : 3$ , значит  $4 \cdot (4^k - 1) : 3$ , 3 тоже делится на 3 без остатка. Так как оба слагаемых суммы делятся на 3, то и вся сумма делится на 3. Следовательно,  $(4^{k+1} - 1) : 3$ .

Поскольку выполнены оба условия принципа математической индукции, то для всех натуральных  $n$  выражение  $(4^n - 1)$  делится без остатка на 3.

**Пример 4.** Доказать, что для всех натуральных  $n$  выражение  $(n^3 + 5n)$  кратно 6. (2.3)

*Доказательство.*

1) Проверим справедливость утверждения (2.3) при  $n = 1$ :  $1^3 + 5 \cdot 1 = 6 : 6$  – верно.

2) Предположим, что утверждение верно при  $n = k$ :  $(k^3 + 5k) : 6$  будет верно, и докажем, что (2.3) верно при  $n = k+1$ :  $((k+1)^3 + 5(k+1)) : 6$ . Раскроем скобки  $(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = (k^3 + 5k) + 3k^2 + 3k + 6 = (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6 : 6$

По допущению  $(k^3 + 5k)$  кратно 6, второе слагаемое  $3k(k+1)$  кратно 6, поскольку числа  $k$  и  $k+1$  – последовательные числа, а значит одно из них четное, а второе нечетное, следовательно, произведение  $k(k+1)$  обязательно делится на 2, а значит, число  $3k(k+1)$  делится на 2 и на 3 одновременно, значит  $3k(k+1)$  делится на 6, и, наконец, третье слагаемое 6 делится на 6. Следовательно, вся сумма делится на 6 без остатка.

На основании принципа математической индукции утверждение справедливо для всех натуральных  $n$ .

### Доказательство неравенств

**Пример 5.** Доказать неравенство Бернулли  $(1+x)^n \geq 1+nx$  (при  $x \geq 0$ ) для всех натуральных  $n$ . (2.4)

*Доказательство.*

1. При  $n = 1$  неравенство имеет вид:  $1 + x \geq 1 + x$  – тождество верно для любых  $x$ .

2. Допустим, что неравенство (2.4) верно при  $n = k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ):

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx$$

и докажем, что тогда неравенство (2.4) верно при  $n = k + 1$ :

$$(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x.$$

Умножим верное, по допущению, неравенство на  $1 + x > 0$ , получим

$$\begin{aligned} (1 + x)^k(1 + x) &\geq (1 + kx)(1 + x) \\ (1 + x)^{k+1} &\geq 1 + kx + x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x. \end{aligned}$$

При любых  $k$  произведение  $kx^2 \geq 0$ , поэтому, отбрасывая в выражении  $1 + kx + x + kx^2$  слагаемое  $kx^2$ , получаем меньшее либо равное выражение.

Следовательно, по свойству транзитивности\* получим верное неравенство  $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$ .

Так как выполнены оба условия принципа математической индукции, то неравенство (2.4) верно для всех натуральных  $n$ .

\*Свойство транзитивности. **Транзитивность** (от лат. *transitivus* – переходный) – одно из свойств логического отношения величин. Отношение  $a * b$  называется транзитивным, если из  $a * b$  и  $b * c$  вытекает, что  $a * c$ . Пример, отношение равенства ( $a = b$ ) транзитивно, так как из  $a = b$  и  $b = c$  вытекает  $a = c$ .

**Пример 6.** Доказать, что  $n > 6$  справедливо неравенство  $3^n > n \cdot 2^{n+1}$  (2.5)

*Доказательство.*

1. При  $n = 7$  имеем  $3^7 > 7 \cdot 2^{7+1}$  или  $2187 > 1792$  – верно.

2. Предположим, что неравенство (2.5) верно при некотором  $n = k$  ( $k \in \mathbb{N}, k > 7$ ), т.е., верно, неравенство:  $3^k > k \cdot 2^{k+1}$ , докажем, что тогда верно неравенство при  $n = k + 1$ :

$$3^{k+1} > (k+1) \cdot 2^{k+2}$$

Домножим, верное по допущению, неравенство на 3

$$3 \cdot 3^k > 3 \cdot k \cdot 2^{k+1} \text{ или } 3^{k+1} > 3k \cdot 2^{k+1}$$

и рассмотрим разность

$$3k \cdot 2^{k+1} - (k+1) \cdot 2^{k+2} = 2^{k+1} (3k - 2 \cdot (k+1)) = 2^{k+1} (k-2) > 0.$$

Поскольку разность положительная, то уменьшаемое больше вычитаемого, т.е.  $3k \cdot 2^{k+1} > (k+1) \cdot 2^{k+2}$ .

С одной стороны, из предположения известно, что верно неравенство  $3^{k+1} > 3k \cdot 2^{k+1}$ , с другой стороны, доказали, что  $3k \cdot 2^{k+1} > (k+1) \cdot 2^{k+2}$ , записываем двойное неравенство:

$$3^{k+1} > 3k \cdot 2^{k+1} > (k+1) \cdot 2^{k+2},$$

из которого по свойству транзитивности получаем, что

$$3^{k+1} > (k+1) \cdot 2^{k+2}.$$

Оба условия обобщенного принципа математической индукции выполнены, следовательно, неравенство (2.5) верно для всех натуральных  $n > 6$ .

**Пример 7.** Доказать, что при  $n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (2.6)$$

*Доказательство.*

1. Проверим справедливость неравенства при  $n = 1$ :  $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$  — верно.

2. Предположим, что неравенство (2.6) верно при  $n = k$ , т.е. предположим, что верно неравенство:  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ ,

и докажем, что также верно неравенство при  $n = k + 1$ , т.е. нужно доказать, что верно неравенство

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2(k+1)-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}} \quad \text{или}$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Рассмотрим левую часть последнего неравенства и распишем в числителе и знаменателе дроби  $k$ -е множители.

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k+2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)(2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k+2)}.$$

Умножим левую и правую части верного, по допущению, неравенства на  $\frac{2k+1}{2k+2} > 0$ :

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}.$$

Теперь рассмотрим разность

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} - \frac{1}{\sqrt{2k+3}} = \frac{\sqrt{2k+1} \cdot \sqrt{2k+3} - (2k+2)}{(2k+2) \cdot \sqrt{2k+3}}.$$

Домножим числитель и знаменатель на сопряженное числителю выражение

$$\frac{(\sqrt{2k+1} \cdot \sqrt{2k+3} - (2k+2)) (\sqrt{2k+1} \cdot \sqrt{2k+3} + (2k+2))}{((2k+2)\sqrt{2k+3}) (\sqrt{2k+1} \cdot \sqrt{2k+3} + (2k+2))}.$$

Знаменатель дроби всегда больше нуля, поэтому знак дроби определяется числителем. Рассмотрим его отдельно и заметим, что в числителе находится формула – разность квадратов:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2k+1} \cdot \sqrt{2k+3} - (2k+2)) (\sqrt{2k+1} \cdot \sqrt{2k+3} + (2k+2)) = \\ & = (2k+1) \cdot (2k+3) - (2k+2)^2 = 4k^2 + 6k + 2k + 3 - 4k^2 - 8k - 4 = \\ & = -1 < 0. \end{aligned}$$

Разность двух дробей отрицательная, значит

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

С одной стороны, из предположения известно, что

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k+2)} < \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}.$$

С другой стороны доказали, что  $\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ , запишем

это в виде двойного неравенства

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k+2)} < \frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

из которого по свойству транзитивности получаем, что

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Оба условия принципа математической индукции выполнены, следовательно, неравенство (2.6) верно для всех натуральных  $n$ .

Рассказывая о математической индукции, обычно приводят и примеры неправильных рассуждений. Рассмотрим следующее неверное рассуждение. Докажем по индукции, что соседние натуральные числа равны. Другими словами, утверждение  $A_n$ , доказываемое индукцией по  $n$ , будет иметь вид  $n = n + 1$ .

Докажем его, предположив, что оно верно для всех меньших значений  $n$ . Тогда оно должно быть верно и для предыдущего значения параметра  $n$ . Это означает, что должно выполняться тождество  $(n - 1) = (n - 1) + 1$ , т.е.  $n - 1 = n$ . Прибавляя единицу к обеим частям равенства, получаем, что  $n = n + 1$ .

Наиболее естественное применение метода математической индукции в геометрии – это применение к решению геометрических задач на вычисление. Рассмотрим на примере.

**Пример 8.** На сколько треугольников  $n$ -угольник (не обязательно выпуклый) может быть разбит своими непересекающимися диагоналями?

*Решение.* Для треугольника это число равно единице, для четырехугольника это число равно, очевидно, двум.

Предположим, что мы уже знаем, что каждый  $k$ -угольник, где  $k < n$ , разбивается непересекающимися диагоналями на  $(k - 2)$  треугольника (независимо от способа разбиения). Рассмотрим одно из разбиений  $n$ -угольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  на треугольники. Пусть  $A_1A_k$  – одна из диагоналей разбиения; она делит  $n$ -угольник  $A_1, A_2, \dots, A_n$  на  $k$ -угольник  $A_1, A_2, \dots, A_k$  и  $(n - k + 2)$ -угольник  $A_1, A_k, A_{k+1}, \dots, A_n$ . В силу сделанного предположения общее число треугольников разбиения будет равно:

$$(k - 2) + ((n - k + 2) - 2) = n - 2,$$

тем самым наше утверждение доказано для всех  $n$ .

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Методом математической индукции доказать, что при  $n \in \mathbb{N}$ :

1.  $n^3 + 9n^2 + 26n + 24$  кратно 6.
2.  $7^{2n} - 1$  кратно 24.
3.  $15^n + 6$  кратно 7.
4.  $9^n + 3$  кратно 4.
5.  $7^n + 3n - 1$  кратно 9.
6.  $7^n + 12n + 17$  кратно 18.
7.  $5^n + 2 \cdot 3^n + 5$  кратно 8.
8.  $5^n - 3^n + 2n$  кратно 4.
9.  $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$  кратно 19.
10.  $9^{n+1} - 18n - 9$  кратно 18.

Задание 2. Доказать справедливость неравенства при любом  $n \in \mathbb{N}$ :

1.  $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}$ .
2.  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{17}{10} - \frac{1}{n}$ , ( $n > 2$ ).
3.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2}$ .
4.  $2^n > n^3$ , ( $n \geq 10$ ).
5.  $2^n > 2n + 1$ , ( $n \geq 3$ ).
6.  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n$ .
7.  $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ .
8.  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ , ( $n > 1$ ).
9.  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ .
10.  $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ .

Задание 3. Доказать, что для любого  $n \in \mathbb{N}$ :

1.  $2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$  делится на 27.
2.  $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$  делится без остатка на 11.
3.  $n \cdot (2n^2 - 3n + 1)$  делится без остатка на 8.
4.  $10^n + 18n - 28$  кратно 27.
5.  $6^{2n} + 9^n - 2^{n+1}$  кратно 17.
6.  $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$  кратно 11.
7.  $7^{2n} - 4^{2n}$  кратно 33.
8.  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  кратно 133.
9.  $5^{n+3} + 11^{3n+1}$  кратно 17.
10.  $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$  кратно 19.

Задание 4. Доказать справедливость формулы, определяющей числовые множества для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Множество  $B$  задано рекуррентно:  $b_{n+1} = 3b_n - 2$ ,  $b_1 = 4$ .  
Выразить  $b_n$  через  $n$ .

2. Множество  $A$  задано рекуррентно:  $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 5a_n$ ,  $a_1 = 4$ ,  $a_2 = 27$ . Выразить  $a_n$  через  $n$ .

3. Множество  $A$  задано рекуррентно:  $a_1 = 1$ ,  $a_n = 4a_{n-1} + 5$ , ( $n > 1$ ). Доказать, что  $a_n = 1/3(2 \cdot 4^n - 5)$ .

4. Множество  $A$  задано рекуррентно:  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + 3$ .  
Доказать, что  $a_n = 3n - 2$ .

5. Множество  $A$  задана рекуррентным соотношением:  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ . Доказать, что  $a_n = 2^{n-1} - 1$ .

6. Пусть первый член арифметической прогрессии равен  $a_1$ , рекуррентная формула для арифметической прогрессии имеет вид:  $a_{n+1} = a_n + d$  ( $d$  – разность прогрессии). Доказать аналитическую формулу для арифметической прогрессии  $a_n = a_{n1} + d(n - 1)$ .

7. Множество  $A$  задано рекуррентным соотношением:  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ). Доказать, что  $a_n = 2^{n-1} + 1$ .

8. Для множества  $A$ , заданного рекуррентно,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , найти  $a_{2010}$ .

9. Доказать формулы для суммы первых  $n$  членов арифметической и геометрической прогрессий.

10. Для рекуррентно заданного множества  $a_1 = 2, a_{n+1} = 2(a_n + (2n + 1) \cdot 2^n)$ , доказать, что ее общий член может быть задан формулой  $a_n = n^2 2^n$ .

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Дайте определение математической индукции.
2. Для чего применяют метод математической индукции?
3. Что называют базой индукции?
4. Какие два шага включает доказательство по индукции?
5. Можно ли применять метод математической индукции для доказательства утверждений о последовательностях и рекуррентных соотношениях?
6. Назовите типичные ошибки, которые допускают при использовании метода математической индукции.
7. Почему недостаточно проверить только базу индукции или только шаг индукции?
8. Можно ли применять метод математической индукции к бесконечным множествам?
9. Какие примеры индуктивных доказательств есть в теории графов?
10. Как метод индукции применяется в математическом анализе (например, доказательство свойств последовательностей)?

### 3. БИНОМ НЬЮТОНА И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЧИСЛА МАТЕМАТИКИ

#### 3.1. БИНОМ НЬЮТОНА

Бином Ньютона – формула, позволяющая напрямую получать результат возведения любого двучлена в любую натуральную степень:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k b^k a^{n-k}, \quad (3.1)$$

где  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  – число сочетаний из  $n$  по  $k$ .

В русскоязычной литературе устоялось название «бином Ньютона». В англоязычной литературе формулу называют «биномиальной теоремой».

**Определение 1.** Биномиальными коэффициентами называются величины  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

Эти величины обладают несколькими свойствами.

**Свойство симметрии.**

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

В формуле бинома это означает, что коэффициенты, стоящие на одинаковых местах от левого и правого концов формулы, равны, например:  $C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ .

Действительно,  $C_n^k$  – это количество подмножеств, содержащих  $k$  элементов, множества, содержащего  $n$  элементов. Тогда  $C_n^{n-k}$  – количество дополнительных к ним подмножеств. Сколько подмножеств, столько и дополнений.

Например, можно сразу выписать биномиальные коэффициенты из разложения 4-й степени бинома:  $1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$ .

Коэффициенты сначала растут, доходя до пика к середине многочлена, а затем начинают уменьшаться. Причем коэффициенты после середины повторяют значения до середины, но в обратном порядке: первый биномиальный коэффициент равен первому с конца, второй равен второму с конца и т.д.

Подобное поведение наблюдается и в разложениях других степеней биномов (знаки плюса и  $a, b$  для наглядности записывать не будем):

$$\begin{array}{rcccccc}
 (a + b)^0 & & & & & 1 \\
 (a + b)^1 & & & & 1 & 1 \\
 (a + b)^2 & & & 1 & 2 & 1 \\
 (a + b)^3 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 (a + b)^4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1
 \end{array}$$

Каждый внутренний элемент этой таблицы получается, как сумма элементов, стоящих левее и правее строкой выше. Эта таблица получила название треугольник Паскаля.

**Свойство Паскаля.**

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Пусть  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Число  $C_n^k$  — это количество подмножеств из  $k$  элементов множества  $X$ . Разделим все подмножества на два класса:

- 1) подмножества, не содержащие элемент  $x_1$ , их будет  $C_{n-1}^k$ ;
- 2) подмножества, содержащие элемент  $x_1$ , их будет  $C_{n-1}^{k-1}$ .

Поскольку эти классы не пересекаются, то по правилу суммы количество всех  $k$ -элементных подмножеств множества  $X$  будет равно  $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ .

**Пример 1.** Разложить выражение  $(a + b)^7$ . Результат мы можем получить моментально, используя треугольник Паскаля:

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Несмотря на свою простоту, треугольник Паскаля обладает рядом интересных свойств.

1. Треугольник Паскаля симметричен относительно высоты.
2. Каждое число в прямоугольном треугольнике Паскаля равно сумме чисел предшествующей строки, начиная с первого до числа, стоящего непосредственно над данным числом.
3. Каждое число в прямоугольном треугольнике Паскаля, будучи уменьшено на 1, равно сумме чисел, заполняющих прямоугольник, ограниченный строкой и столбцом, на которых стоит данное число.

4. Третья строка и третий столбец прямоугольного треугольника Паскаля состоят из треугольных чисел.

5. Четвертая строка и четвертый столбец прямоугольного треугольника Паскаля состоят из пирамидальных чисел.

6. Сумма чисел  $n$ -й строки треугольника Паскаля равна  $2^n$ , так как при переходе от каждой строки к следующей сумма чисел удваивается, а для нулевой строки она равна 1.

**Пример 2.** Найти 13-й член разложения бинома  $(\sqrt[3]{3} + \sqrt{2})^{15}$ .

Для этого используем формулу (3.1) при  $n = 15$  и  $k = 13 - 1$ .

$$C_{15}^{12} (\sqrt[3]{3})^3 (\sqrt{2})^{12} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 \cdot 2^6 = 87360.$$

**Свойство суммы.**

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Подставим в формулу бинома Ньютона (3.1) значения  $a = 1$ ,  $b = 1$ . Получим

$$2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k.$$

Заметим, что с точки зрения теории множеств сумма  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$  выражает количество всех подмножеств  $n$ -элементного множества.

**Свойство разности.**

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

Положим в формуле бинома Ньютона  $a = 1, b = -1$ .

Получим в левой части  $(1-1)^n = 0$ , а в правой – биномиальные коэффициенты с чередующимися знаками, что и доказывает свойство.

Последнее свойство удобнее записать, перенеся все коэффициенты с отрицательными знаками в левую часть формулы:  $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = C_n^0 + C_n^2 + \dots$ , тогда свойство легко запоминается в словесной формулировке: «сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами равна сумме биномиальных коэффициентов с четными номерами».

**Свойство максимума.** Если степень бинома  $n$  – четное число, то среди биномиальных коэффициентов есть один

максимальный при  $k = \frac{n}{2}$ . Если степень бинома нечетное число, то максимальное значение достигается для двух биномиальных коэффициентов при  $k_1 = \frac{n-1}{2}$  и  $k_2 = \frac{n+1}{2}$

Так, при  $n = 4$  максимальным является коэффициент  $C_4^2 = 6$ , а при  $n = 3$  максимальное значение равно  $C_3^1 = C_3^2 = 3$ .

### 3.2. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ БИНОМА НЬЮТОНА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Положив в формуле (3.1) бинома Ньютона  $a = 1$ ,  $b = x$ , получим следующую формулу:

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

Если величина  $x$  мала, то величины  $x^2, x^3, \dots, x^n$  тем более малы. Поэтому, если в формуле отбросить члены, их содержащие, то полученная в результате формула  $(1+x)^n \approx 1 + C_n^1 x$  будет приближенной, причем ошибка такого приближения будет небольшой. Формулу также можно переписать в виде

$$(1+x)^n \approx 1 + nx. \quad (3.2)$$

Например, при  $x = 0,01$  и  $n = 2$  точное значение с 4 знаками равно 1,0201, а по формуле (3.2) – 1,02. Эта формула верна также для малых отрицательных значений  $x$  и любых действительных значениях  $n$ .

**Пример 3.** Найти значения

$$\sqrt{1,003} = (1 + 0,003)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,003 = 1,0015.$$

$$\sqrt[3]{0,97} = (1 - 0,03)^{\frac{1}{3}} \approx 1 - \frac{1}{3} \cdot 0,03 = 0,99.$$

### 3.3. СУММЫ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В математике регулярно приходится иметь дело с самыми разными суммами натуральных чисел в разных степенях:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 3 + \dots + n \\ &3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 50^2 \\ &8^3 + 10^3 + 12^3 + \dots + 20^3. \end{aligned}$$

Записывать такие суммы довольно долго. Чтобы не тратить время и не путаться, введем обозначение  $S_n^k$ , которое будет определять сумму  $k$ -х степеней первых  $n$  натуральных чисел:

$$S_n^k = 1^k + 2^k + \dots + n^k.$$

Начнем с сумм вида  $S_n^0$ , т.е. сумм первых  $n$  натуральных чисел в нулевой степени:  $1 + 1 + \dots + 1 = n$ , т.е.  $S_n^0 = n$ .

Теперь вычислим сумму натуральных чисел в первой степени, которую обозначим  $S_n^1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ .

*Немного истории.* Согласно легенде, 8-летний Карл Гаусс плохо себя вел на уроке. Чтобы чем-то надолго занять непослушного мальчишку, учитель дал ему сложную задачу – найти сумму первых 100 натуральных чисел. Он выписал в один ряд числа от 1 до 100, а под ним еще один ряд тех же чисел, но в обратном порядке – от 100 до 1. И оказалось, что если складывать верхнее и нижнее числа в каждом столбике, то каждый раз будет получаться число 101.

1	2	3	...	98	99	100
+	+	+	+	+	+	+
100	99	98	...	3	2	1
101	101	101	...	101	101	101

Всего 100 столбцов, каждый из которых равен 101. В сумме получаем 10100. Но сложив друг с другом столбцы, мы сложили все числа от 1 до 100 **дважды**:

$$100 \cdot 101 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots = (1 + 2 + 3 + \dots + 100) + (100 + 99 + 98 + \dots + 1).$$

Делим обе части равенства на 2 и получаем ответ на задачу:

$$1+2+3+\dots+100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$$

### Геометрическое решение

Найти формулу суммы первых  $n$  натуральных чисел можно и чисто из геометрических соображений. Для этого каждое число представим в виде квадратов, из которых построим «треугольник». Количество квадратов в этом треугольнике и будет равно искомой сумме чисел.

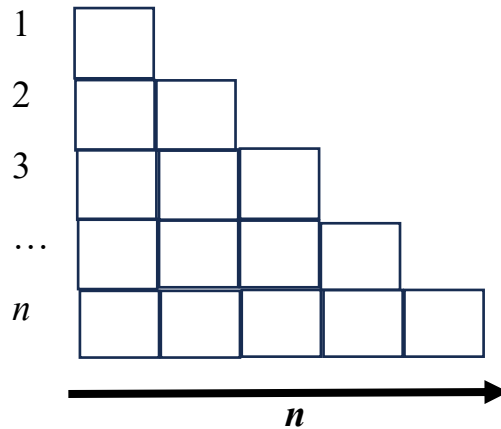


Рис. 3.1

Но как найти, из скольких квадратов мы построили треугольник? Нужно этот треугольник достроить до прямоугольника. Будем делать это дополнительными квадратами (нарисуем их штрихами).

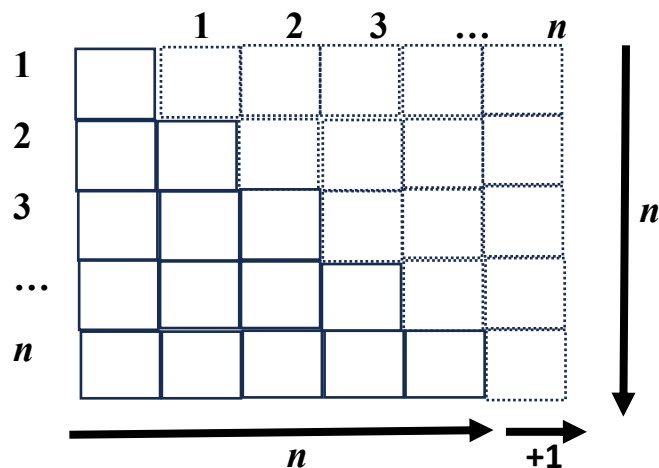


Рис. 3.2

Получили прямоугольник из  $n$  квадратов в ширину и  $(n + 1)$  квадрата в длину. Его площадь  $n \cdot (n + 1)$  будет равна количеству всех использованных в строительстве квадратов.

Прямоугольник мы построили из одинакового количества сплошных и пунктирных квадратов. Поделив найденную площадь на 2, мы как раз и найдем искомую сумму  $n$  первых натуральных чисел:  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ .

Числа, получаемые по выведенной формуле, называются *треугольными*:  $T_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ .

Свое название они получили как раз из-за того, что геометрически их можно представить в виде квадратов или шаров, из которых выложили «треугольник».

Рассмотрим первые четыре треугольных числа:

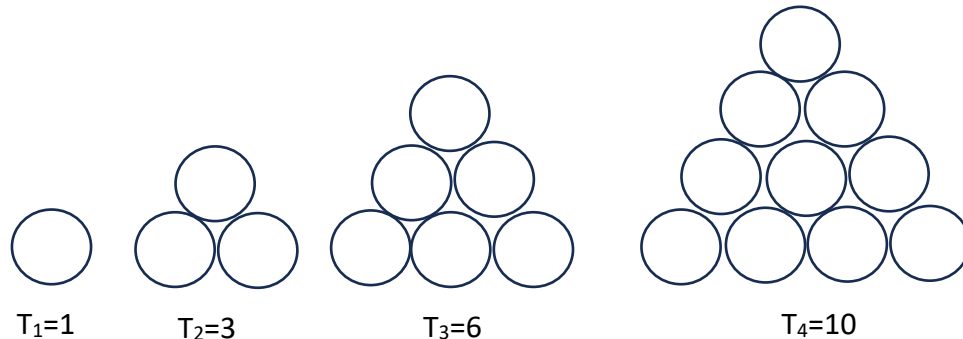


Рис. 3.3

Треугольные числа помогают ответить на множество самых разных вопросов. Например, на складе бревен достаточно места, чтобы выложить на земле 22 бревна друг с другом рядом. Какое максимальное количество бревен можно хранить на таком складе? Бревна надо укладывать в форме треугольника, иначе они укатятся. Поэтому ответом на вопрос будет треугольное число  $T_{22} = 253$ .

### Алгебраическое решение

Начнем со следующего равенства, в котором мы используем формулу квадрата разности:  $(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$ . Выпишем подробные разложения для всех чисел от 1 до  $n$ .

$$(1 - 1)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1$$

$$(2 - 1)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1$$

$$(3 - 1)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 + 1$$

...

$$(n - 1)^2 = n^2 - 2 \cdot n + 1$$

Можно увидеть, как столбики чисел образуют цепочки во всех степенях. Теперь сложим все эти равенства друг с другом (отдельно левые и отдельно правые части), вынося за скобки  $-2$ :

$$(1 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + \dots + (n - 1)^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 2(1 + 2 + \dots + n) + (1 + 1 + \dots + 1)$$

Обратите внимание, что слева и в скобках справа у нас образовались суммы чисел в разных степенях!

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 2(1 + 2 + \dots + n) + (1 + 1 + \dots + 1).$$

Иными словами:  $S_{n-1}^2 = S_n^2 - 2S_n^1 + S_n^0$ .

### Сумма квадратов чисел

Рассмотрим сумму квадратов чисел  $S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = ?$

#### Алгебраическое решение

Алгоритм вывода точно такой же, как и алгебраический вывод суммы натуральных чисел. Только в этот раз надо выписывать суммы уже в третьей степени. Попробуйте сделать вывод самостоятельно, а потом проверьте себя:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

### Сумма кубов чисел

#### Гениальная гипотеза

Сейчас речь пойдет не о решении, а о гипотезе. Ее плюс в том, что она очень легко запоминается и выводится, а минус в том, процесс ее получения не является доказательством – верность полученной формулы придется доказывать отдельно.

Выпишем в первой строке таблицы, чему равны суммы первых натуральных чисел, а во второй – суммы их кубов, и попробуем найти взаимосвязь:

$n$	1	2	3	4	...	$n$
$S_n^1$	1	3	6	10	...	$\frac{n \cdot (n+1)}{2}$
$S_n^3$	1	9	36	100	...	?

С суммами кубов дело обстоит даже проще, чем с квадратами.

Глядя на таблицу, естественно предположить, что  $S_n^3 = (S_n^1)^2$ , т. е.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

### 3.4. ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА

Фигурные числа использовались еще в V–IV вв. до н. э. Древнегреческие математики предпочитали думать о числах, как о геометрических величинах. Произведение  $ab$  рассматривалось как площадь прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ .

В случае, если  $a$  и  $b$  – натуральные, произведение  $ab$  выражало число точек в прямоугольной таблице с  $a$  точками в строке и  $b$  точками в столбце. Например, число 20 выражает число точек в таблице с пятью строками и четырьмя столбцами (рис. 3.4). Такие числа назывались **прямоугольными**. Числа, выражающие число точек в квадратной таблице, назывались **квадратными**.

Например, квадратными числами являются 1, 4, 9, 16, ... и т.д. (рис. 3.5).

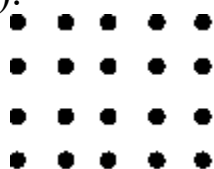


Рис. 3.4

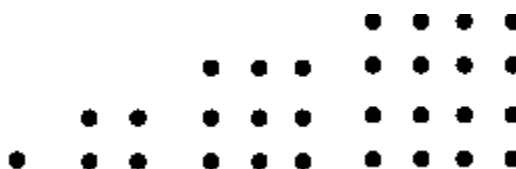


Рис.3.5

Таблицы могут быть не только прямоугольными или квадратными, но и иметь форму других геометрических фигур. Например, пятиугольными числами являются 1, 5, 12, 22, 35, ... , а шестиугольными – 1, 6, 15, 28, 45, ... . Для того чтобы вывести формулу  $n$ -го  $d$ -угольного числа, рассмотрим последовательность  $1, 1 + (d - 2), 1 + 2(d - 2), 1 + 3(d - 2), \dots, 1 + (n - 1)(d - 2), \dots$ , представляющую собой арифметическую прогрессию с начальным членом 1 и знаменателем  $d - 2$ . Нетрудно видеть, что  $n$ -е  $d$ -угольное число  $S_n^d$  является суммой первых  $n$  членов этой прогрессии и, следовательно, выражается формулой

$$S_n^d = \frac{(2 + (n - 1)(d - 2))n}{2}.$$

Французский математик О. Коши в 1815 г. доказал, что всякое натуральное число может быть представлено в виде суммы не более чем  $d$ -угольных чисел. Для отдельных случаев это утверждение было доказано Л. Эйлером (1707–1783).

Фигурные числа можно образовывать, используя и пространственные фигуры. Например, кубические числа 1, 8, 27,

... и т.д. представляют собой число точек в кубических таблицах, пирамидальные числа 1, 4, 10, ... и т.д. представляют число точек в треугольных пирамидах, пирамидальные числа 1, 5, 14, ... и т.д. представляют число точек в четырехугольных пирамидах.

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Раскрыть скобки, пользуясь биномом Ньютона.

- |                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| 1. $(1 - 2x)^5$ | 6. $(2 - 2x)^4$   |
| 2. $(x + 2)^6$  | 7. $(1 - 3x)^5$   |
| 3. $(2 - 3x)^4$ | 8. $(1 + 4x)^5$   |
| 4. $(1 - x)^7$  | 9. $(1 - 5x)^6$   |
| 5. $(1 + 3x)^5$ | 10. $(-1 - 2x)^6$ |

Задача 2. Найти приближенное значение следующих выражений.

- |                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| 1. $(1,04)^3$     | 6. $\sqrt{1,05}$     |
| 2. $(1,001)^{10}$ | 7. $\sqrt{0,95}$     |
| 3. $(1,03)^6$     | 8. $\sqrt[3]{1,03}$  |
| 4. $(0,99)^3$     | 9. $\sqrt[5]{0,99}$  |
| 5. $(0,98)^4$     | 10. $\sqrt[3]{1,04}$ |

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Дайте определение биномиальному коэффициенту.
2. Назовите свойства биномиального коэффициента.
3. Как формируются числа из треугольника Паскаля?
4. Как применить формулу бинома Ньютона к приближенным вычислениям?
5. Как определить сумму кубов натуральных чисел?
6. Какие числа называют фигурными?

## 4. ПОНЯТИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

### 4.1. ОТОБРАЖЕНИЕ

Понятие отображения является фундаментальным для современной математики, поскольку всякий ее раздел связан с исследованием специальных множеств объектов вместе с системой операций над элементами множеств. Отображения являются важным случаем таких операций.

Понятие *отображения*: пусть даны непустые множество  $A$  и множество  $B$ . Говорят, что  $F$  – отображение  $A$  в  $B$ , если указано правило, сопоставляющее всякому элементу из множества  $A$  однозначно элемент из множества  $B$ .

Тот факт, что  $F$  является отображением  $A$  в  $B$ , записывается так:  $F: A \rightarrow B$  или  $y = f(x)$ .

**Определение 1.** Пусть дано отображение  $F: A \rightarrow B$ ,  $E \subset A$ . Образом множества  $E$  называют множество  $\{y \in B: y = F(x), x \in E, E \subset A\}$ .

**Определение 2.** Пусть дано отображение  $F: A \rightarrow B$ ,  $E \subset B$ . Прообразом множества  $E$  называют множество  $\{x \in A: F(x) \in E, E \subset B\}$ .

**Определение 3.** Отображение натурального множества  $A$  в любое  $B$  называется последовательностью, а если  $B$  – числовое, то числовой последовательностью.

**Определение 4.** Отображение числового множества  $A$  в числовое  $B$  назовем функцией.

**Определение 5.** Отображение  $F$  некоторого множества  $A$  в числовое множество  $B$  называется функционалом.

На рис. 4.1 отношения  $f$ ,  $\varphi$  и  $h$  являются отображениями, а  $g$  – нет.

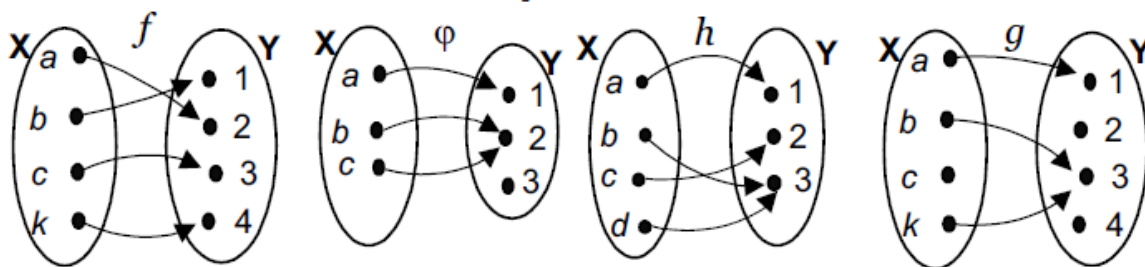


Рис. 4.1

Множество  $A$  иногда так же называется *областью определения*, а множество  $B$  – *областью значений*.

Если мы будем говорить об отображении как о некотором законе, приводящем в соответствие каждому элементу  $x \in A$  некоторой элемент  $y$ , то достаточно обозначить это как  $y = f(x)$  и в случае функции назвать  $x$  *аргументом*, а  $y$  – *значением функции*.

**Определение 6.** Пусть определена функция  $f: A \rightarrow B$ , тогда *множество определения* функции обозначается как  $f_A = D_f = \{x \in A \mid \exists y \in B, y = f(x)\}$ ; *множество значений* функции –  $f_B = R_f = \{y \in B \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$ .

Множество определения функции является подмножеством области определения, т.е.  $D_f \subseteq A$ , а множество значений функции – подмножеством области значений функции, т.е.  $R_f \subseteq B$ .

Диаграмма Венна служит удобной иллюстрацией функции, определенной на множестве  $A$  со значениями в множестве  $B$ .

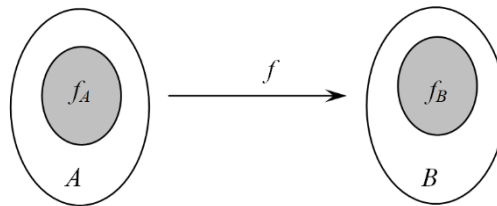


Рис. 4.2

**Пример 1.** Пусть  $\Gamma$  – множество линий, лежащих на поверхности (например, земной) и соединяющих две ее фиксированные точки. Каждой линии  $\gamma \in \Gamma$  можно сопоставить ее длину. Тогда мы получим функцию  $F: \Gamma \rightarrow R$ , которую часто приходится рассматривать с целью отыскания кратчайшей линии или, как говорят, геодезической линии между данными точками на поверхности.

**Пример 2.** Функция возведения в квадрат определена для каждого значения  $x$  и ставит в соответствие этому  $x$  его квадрат (ещё говорят: отображает  $x$  в  $x^2$ ). Множество значений этой функции имеет несколько названий, приведём два самых распространённых: полные квадраты и квадратные числа.

**Пример 3.** Областью определения функции  $y = \sin x$  служит множество всех действительных чисел, а областью значений – отрезок  $[-1; 1]$ . Областью определения функции  $y = \sqrt{x-1}$

является промежутком  $[1; +\infty)$ , а областью значений – промежутком  $[0; +\infty)$ .

Известному математику Н.И. Лобачевскому принадлежит другое определение функции: переменная  $y$  называется функцией переменной  $x$ , если каждому значению  $x$ , из области ее изменения, соответствует определенное значение  $y$ .

Особенностью этого определения является то обстоятельство, что функцией является правило, а не множество.

Если  $D_f = A$ , то функция называется *тотальной*, а если  $D_f \neq A$  – *частичной функцией*. Например, на рис. 4.3 изображена частичная функция.

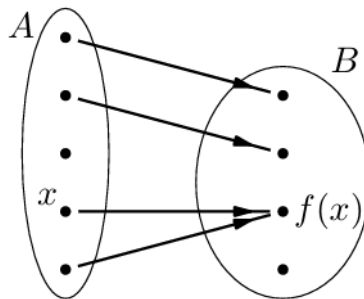


Рис. 4.3

Отметим, что функции, у которых всем элементам некоторого множества соответствует один и тот же элемент, т.е. функции, у которых при изменении значения аргумента значение функции не меняется, называются *постоянными* (на данном множестве) или *константами*.

**Определение 7.** Если  $M \subseteq A$ , то множество  $f(M) = \{y \mid f(x) = y \text{ для некоторого } x \text{ из } M\}$  называется *образом* множества  $M$ . Если  $K \subseteq B$ , то множество  $f^{-1}(K) = \{x \mid f(x) \in K\}$  называется *прообразом* множества  $K$ .

**Пример 4.** Дано отображение  $f: Q \rightarrow Z$ , где  $f(x) = x^3 - 5$  для всех  $x \in Q$  ( $Q$  – рациональные числа,  $Z$  – целые числа). Найти: 1) образ элемента 1; 2)  $f^{-1}(3); f^{-1}(5)$ .

*Решение.*

1. Сначала надо убедиться, что  $1 \in Q$ . Это так.

Чтобы найти образ элемента, достаточно в отображение подставить вместо  $x$  число 1. Получаем,  $f(1) = 1^3 - 5 = -4$ .  $-4 \in Z$ . Значит, элемент 1 имеет образ, и он равен  $-4$ .

2. Сначала убедимся, что  $3 \in Z$ . Это так. Чтобы найти прообраз, вместо  $f(x)$  подставляем 3, и решаем уравнение  $x^3 - 5 = 3$ . Получаем,  $x = 2$ . Причем  $2 \in Q$ . Значит,  $f^{-1}(3) = 2$ .

По аналогии находим прообраз числа 5. Для этого решаем уравнение  $x^3 - 5 = 5$ , и получаем  $x = \sqrt[3]{10}$ . Но  $\sqrt[3]{10} \notin Q$ . Поэтому прообраз  $f^{-1}(5) = \emptyset$ .

**Пример 5.** Функция  $f$  из  $N$  в  $N$  сопоставляет числу  $n$  наибольший простой делитель числа  $n$ . Найдите полный прообраз множества чётных чисел.

*Решение.*

Среди простых чисел есть всего одно чётное число 2. Поэтому в множество значений функции  $f$  входит лишь одно чётное число 2. Значит,  $f^{-1}(2N) = f^{-1}(\{2\})$ . Если  $f(n) = 2$ , то по определению функции  $f$  у числа  $n$  все простые делители не превосходят наименьшего простого числа 2. Значит, число  $n$  является степенью двойки.

**Определение 8.** Две функции  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  считаются совпадающими или равными, если они имеют одну и ту же область определения  $A$  и на любом элементе  $x \in A$  значения  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  этих функций совпадают. В этом случае пишут  $f_1(x) = f_2(x)$ .

Если  $X \subset A$ , а  $f: A \rightarrow B$  – некоторая функция, то через  $f|_X$  или  $f|_X$  обозначают функцию  $\varphi: X \rightarrow B$ , совпадающую с  $f$  на множестве  $X$ . Точнее,  $f|_X(x) := \varphi(x)$ , если  $x \in X$ . Функция  $f|_X$  называется *сужением* или *ограничением* функции  $f$  на множество  $X$ , а функция  $f: A \rightarrow B$  по отношению к функции  $\varphi = f|_X: X \rightarrow B$  называется *распространением* или *продолжением* функции  $\varphi$  на множество  $A$ .

**Пример 6.** Верно ли для любых  $f$ ,  $X$ ,  $Y$  равенство  $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ ?

*Решение.* Ответ: да.

Условие  $b \in f(X \cup Y)$  означает по определению, что  $b = f(a)$ , где  $a \in X$  или  $a \in Y$ , т.е.  $b \in f(X) \cup f(Y)$ . Значит,  $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$ . С другой стороны, если  $U \subseteq W$ , то  $f(U) \subseteq f(W)$  по определению. Значит,  $f(X) \subseteq f(X \cup Y)$  и  $f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$ , т.е.  $f(X \cup Y) \supseteq f(X) \cup f(Y)$ . Из включений в обе стороны следует равенство  $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ .

**Определение 9.** Функция  $f: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow B$  называется функцией  $n$  аргументов, или  $n$ -местной функцией. Такая функция отображает кортеж  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  в элемент  $b \in B$ ,  $b = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

**Свойства отображений (функций)**

1. Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется *инъективным*, если оно различные элементы из  $A$  отображает в различные элементы из  $B$ :  $y = f(x_1) \wedge y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

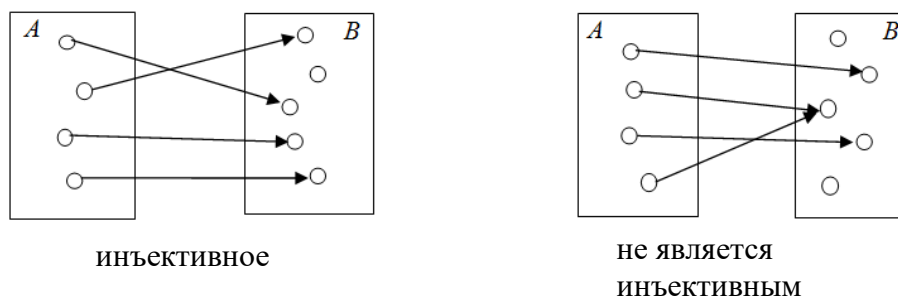


Рис.4.4

2. Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется *сюръективным* или отображением на все множество  $B$ , если в каждый элемент множества  $B$  отображается хотя бы один элемент из  $A$ :  $\forall y \in B, \exists x \in A, y = f(x)$ .

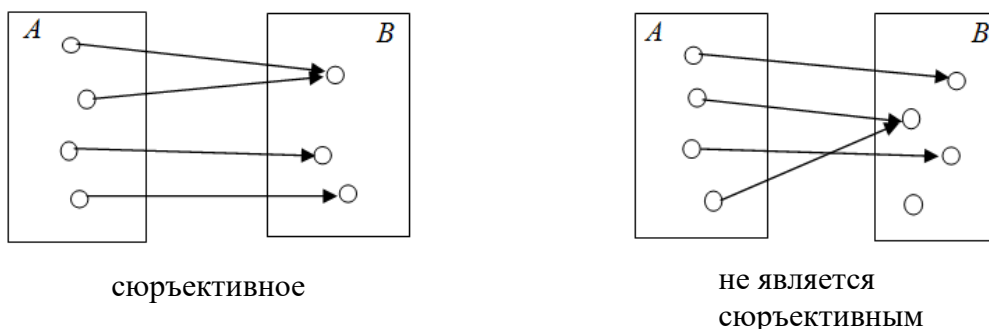


Рис. 4.5

3. Отображение  $f: A \rightarrow B$ , которое одновременно инъективно и сюръективно, называется *биективным* или взаимно однозначным отображением множества  $A$  на множество  $B$ .

**Пример 7.** Пусть дано отображение  $f: R \rightarrow R$ , которое определено таким образом, что  $f(x) = 3x + 5$ . Выяснить, какими свойствами обладает это отображение.

*Решение.*

Данная функция инъективна, так как если  $f(x_1) = f(x_2)$ , тогда  $3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$  и, следовательно,  $x_1 = x_2$ .

Функция  $f$  является также сюръекцией. Для любого действительного числа  $y$  требуется найти такое  $x$ , что  $f(x) = y = 3x + 5$ . Решая это уравнение относительно  $x$ , находим, что если  $x = \frac{y-5}{3}$ , тогда  $f(x) = y$ .

Поэтому  $f$  представляет собой взаимно однозначное соответствие, а значит, является биекцией.

**Пример 8.** Пусть дано отображение  $f: R \rightarrow R$ , которое определено таким образом, что  $f(x) = x^2$ . Выяснить, какими свойствами обладает это отображение.

*Решение.*

Функция  $f$  не является инъективной, так как справедливо равенство  $f(2) = f(-2)$ , но  $2 \neq -2$ . Функция  $f$  не является также и сюръективной, поскольку не существует такого действительного числа  $x$ , для которого  $f(x) = -1$ .

**Определение 10.** Пусть  $f$  – биективное отображение множества  $A$  в множество  $B$ . Если поставить в соответствие каждому элементу из  $B$  связанный с ним элемент из  $A$ , то такое соответствие является отображением  $B$  в  $A$ . Это отображение обозначается  $f^{-1}$  и называется *отображением, обратным отображению  $f$* .

**Теорема 1. (свойства обратного отображения)**

Если  $f: A \rightarrow B$  – биекция, то

- 1)  $f(f^{-1}(y)) = y$  для любого  $y$  из  $B$ ;
- 2)  $f^{-1}(f(x)) = x$  для любого  $x$  из  $A$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $y \in B$ . Так как биекция сюръективна, то  $\exists x = f^{-1}(y)$ . Такой  $x$  единственен и  $f(x) = y$ . Имеем:  $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ .

2. Аналогично доказывается, что  $f^{-1}(f(x)) = x$  для любого  $x$  из множества  $A$ .

Источником новых функций, с одной стороны, и способом расчленения сложных функций на более простые, с другой стороны, является операция композиции отображений.

**Определение 7.** Композицией (суперпозицией, произведением) отображений  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow C$  называется отображение  $h: A \rightarrow C$ , которое записывается  $h = g \circ f$ .

Рис. 4.6 иллюстрирует конструкцию композиций изображений.

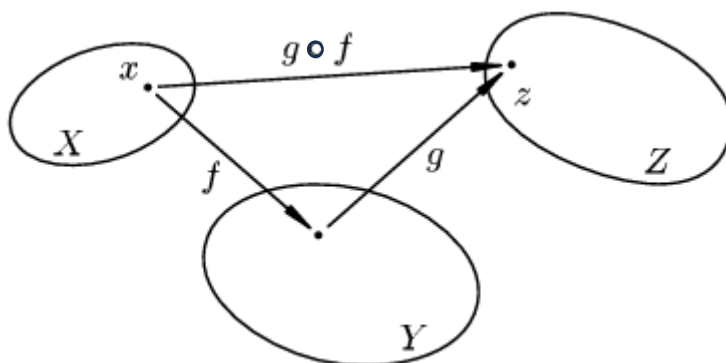


Рис. 4.6

Следует отметить, что  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ . Если в композиции  $f_n \circ \dots \circ f_1$  все члены одинаковы и равны  $f$ , то ее обозначают коротко  $f^n$ .

Отметим также, что даже в том случае, когда обе композиции  $g \circ f$  и  $f \circ g$  определены, вообще говоря,  $g \circ f \neq f \circ g$ .

Действительно, возьмем, например, двухэлементное множество  $\{a, b\}$  и отображения  $f: \{a, b\} \rightarrow a$ ,  $g: \{a, b\} \rightarrow b$ . Тогда, очевидно,  $g \circ f: \{a, b\} \rightarrow b$ , в то время как  $f \circ g: \{a, b\} \rightarrow a$ .

Отображение  $f: X \rightarrow X$ , сопоставляющее каждому элементу множества  $X$  его самого, будем обозначать через  $e_X$  и называть *тождественным отображением* множества  $X$ .

Через операцию композиции отображений можно описать взаимно обратные отображения.

**Утверждение.** Отображения  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  являются биективными и взаимно обратными в том и только в том случае, когда  $g \circ f = e_X$  и  $f \circ g = e_Y$ .

**Пример 9.** Рассмотрим две функции  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = x^2$  и  $g: R \rightarrow R$ ,  $g(x) = 4x + 3$ .

Найти:  $g \circ f$ ,  $f \circ g$ ,  $f \circ f$ ,  $g \circ g$ .

*Решение.*

Все четыре новые функции определены на  $R$  со значениями в множестве  $R$ .

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 4x^2 + 3;$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x + 3) = (4x + 3)^2 = 16x^2 + 24x + 9;$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2) = x^4;$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(4x + 3) = 4(4x + 3) + 3 = 16x + 15.$$

**Теорема 2.**  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  – прообраз объединения двух множеств равен объединению их прообразов.

*Доказательство.*

Пусть  $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ . Тогда или  $x \in f^{-1}(A)$ , или  $x \in f^{-1}(B)$ . В первом случае  $y = f(x) \in A$ , во втором  $y \in B$ . В любом случае  $y \in A \cup B$ , поэтому  $x \in f^{-1}(A \cup B)$ .

Докажем обратное включение. Пусть  $x \in f^{-1}(A \cup B)$ , тогда  $y = f(x) \in A \cup B$ . Значит или  $y \in A$ , или  $y \in B$ .

Если  $y \in A$ , то  $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(A)$ . Так как  $x \in f^{-1}(y)$ , то отсюда следует, что  $x \in f^{-1}(A)$ .

Если же  $y \in B$ , то  $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(B)$ , что влечет  $x \in f^{-1}(B)$ . В любом случае  $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ .

Поэтому, если  $x \in f^{-1}(A \cup B)$ , то  $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 3.**  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$  – прообраз пересечения двух множеств равен пересечению их прообразов.

*Доказательство.*

Пусть  $x \in f^{-1}(A \cap B)$ , тогда  $y = f(x) \in A \cap B$ . Значит,  $y \in A$  и  $y \in B$ . Если  $y \in A$ , то  $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(A)$ , а если  $y \in B$ , то  $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(B)$ .

Эти включения должны выполняться одновременно, следовательно,  $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ , а значит,  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ . Таким образом,  $f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ . Докажем обратное включение. Пусть  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ , тогда  $x \in f^{-1}(A)$  и  $x \in f^{-1}(B)$ . Если  $x \in f^{-1}(A)$ , то  $y = f(x) \in A$ . Если же  $x \in f^{-1}(B)$ , то  $y = f(x) \in B$ . Так как  $y \in A$  и  $y \in B$ , то  $y \in A \cap B$  и тогда  $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$ . Значит,  $x \in f^{-1}(A \cap B)$  и отсюда следует, что  $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$ .

Эти два включения означают, что  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 4.** Образ объединения двух множеств равен объединению их образов.

*Доказательство.*

Пусть  $y \in f(A \cup B)$ , тогда для любого  $x$  из множества  $f^{-1}(y)$  выполняется принадлежность  $x \in A \cup B$ . Поэтому  $x \in A$  или  $x \in B$ . В первом случае  $y = f(x) \in f(A)$ , во втором случае  $y = f(x) \in f(B)$ . Так как  $y \in f(A)$  или  $y \in f(B)$ , то  $y \in f(A) \cup f(B)$  и, следовательно,  $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ .

Докажем обратное включение. Пусть  $y \in f(A) \cup f(B)$ , тогда  $y \in f(A)$  и  $f^{-1}(y) \subseteq A$  или  $y \in f(B)$  и  $f^{-1}(y) \subseteq B$ . Соответственно получаем, что  $x \in A$  или  $x \in B$ , т.е.  $x \in A \cup B$  и тогда  $y = f(x) \in f(A \cup B)$ . Доказано включение  $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$ . Следовательно,  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

*Замечание.* Образ пересечения двух множеств не обязательно совпадает с пересечением их образов. Рассмотрим пример.

Пусть  $A$  и  $B$  – множества точек на плоскости:

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 2\},$$

$$B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 1\}.$$

С помощью проектирования точек на ось  $OX$  построим отображение  $A$  и  $B$  на множество  $C = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ . Так как  $f(A) = C$ ,  $f(B) = C$ , то  $f(A) \cap f(B) = C$ . Но множества  $A$  и  $B$  не пересекаются и  $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ , т.е. мы показали, что  $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ .

Теоремы 2, 3, 4 остаются в силе при любом конечном и бесконечном числе множеств. Например, теорема 2 примет вид:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_i),$$

где  $A_1, A_2, \dots$  – некоторая система множеств.

Докажем эту формулу с помощью метода математической индукции.

1. При  $n = 2$  равенство  $f^{-1}(A_1 \cup A_2) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2)$  справедливо согласно доказанной теореме 2.

2. Предположим, что равенство верно при любом  $n \leq k$ .

3. Докажем, что равенство верно при  $n = k+1$ .

Обозначим

$$B = \bigcup_{i=1}^k A_i.$$

Тогда

$$f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i) = f^{-1}(B \cup A_{k+1}) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(A_{k+1}),$$

так как для двух множеств  $B$  и  $A_{k+1}$  теорема верна. Но по предположению индукции для  $k$  множеств теорема также верна, поэтому  $f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^k A_i$ . Отсюда следует требуемое равенство.

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Какие из следующих соответствий задают отображения между множествами  $X$  и  $Y$ ?

1.  $X$  – множество точек декартовой плоскости,  $Y$  – множество точек оси абсцисс, точке плоскости ставится в соответствие абсцисса этой точки.

2.  $X = Y = N$ , числу  $x \in X$  ставится в соответствие число  $x^2$ .

3.  $X = Y = Z$ , числу  $y \in Y$  ставится в соответствие тем числам  $x \in X$ , для которых  $|x| = |y|$ .

4.  $X = Y = R$ , числу  $y \in Y$  ставится в соответствие тем числам  $x \in X$ , для которых  $x^3 = y$ .

5.  $X = Y = R$ , числу  $x \in X$  ставится в соответствие одно такое число  $y \in Y$ , что  $x = y^2$ .

Задача 2. Для каждого отображения из задачи 1 найдите полный прообраз каждого элемента  $y \in Y$ .

Задача 3. Какие из отображений задачи 1 взаимно однозначны?

Задача 4. Найдите обратные к тем отображениям задачи 1, которые взаимно однозначны.

Задача 5. Пусть  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A_1, A_2 \subset X$ . Обязательно ли верно, что:

1.  $f(X) = Y$ .

2.  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ .

3.  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ .

4.  $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$ .

5. Если  $A_1 \subset A_2$ , то  $f(A_1) \subset f(A_2)$ .

6. Если  $f(A_1) \subset f(A_2)$ , то  $A_1 \subset A_2$ .

7.  $f^{-1}(f(A_1)) = A_1$ .

Задача 6. Пусть  $f: X \rightarrow Y$ ,  $B_1, B_2 \subset Y$ . Обязательно ли верно, что:

1.  $f^{-1}(Y) = X$ .
2.  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ .
3.  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .
4.  $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ .
5. Если  $B_1 \subset B_2$ , то  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ .
6. Если  $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$ , то  $B_1 \subset B_2$ .
7.  $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$ .

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Что такое отображение (функция) между двумя множествами?
2. Как формально определить отображение из множества  $A$  в множество  $B$ ?
3. Какие существуют элементы отображения (аргумент, значение, область определения, область значений)?
4. Назовите типы отображений (инъективные, сюръективные, биективные).
5. Как доказать, что отображение инъективно (сюръективно, биективно)?
6. Что такое обратное отображение и когда оно существует?
7. Приведите примеры отображений между конечными и бесконечными множествами.
8. Что такое композиция отображений и какими свойствами она обладает?
9. Какие операции можно выполнять над отношениями (например, объединение, пересечение, дополнение, композиция)?
10. Дайте определение тождественному отображению.

## 5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### 5.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**Определение 1.** Пусть  $X$  – какое-либо числовое множество и  $N$  – множество натуральных чисел. Всякое отображение  $f: N \rightarrow X$  называется *последовательностью* элементов множества  $X$ .

Элемент  $f(n)$  обозначается через  $x_n$  и называется  $n$ -м членом последовательности  $f: N \rightarrow X$ , а сама последовательность обозначается через  $\{x_n\}$  или  $x_n, n = 1, 2, \dots$ .

Каждый элемент последовательности  $\{x_n\}$  представляет собой упорядоченную пару, состоящую из числа  $n \in N$  и соответствующего ему значения при отображении  $f: N \rightarrow X$  элемента  $x$  из множества  $X$ , т.е.  $x_n = (n, x)$ . Второй элемент пары называется значением элемента  $x_n$  последовательности  $\{x_n\}$ , а первый – его номером.

В математическом анализе последовательность – это бесконечный набор элементов, занумерованных натуральными числами. Различные элементы последовательности обязательно имеют разные номера, но их значения могут совпадать. Множество значений элементов последовательности может быть конечным.

Например, если всем  $n \in N$  поставлен в соответствие один и тот же элемент  $a \in X$ , т.е. при всех  $n \in N$  имеет место равенство  $f(n) = a$ , то множество значений последовательности  $x_n = a, n = 1, 2, \dots$ , состоит из одного элемента  $a \in X$ . Такие последовательности называются *стационарными*.

Существует два способа задания числовых последовательностей:

- 1) с помощью формулы общего члена последовательности;
- 2) с помощью рекуррентной формулы.

Задание последовательности с помощью формулы общего члена последовательности – это задание последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  с помощью формулы, выражающей зависимость члена  $x_n$  от его номера  $n$ .

**Пример 1.** Найти формулу общего члена последовательности  $x_n = \{6; 20; 56; 144; 352; \dots\}$ .

*Решение.* Запишем каждый член последовательности в следующем виде:

$$n = 1: x_1 = 6 = 2 \cdot 3 = 2^1 \cdot 3 = 2^1(2 \cdot 1 + 1);$$

$$n = 2: x_2 = 20 = 4 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5 = 2^2(2 \cdot 2 + 1);$$

$$n = 3: x_3 = 56 = 8 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7 = 2^3(2 \cdot 3 + 1).$$

Как видим, члены последовательности представляют собой произведение степени двойки, умноженной на последовательные нечетные числа, причем два возводится в степень, которая равна номеру рассматриваемого элемента.

Таким образом, делаем вывод, что  $x_n = 2^n(2n + 1)$ .

Другим способом задания последовательности является задание последовательности с помощью рекуррентного соотношения. В этом случае задается один или несколько первых элементов последовательности, а остальные определяются по некоторому правилу.

Например, известен первый член  $x_1$  последовательности и известно, что  $x_{n+1} = f(x_n)$ , т. е.  $x_2 = f(x_1)$ ,  $x_3 = f(x_2)$  и далее до нужного члена.

**Пример 2.** Примером рекуррентно заданной последовательности является последовательность чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... , в которой каждое последующее число, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих:  $2 = 1 + 1$ ;  $3 = 2 + 1$  и т.д. Данную последовательность можно задать рекуррентно:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, n \in \mathbb{N}, x_1 = x_2 = 1.$$

**Пример 3.**

1. Рассмотрим последовательность  $\{x_n\}$ , где  $x_n = (-1)^n$  – формула общего члена последовательности  $-1, 1, -1, \dots, (-1)^n$ . Множество значений этой последовательности состоит из двух чисел  $\pm 1$ .

2. Последовательность  $\{x_n\}$ ,  $x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ .

3. Последовательность  $x_n = \frac{n+1}{n} : 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$ .

Для двух числовых последовательностей можно в общем случае определить операции:

$$1) \{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \dots, x_n \pm y_n\};$$

$$2) \{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, \dots, x_n \cdot y_n\};$$

$$3) \frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}, \forall y_n \neq 0.$$

При определении частного последовательностей необходимо требовать, чтобы все элементы последовательности  $y_n$  были отличны от нуля. Заметим, однако, что если у последовательности  $y_n$  обращается в нуль лишь конечное число элементов, то частное можно определить с того номера, начиная с которого все элементы  $y_n$  отличны от нуля.

**Подпоследовательность** последовательности  $\{x_n\}$  – это последовательность  $\{x_{k_n}\}$ , где  $\{k_n\}$  – возрастающая последовательность элементов множества натуральных чисел.

Иными словами, подпоследовательность получается из последовательности удалением конечного или счётного числа элементов.

**Предельная точка последовательности** – это точка, в любой окрестности которой содержится бесконечно много элементов этой последовательности. Для сходящихся числовых последовательностей предельная точка совпадает с пределом.

## Монотонные последовательности

**Определение 2.** Числовая последовательность  $\{x_n\}$  называется *неубывающей*, если  $\forall i = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow x_{i+1} \geq x_i$  (*невозрастающей*, если  $x_{i+1} \leq x_i$ ); *возрастающей*, если начиная с некоторого номера для всех элементов справедливо:  $x_{i+1} > x_i$  (*убывающей*, если  $x_{i+1} < x_i$ ).

В целом такие последовательности называют *монотонными*. Для числовых последовательностей можно аналогично числовым множествам определить ограниченность и существование *супремума* и *инфимума*.

Примеры монотонных последовательностей:

– *возрастающая*:

1, 2, 3, 4, ... (последовательность натуральных чисел);

– *убывающая*:

10, 9, 8, 7, ... (последовательность убывающих целых чисел);

– *неубывающая, но не строго возрастающая*:

1, 1, 2, 2, 3, 3, ... (каждый следующий член либо больше предыдущего, либо равен ему);

– невозрастающая, но не строго убывающая:

5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, ... (каждый следующий член либо меньше предыдущего, либо равен ему).

**Пример 4.** Исследовать последовательность  $\{x_n\} = \{\sqrt{n}\}$  на монотонность.

*Решение.*

Рассмотрим разность  $n$ -го члена последовательности  $x_n$  и ее  $(n + 1)$ -го члена  $x_{n+1} = \sqrt{n+1}$ :

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \\ &= \frac{n - n - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n < x_{n+1}, \text{ тогда делаем} \end{aligned}$$

вывод, что  $\{x_n\}$  – возрастающая последовательность.

**Пример 5.** Исследовать последовательность  $\{x_n\} = \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}, n \geq 2$  на монотонность.

*Решение.* Найдем отношение  $n$ -го члена последовательности

$$x_n \text{ к ее } (n+1)\text{-му члену } x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}:$$

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{n!(n+1)}{2^n \cdot 2} = \frac{n+1}{2}.$$

Для  $n \geq 2$  выражение  $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n+1}{2} > 1 \Rightarrow x_n > x_{n+1}$ , то есть заданная последовательность  $\{x_n\} = \left\{\frac{2^n}{n!}\right\}, n \geq 2$  является монотонно убывающей.

## 5.2. ОГРАНИЧЕННЫЕ И НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**Определение 3.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *ограниченной сверху*, если множество ее значений ограничено сверху, т.е. существует число  $M \in \mathbb{R}$  такое, что  $x_n \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Определение 4.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *ограниченной снизу*, если множество ее значений ограничено снизу, т.е. существует число  $m \in R$  такое, что  $x_n \geq m \forall n \in N$ .

Заметим, что таких значений  $M$  и  $m$ , вообще говоря, можно привести сколь угодно. Однако интерес представляют собою те из значений, которые «максимально близки» ко множеству: то есть при ограничении сверху таковым будет значение  $M$ , самое наименьшее из всех, ограничивающих множество сверху. Аналогично – для самого «близкого ко множеству» числа, ограничивающего это множество снизу – выбирается самое наибольшее из всех наименьших. Так же заметим, что такие значения могут в общем случае как принадлежать, так и не принадлежать исходному множеству.

При этом число  $M$  (число  $m$ ) называется *верхней гранью* (*нижней гранью*) последовательности  $\{x_n\}$ , а неравенство  $x_n \leq M$  ( $x_n \geq m$ ) называется условием ограниченности этой последовательности сверху(снизу).

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *ограниченной*, если она ограничена одновременно сверху и снизу, т.е. существуют числа  $m, M \in R$  такие, что  $m \leq x_n \leq M \forall n \in N$ .

Числовые последовательности, которые не являются ограниченными, называют неограниченными последовательностями.

**Определение 5.** Числовая последовательность  $\{x_n\}$  называется *неограниченной сверху (снизу)*, если для всякого элемента существует такой, который будет больше (меньше) исходного.

**Определение 6.** Последовательность  $\{x_n\}$  называют *неограниченной*, если  $\forall A > 0, A \in R$ , можно указать хотя бы один такой элемент  $x \in \{x_n\}$  такой, что  $|x| > A$ .

**Пример 6.**

1)  $\{x_n\}$ , где  $x_n = n : 1, 2, \dots, n, \dots$  ограничена снизу ( $m = 1$ ), но не ограничена сверху (принцип Архимеда);

2) последовательность  $\{x_n\}$ ,  $x_n = (-1)^n n: -1, 2, -3, 4, \dots$  – неограниченная;

3)  $\{x_n\}$ ,  $x_n = \frac{1}{n}$ :  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  – ограничена, так как  $0 < \frac{1}{n} \leq 1, 0 < x_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ .

4)  $\{-n^2\}$ :  $-1, -4, -9, \dots, -n^2, \dots$ . Последовательность ограничена сверху ( $M \geq -1$ ) и не ограничена снизу.

### 5.3. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ И БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**Определение 7.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *бесконечно большой*, если для любого числа  $A$ , большего нуля, из множества действительных чисел, существует номер такой, что для любого натурального числа  $n$ , большего либо равному этому номеру, выполняется условие:  $|x_n| > A$  ( $\forall A > 0, A \in \mathbb{R} \exists N$  – номер такой, что  $\forall n \geq N$ , выполняется  $|x_n| > A$ ).

*Замечание.*

Любая бесконечно большая последовательность является неограниченной; однако неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой.

**Пример 7.** Последовательность  $1, 2, 1, 3, \dots, 1, n, \dots$  является неограниченной, но не является бесконечно большой, так как при  $A > 1$  неравенство  $|x_n| > A$  не имеет места для всех членов  $x_n$  с нечетными номерами.

Последовательность  $\{1, 2, 1, 4, 1, 8, \dots, 1, 2^n, \dots\}$  неограничена сверху, но бесконечно большой не является, так же является ограниченной снизу, например числом 0.

**Определение 8.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *бесконечно малой*, если для любого, сколь угодно малого числа  $\varepsilon$ , большего нуля, существует номер, зависящий от  $\varepsilon$ , такой, что для любого натурального числа  $n$ , большего или равному номеру  $N$ , выполняется условие  $|x_n| < \varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$ ).

## Предложение о сходимости элементов геометрической прогрессии

Доказать, что последовательность  $q^1, q^2, q^3, \dots, q^n \dots$  является бесконечно большой при  $|q| > 1$  и бесконечно малой при  $|q| < 1$ .

*Доказательство:*

1. Сначала рассмотрим случай  $|q| > 1$ . Тогда  $|q|$  можно представить в виде  $|1 + \delta|$ , где  $\delta > 0$ . По формуле бинома Ньютона  $|q|^N = (1 + \delta)^N = 1 + N\delta +$  положительные слагаемые  $\Rightarrow |q|^N > N\delta$ . Фиксируем произвольное  $A > 0$  и номер  $N$  такой, что  $N\delta > A$ . Из этого неравенства  $\Rightarrow N > \frac{A}{\delta}$ , поэтому выбираем  $N = \left[ \frac{A}{\delta} \right] + 1 = \left[ \frac{A}{|q|-1} \right] + 1$ , этот номер всегда будет удовлетворять  $N\delta > A$ .

Поскольку  $|q| > 1$ , то  $\forall n \geq N: |q|^n \geq |q|^N$ . Сопоставляя три неравенства, получим:  $\forall n \geq N: |q|^n \geq |q|^N > N\delta > A \Rightarrow |q|^n > A \Rightarrow \{q^n\}$  – бесконечно большая.

2. Теперь рассмотрим случай, когда  $|q| < 1$ . Исключая случай  $q = 0$ , выразим  $\frac{1}{|q|} = 1 + \delta$ , где  $\delta > 0$ . Используя бином Ньютона, аналогично первому случаю, получим  $\frac{1}{|q|^N} > N\delta$  или  $|q|^N < \frac{1}{N\delta}$ . Фиксируем произвольное  $\varepsilon$ , для которого справедливо  $\frac{1}{N\delta} < \varepsilon$ . Это неравенство эквивалентно неравенству  $N > \frac{1}{\varepsilon\delta}$ , поэтому для выбора такого номера  $N$  достаточно взять  $N = \left[ \frac{1}{\varepsilon\delta} \right] + 1 = \left[ \frac{1}{\varepsilon(1-|q|)} \right] + 1$ . Поскольку  $|q| < 1$ , то  $\forall n \geq N$  будет справедливо  $|q|^n \leq |q|^N$ .

Сопоставляя все три неравенства, получим:

$\forall \varepsilon > 0: \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |q|^n \leq |q|^N < \frac{1}{N\delta} < \varepsilon \Rightarrow |q|^n < \varepsilon \Rightarrow \{q^n\}$  – бесконечно малая. Что и требовалось доказать. В данном примере скобки  $[ ]$  обозначают операцию округления до целого, а сам метод доказательства называется усиление неравенства.

## Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей

**Теорема 1.** Пусть  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$  – бесконечно малые числовые последовательности. Тогда  $\{\alpha_n + \beta_n\}$  – тоже бесконечно малая числовая последовательность.

*Доказательство.*

По определению  $\exists N_1$  и  $N_2$  такие, что  $\forall n \geq N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon$ , и  $\forall n \geq N_2 \Rightarrow |\beta_n| < \varepsilon$ . Тогда, начиная с некоторого  $N$ ,  $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ;  $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \{\alpha_n + \beta_n\}$  – бесконечно малая, что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** Пусть  $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$  – бесконечно малые числовые последовательности. Тогда  $\{\alpha_n - \beta_n\}$  – тоже бесконечно малая числовая последовательность (доказательство аналогичное).

Следствие: алгебраическая сумма (разность) конечного числа бесконечно малых последовательностей – бесконечно малая последовательность.

**Теорема 3.** Произведение бесконечно малой числовой последовательности на ограниченную числовую последовательность – бесконечно малая числовая последовательность.

*Доказательство.*

Пусть  $\{x_n\}$  – ограниченная последовательность,  $\{\alpha_n\}$  – бесконечно малая последовательность. По определению ограниченности, найдётся такое  $A > 0$ , что  $\forall x_n \Rightarrow |x_n| \leq A$ . Фиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ .  $\{\alpha_n\}$  – бесконечно малая  $\Rightarrow$  для  $\frac{\varepsilon}{A}$  найдётся такое  $N$ , что  $\forall n \geq N \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$ . Поскольку модуль произведения равен произведению модулей, получим:  $\forall n \geq N \Rightarrow |x_n \alpha_n| = |x_n| |\alpha_n| < A \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon \Rightarrow \{x_n \alpha_n\}$  – бесконечно малая, что и требовалось доказать.

**Теорема 4.** Всякая бесконечно малая числовая последовательность ограничена.

*Доказательство.*

Пусть  $\{\alpha_n\}$  – бесконечно малая последовательность. Фиксируем некоторое положительное число  $\varepsilon$ . По определению бесконечно малой последовательности найдётся отвечающий

этому  $\varepsilon$  номер  $N$  такой, что  $|\alpha_n| < \varepsilon$  для всех номеров  $n \geq N$ . Обозначим через  $A$  наибольшее из следующих  $N$  чисел:  $\varepsilon, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|$ . Тогда очевидно, что  $|\alpha_n| \leq A$  для всех номеров  $N$ , а это и означает ограниченность последовательности  $\{\alpha_n\}$ . Теорема доказана.

**Теорема 5.** Если все элементы бесконечно малой числовой последовательности ограничены некоторым одним и тем же числом  $c$ , то  $c = 0$ .

**Теорема 6.** Произведение любого конечного числа бесконечно малых числовых последовательностей есть бесконечно малая числовая последовательность.

**Теорема 7.**

1. Пусть  $\{x_n\}$  – бесконечно большая числовая последовательность. Тогда, начиная с некоторого номера  $n$ ,  $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$  – бесконечно малая числовая последовательность ( $x_n \neq 0$ ).

2. Пусть  $\{\alpha_n\}$  – бесконечно малая числовая последовательность. Тогда, начиная с некоторого номера  $n$ ,  $\left\{ \frac{1}{\alpha_n} \right\}$  – бесконечно большая числовая последовательность,  $\alpha_n \neq 0$ .

*Доказательство.*

Во-первых, надо четко понимать, почему в формулировке теоремы имеются слова «начиная с некоторого номера». Дело в том, что у бесконечно большой последовательности могут встретиться нулевые члены и тогда последовательность  $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$  не

определена. Но вспомним определение бесконечно большой последовательности – у этой последовательности, начиная с некоторого номера  $N^*$ , все члены по модулю превосходят любое положительное число  $A$ . Следовательно, у бесконечно большой последовательности нулевых членов может быть лишь конечное число. Другими словами, начиная с номера  $N^*$ , последовательность  $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$  оказывается определенной и формулировка теоремы справедлива для  $n > N^*$ .

Докажем теперь, что  $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$  – бесконечно малая последовательность. Пусть  $\varepsilon > 0$  – любое положительное число. Для числа  $\frac{1}{\varepsilon}$  можно указать номер  $N \geq N^*$  такой, что при  $n \geq N$  члены  $x_n$  последовательности  $\{x_n\}$  удовлетворяют неравенству  $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ . Поэтому, начиная с указанного номера  $N$ , выполняется неравенство  $\frac{1}{|x_n|} < \varepsilon$ .

Таким образом, доказано, что  $\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$  – бесконечно малая последовательность.

Доказательство второй части теоремы провести самостоятельно (оно аналогично только что приведенному).

**Пример 8.** Последовательность с общим членом  $\alpha_n = \frac{1}{n}$  является бесконечно малой, поскольку все ее члены, начиная с некоторого номера, становятся меньше любого положительного числа  $\varepsilon$ .

Действительно, неравенство  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  эквивалентно неравенству  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  и, следовательно, выполняется для всех  $n > N$  одновременно, если в качестве номера  $N$  выбрать любое целое число, которое больше, чем  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Полагая, например,  $\varepsilon = 0,001$ , получаем, что  $\frac{1}{n} < 0,001$  для всех  $n > 1000$ .

**Пример 9.** Последовательность с общим членом  $x_n = \sin \frac{1}{n}$  является бесконечно малой, поскольку для любого сколь угодно

малого числа  $\varepsilon > 0$  неравенство  $\sin \frac{1}{n} < \varepsilon$  выполняется для всех номеров  $n > \frac{1}{\arcsin \varepsilon}$ .

**Пример 10.** Последовательность  $\left\{ \frac{n^2}{n+1} \right\}$  является бесконечно большой, поскольку неравенство  $\frac{n^2}{n+1} > A$  выполняется для любого сколь угодно большого числа  $A > 0$ , начиная с некоторого номера  $N$ . Очевидно, что  $\frac{n^2}{n+1} > \frac{n^2}{n+n} = \frac{n}{2}$ . Выберем в качестве номера  $N$  любое целое число, удовлетворяющее условию  $N \geq 2A$ . Тогда неравенство  $n > N \geq 2A$  влечет за собой неравенство  $\frac{n}{2} > A$  и, следовательно,  $\frac{n^2}{n+1} > A$ .

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Зная несколько первых членов последовательности  $\{x_n\}$ , напишем формулу ее общего члена.

1.  $\left\{ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \right\}$ .
2.  $\left\{ 2, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, \dots \right\}$ .
3.  $\left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots \right\}$ .
4.  $\{-1, 2, -3, 4, \dots\}$ .
5.  $\{2, 5, 10, 17, \dots\}$ .
6.  $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \dots \right\}$ .

Задание 2. Какие из следующих последовательностей ограничены сверху или снизу?

1.  $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ ;
2.  $\{-1, -4, -9, -16, \dots\}$ ;
3.  $\{-2, 4, -8, 16, \dots\}$ .
4.  $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots \right\}$ .

$$5. x_n = n^3 + 2n.$$

$$6. x_n = \frac{n+1}{n}.$$

Задание 3. Доказать, что  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) есть бесконечно малая или бесконечно большая последовательность.

$$1) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$2) x_n = \frac{2n}{n^3 + 1};$$

$$3) x_n = \frac{1}{n!};$$

$$4) x_n = (-1)^n 0,999^n;$$

$$5) x_n = (-1)^n n;$$

$$6) x_n = 2^{\sqrt{n}}.$$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Какие существуют способы задания числовых последовательностей?
3. Что такое конечная и бесконечная последовательность? Приведите примеры.
4. Какие последовательности можно назвать монотонными.
5. Что такое ограниченная и неограниченная последовательность?
6. Приведите пример ограниченной последовательности и последовательности, которая не ограничена ни сверху, ни снизу.
7. Приведите пример последовательности, которая ограничена только сверху (или только снизу).
8. Дайте определение бесконечно большой и бесконечно малой последовательности.
9. Приведите пример последовательности, которая ограничена и сверху, и снизу.
10. В чем заключается связь между последовательностями и функциями?

## 6. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

### 6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим последовательность с общим членом  $a_n = \frac{n+1}{n}$ , при  $n \rightarrow \infty$  члены последовательности неограниченно приближаются к 1. На языке математического анализа выражение «неограниченно приближается» означает, что какое бы малое число  $\varepsilon$  мы ни взяли, начиная с некоторого номера  $N$ , все члены последовательности будут сколь угодно мало отличаться от 1.

**Определение 1.** Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такой номер  $N$ , что при всех  $n > N$  выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Обозначение  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Кратко определение предела записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N (|x_n - a| < \varepsilon).$$

Неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$  равносильно двойному неравенству  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ , которое показывает, что элементы  $x_n$  при некотором  $n > N$  находятся в окрестности точки  $a$ . Поэтому геометрически определение предела формулируется так.

**Определение 2.** Число  $a$  называется *пределом* последовательности  $\{x_n\}$ , если для любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  найдется такое натуральное число  $N(\varepsilon)$ , что все значения  $x_n$ , для которых  $n > N$ , попадут в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$  (рис.6.1).

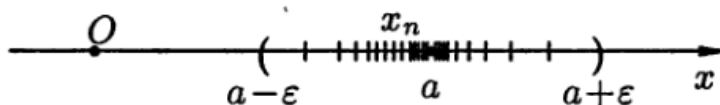


Рис. 6.1

Ясно, что чем меньше  $\varepsilon$ , тем больше число  $N$ , но в любом случае внутри  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее находится лишь конечное число членов последовательности.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а не имеющая предела – *расходящейся*.

Например, последовательность  $x_n = (-1)^n$  не имеет предела.

*Замечание.*

Из определения предела числовой последовательности следует, что, если последовательность сходящаяся, то удаление любого конечного числа элементов последовательности не влияет на сходимость этой последовательности и, в частности, на величину её предела.

Пояснение: если удалить  $n$ -й элемент, то всегда будет существовать такой номер, зависящий от  $\varepsilon$ , что  $n + 1 \geq N(\varepsilon)$ .

Если последовательность не является сходящейся, то её называют *расходящейся*:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \pm\infty$ .

**Теорема 1.** Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

*Доказательство.*

Для доказательства утверждения применим метод от противного.

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A_1$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A_2$ . Если  $A_1 \neq A_2$ , то фиксируем непересекающиеся окрестности  $U(A_1)$  и  $U(A_2)$  точек  $A_1, A_2$ . В качестве таковых можно взять, например,  $\delta$ -окрестности этих точек при  $\delta < \frac{1}{2} |A_1 - A_2|$ . По определению предела последовательности найдем числа  $N_1, N_2$  такие, что все члены последовательности  $x_n$  с номерами  $n > N_1$  попадут в окрестность точки  $A_1$ , а с номерами  $n > N_2$  в окрестность точки  $A_2$ .

Тогда при  $n > \max\{N_1, N_2\}$  получим  $x_n \in U(A_1) \cap U(A_2)$ . Но это невозможно, так как пересечение  $U(A_1) \cap U(A_2) = \emptyset$ .

**Теорема 2.** Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена. Обратное неверно.

*Доказательство.*

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ . Полагая в определении предела  $\varepsilon = 1$ , найдем номер  $N$  такой, что  $\forall n > N$  справедливо неравенство  $|x_n - A| < 1$ . Значит, при  $n > N$  имеем  $|x_n| < |A| + 1$ .

Если же теперь взять  $M > \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|, |A| + 1\}$ , то получим, что  $\forall n > N$  все члены последовательности ограничены  $|x_n| < M$ .

**Пример 1.** Доказать, что последовательность  $\{x_n\} = 0,(3)$  ограничена и сходится к  $a = 1/3$ .

*Доказательство.*

Зафиксируем  $\forall \varepsilon > 0$ . Докажем, что справедливо

$$\exists N=N(\varepsilon): \forall n \geq N \rightarrow \left| x_n - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon.$$

Так как всякое вещественное число может быть представлено бесконечной десятичной дробью, то заметим, что  $1/3 = 0,(3)$  ( $n$  раз).

Применим правило сравнения (правило упорядочивания) вещественных чисел.

Тогда можно получить, что  $0,(3) < \frac{1}{3} < 0,(3) + \frac{1}{10^n}$  и выполняется оно при  $\forall n$ .

Свернем неравенство в модуль:

$$\left| x_n - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^N} < \varepsilon, \text{ что и следовало доказать.}$$

Ранее было установлено в предложении о сходимости геометрической прогрессии, что может быть  $N = \left[ \frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)} \right] + 1$ .

$$q = 0,1 \rightarrow N = \left[ \frac{|0,1|}{\varepsilon(0,9)} \right] + 1 = \frac{1}{9\varepsilon} + 1.$$

**Пример 2.** Используя определение предела последовательности, докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ .

Решение. Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим модуль разности между  $n$ -м членом последовательности и числом 1:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}.$$

В соответствии с определением предела последовательности мы должны указать номер  $N$  такой, что  $\forall n > N$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon. \quad (1)$$

Для отыскания номера  $N$  решим неравенство (1) относительно  $n$ . Получим

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. \quad (2)$$

Из неравенства (2) следует, что в качестве  $N$  можно взять целую часть числа  $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ :  $N = [\frac{1}{\varepsilon} - 1]$ . В самом деле, если  $n > N$ , то  $n \geq [\frac{1}{\varepsilon} - 1] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ , т.е. справедливо неравенство (2), а значит,  $\forall n > N$  выполняется неравенство (1).

Итак, для произвольного  $\varepsilon > 0$ , мы указали такой номер  $N = [\frac{1}{\varepsilon} - 1]$ , что  $\forall n > N$  выполняется неравенство  $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$ . Это и означает по определению предела последовательности, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ .

**Пример 3.** Пусть  $x_n = C$ . Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = C$ .

*Доказательство.*

Пусть  $\varepsilon$  – произвольное положительное число. Очевидно, неравенство  $|C - C| < \varepsilon$  выполнено, а это означает, что неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$  верно при  $n \geq 1$  и условие, сформулированное в определении предела, выполнено с  $n_0 = 1$ .

**Определение 3.** Последовательность, все члены которой совпадают, называется *стационарной*.

Мы доказали, что предел стационарной последовательности равен общему члену этой последовательности.

**Теорема 3.** Пусть даны сходящиеся последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\} = b$ .

Тогда:

1)  $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$  – сходящаяся последовательность  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n + y_n\} = a + b$ ;

2)  $\{x_n\} - \{y_n\} = \{x_n - y_n\}$  – сходящаяся последовательность  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n - y_n\} = a - b$ ;

3)  $\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$  – сходящаяся последовательность  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n \cdot y_n\} = a \cdot b$ .

4)  $\{x_n\} : \{y_n\} = \{x_n : y_n\}$  – сходящаяся последовательность при  $y_n \neq 0$ .

*Доказательство*

$$1) \begin{cases} x_n - a = \alpha_n \\ y_n - b = \beta_n \end{cases} \rightarrow (x_n + y_n) - (a + b) = \alpha_n + \beta_n = 0 \rightarrow x_n + y_n = a + b$$

$$2) \begin{cases} x_n - a = \alpha_n \\ y_n - b = \beta_n \end{cases} \rightarrow (x_n - y_n) - a + b = \alpha_n - \beta_n = 0 \rightarrow x_n - y_n = a - b$$

3) и 4) доказать самостоятельно.

### **Следствия из теоремы**

1. Даны числовые последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ . Пусть, хотя бы начиная с некоторого номера, для всех элементов последовательностей  $x_n, y_n$  выполняется неравенство  $x_n \leq y_n$ , тогда справедливо, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\}$ .

*Доказательство.*

По условию, с некоторого значения  $n$  выполняется  $y_n - x_n \geq 0 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n - x_n\} \geq 0$ .

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n - x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\} - \lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} \geq 0$ , что и требовалось доказать.

2. Если все элементы сходящейся числовой последовательности лежат в одном сегменте  $\forall n \rightarrow (x_n \in \{x_n\}) \in \langle a; b \rangle$ , то и предел этой последовательности лежит в этом сегменте  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = c, c \in \langle a; b \rangle$ .

### **Теорема о двух милиционерах**

Пусть  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  — сходящиеся числовые последовательности с общим пределом, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\} = a$ .

Пусть, хотя бы начиная с некоторого номера, элементы последовательности  $\{z_n\}$  удовлетворяют неравенству

$$x_n \leq z_n \leq y_n,$$

тогда последовательность  $\{z_n\}$  сходится к  $a$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = a$ ).

*Доказательство.*

*1-й способ:* Так как  $x_n \leq z_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{y_n\}$  и так как пределы  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  равны, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = a$ .

*2-й способ.* По определению

$$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n \geq N_1; \\ |y_n - a| < \varepsilon \text{ при } n \geq N_2. \end{cases}$$

При фиксированном  $\varepsilon$  и некотором  $N^*$  в силу неравенства будет выполняться  $|x_n - a| \leq |z_n - a| \leq |y_n - a|$ .

Выберем максимальное значение из  $N_1, N_2, N^*$ . Тогда

$$|z_n - a| \leq \varepsilon (\max\{N_1, N_2, N^*\});$$

$$|z_n - a| \leq \max(|x_n - a|, |y_n - a|), |y_n - a| < \varepsilon, |x_n - a| < \varepsilon \rightarrow$$

$\rightarrow |z_n - a| < \varepsilon, n \geq \max\{N_1, N_2, N^*\}$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 4.** Если все элементы сходящейся последовательности  $\{x_n\}$ , по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству  $x_n \geq b$  ( $x_n \leq b$ ), то и предел этой последовательности удовлетворяет неравенству  $x_n \geq b$  ( $x_n \leq b$ ).

*Замечание 1.* Если все элементы сходящейся последовательности  $\{x_n\}$  удовлетворяют строгому неравенству  $x_n > b$ , то отсюда, вообще говоря, не вытекает, что и предел этой последовательности удовлетворяет строгому неравенству.

*Следствие 1.* Если все элементы двух сходящихся последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , по крайней мере начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству  $x_n \leq y_n$ , то и пределы этих последовательностей удовлетворяют такому же неравенству  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

*Следствие 2.* Если все элементы сходящейся последовательности  $\{x_n\}$  находятся на сегменте  $[a, b]$ , то и предел этой последовательности лежит на сегменте  $[a, b]$ .

## 6.2. ЧАСТИЧНЫЕ ПРЕДЕЛЫ, ВЕРХНИЙ И НИЖНИЙ ПРЕДЕЛЫ.

### ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО – ВЕЙЕРШТРАССА

Пусть  $\{x_n\}$  – некоторая числовая последовательность. Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность

целых положительных чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$  ( $k_n \geq n$ ). Выберем из  $\{x_n\}$  члены с номерами  $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ :  $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$ .

Полученная числовая последовательность  $\{x_{k_n}\}$  называется *подпоследовательностью* последовательности  $\{x_n\}$ .

**Теорема 4.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то любая подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$  сходится к  $a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Определение 4.** Число  $a$  называется *предельной точкой* (или *частичным пределом*) последовательности  $\{x_n\}$ , если из последовательности  $\{x_n\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$ , сходящуюся к  $a$ .

Можно и по-другому сформулировать определение предельной точки (определения эквивалентны).

**Определение 5.** Число  $a$  называется *предельной точкой* последовательности  $\{x_n\}$ , если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  содержится бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}$ .

**Утверждение 1.**

1. Если  $\{x_n\} \rightarrow a, n \rightarrow \infty$ , то любая подпоследовательность  $\{x_{k_n}\} \rightarrow a$ .

2. Если все подпоследовательности  $\{x_{k_n}\}, \{x_{m_n}\}, \dots$  сходятся к одному и тому же  $a$ , то  $\{x_n\} \rightarrow a$ .

**Лемма.** Любая сходящаяся последовательность имеет предельную точку, эта точка единственная и совпадает с пределом этой последовательности.

*Доказательство.*

По определению предела последовательность  $\{x_n\}$  имеет предел, то есть существует окрестность предельной точки, в которую попадают все точки  $\{x_n\}$ , следовательно, по определению получаем предельную точку. Остаётся доказать, что она единственная. Доказательство строится от обратного. Если существует другая предельная точка, то получим противоречие утверждению 1.

**Пример 4.**

Рассмотрим ограниченную числовую последовательность:

$$\left\{ \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}, \dots \right\}.$$

Рассмотрим подпоследовательность из элементов с нечётными и чётными номерами:

$$x_{k_n} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$x_{m_n} = \left\{ 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots \right\} \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Значит, общей предельной точки нет, их две.

*Замечание:* ограниченная последовательность может иметь бесконечное множество предельных точек.

**Определение 6.** Наибольшая (наименьшая) предельная точка последовательности  $\{x_n\}$ , ограниченной сверху (снизу), называется *верхним (нижним) пределом* этой последовательности и обозначается  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  ( $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ).

Очевидно, если  $\{x_n\}$  сходится, то  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Если последовательность  $\{x_n\}$  не ограничена сверху (снизу), то полагают  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

**Теорема 5.** У всякой ограниченной последовательности существует верхний и нижний пределы и по крайней мере одна предельная точка.

*Следствие 1.*

Если последовательность ограничена, у нее существуют верхний и нижний предел, тогда, начиная с некоторого номера, зависящего от некоторого  $\varepsilon > 0$ , все элементы исходной последовательности принадлежат сегменту  $(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - \varepsilon; \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \varepsilon)$ .

*Следствие 2.*

Если последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, существуют верхний и нижний пределы и дан промежуток  $(a; b)$ , вне которого лежит не более чем конечное число элементов исходной последовательности, тогда

$$\left( \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \subseteq (a; b);$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b - a.$$

**Пример 5.** Доказать расходимость последовательности  $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ .

Рассмотрим две подпоследовательности этой последовательности  $\{x_{2k}\} = \{1\}$  и  $\{x_{2k-1}\} = \{-1\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Очевидно, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = -1$ . Таким образом, последовательность  $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$  имеет две предельные точки: 1 и  $-1$ , а поэтому не может быть сходящейся, поскольку сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку.

**Пример 6.** Найти все предельные точки последовательности  $\{\sin n^\circ\}$ , верхний и нижний пределы этой последовательности.

Каждое из чисел  $0, \pm \sin 1^\circ, \pm \sin 2^\circ, \dots, \pm \sin 89^\circ, \pm 1$  встречается в последовательности бесконечно много раз, поскольку  $\forall n, k \in \mathbb{N}: \sin n^\circ = \sin(360^\circ k + n^\circ)$ . Поэтому каждое указанное число является предельной точкой последовательности  $\{\sin n^\circ\}$ . Других предельных точек последовательность не имеет, так как если число  $a$  не совпадает ни с одним из этих 181 чисел, то существует окрестность точки  $a$ , не содержащая ни одного члена последовательности. Из найденных 181 предельных точек наименьшей является  $-1$ , а наибольшей 1.

**Пример 7.** Пусть  $x_n = \frac{2+(-1)^n \cdot 3}{2}$ . Доказать, что предела не существует.

*Доказательство.*

Последовательность имеет два значения:  $1/2$  – при нечетных  $n$  и  $5/2$  при четных. Если взять в качестве  $a$  произвольное число, отличное от этих двух значений, то в окрестность радиуса  $\varepsilon_0 = \min(|a - 1/2|, |a - 5/2|)$  не попадет ни один член последовательности. Следовательно, такое число  $a$  не может быть пределом. Если взять  $a = -1/2$  и положить  $\varepsilon_0 = 1$  (можно взять любое число, не превосходящее расстояния между точками  $-1/2$  и  $5/2$ ), то в эту окрестность не попадет ни один член последовательности с четным номером, и, следовательно, нет такого номера, начиная с которого, в окрестность попадут все члены последовательности. Аналогично, если предположить  $a = 5/2$ .

## Теорема Больцано – Вейерштрасса

Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

*Доказательство.*

Так как последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, все ее элементы принадлежат некоторому отрезку  $[a, b]$ , который обозначим через  $\sigma_0$ . Поделим пополам отрезок  $[a, b]$  и в качестве  $\sigma_1$  возьмем ту его половину, к которой принадлежит бесконечное число элементов  $\{x_n\}$ . Выберем какой-либо элемент  $x_{k_1} \in \sigma_1$ . Снова поделим  $\sigma_1$  пополам и возьмем  $\sigma_2$ , содержащее бесконечное число элементов  $\{x_n\}$ . Выберем  $x_{k_2} \in \sigma_2$  с номером  $k_2 > k_1$  (это всегда можно сделать, так как в  $\sigma_2$  бесконечное число элементов).

Продолжая этот процесс, получим последовательность отрезков  $\sigma_k = [a_k, b_k]$ , таких, что каждый последующий принадлежит предыдущему, а  $d_k = b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда по принципу вложенных отрезков существует точка  $C \in \sigma_k$  для всех  $k$ . Очевидно, выбранная таким образом подпоследовательность  $\{x_{k_m}\}$  имеет своим пределом  $C$ .

Теорема показывает, как устроены множества всех предельных точек любой ограниченной последовательности.

Все предельные точки принадлежат отрезку  $[\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n]$ .

## Монотонные последовательности

Замечание: монотонная последовательность имеет предел, если она ограничена.

Докажем теорему Вейерштрасса, основную теорему о монотонных последовательностях.

**Теорема.**

1. Всякая монотонно возрастающая (неубывающая) и ограниченная сверху последовательность имеет предел.

2. Всякая монотонно убывающая (невозрастающая) и ограниченная снизу последовательность имеет предел.

*Доказательство.*

Докажем первое утверждение. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  не убывает,  $x_n \leq x_{n+1} \forall n \in N$ , и ограничена сверху. Всякое ограниченное сверху числовое множество имеет точную верхнюю границу (верхнюю грань)  $a = \sup\{x_n: n \in N\}$  и  $x_n \leq a \forall n \in N$ .

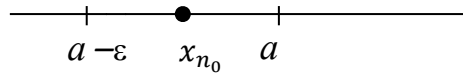


Рис. 6.2

Какое бы положительное число  $\epsilon$  мы не взяли, число  $(a - \epsilon)$  не является верхней границей последовательности  $\{x_n\}$ , т.е. существует номер  $n_0$  такой, что  $a - \epsilon < x_{n_0}$  (рис. 6.2).

Тогда, учитывая, что последовательность  $\{x_n\}$  неубывающая, для всех  $n > n_0$  имеем  $a - \epsilon < x_{n_0} < x_n \leq a < a + \epsilon$ .

Итак,  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$ , т.е.  $|x_n - a| < \epsilon$ , а это означает, что число  $a$  является пределом последовательности  $\{x_n\}$ .

Теорема доказана.

*Замечание.*

Отметим, что для монотонных последовательностей ее элементы приближаются к пределу с одной стороны. Для немонотонных последовательностей возможно приближение к пределу с обеих сторон.

### 6.3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

**Определение 7.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю, т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Определение 8.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *бесконечно большой*, если для всякого сколь угодно большого числа  $M > 0$  существует такой номер  $N = N(M)$ , начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют неравенству  $|x_n| > M$ .

С геометрической точки зрения это означает, что в любой окрестности нуля находится лишь конечное число членов последовательности, а вне ее – бесконечно много.

Если последовательность  $\{x_n\}$  – бесконечно большая, то пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Если при этом, начиная с некоторого номера, все члены бесконечно большой последовательности положительны (отрицательны), то пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty (-\infty)$ . Отметим, что бесконечно большая последовательность не является сходящейся и символическая запись  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  означает только, что последовательность  $\{x_n\}$  является бесконечно большой, но вовсе не означает, что она имеет предел.

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной, поскольку вне любой окрестности нуля имеется член последовательности (даже все члены, начиная с некоторого номера). Обратное неверно: неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой.

**Пример 8.** Пусть  $x_n = n^{(-1)^n}$ . Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$ : а) неограниченная; б) не является бесконечно большой.

*Решение.*

1) заметим, что  $\forall M > 0$  член последовательности с номером  $n = 2([M]+1)$  равен  $n$  и больше  $M$ . Это и означает по определению, что  $\{x_n\}$  – неограниченная последовательность.

2) очевидно, что в интервале  $(-2, 2)$  находятся все члены последовательности  $\{x_n\}$  с нечетными номерами, а значит, в этом интервале находится бесконечно много членов последовательности. Отсюда следует, что  $\{x_n\}$  не является бесконечно большой.

**Пример 9.** Доказать  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^3 + 3n) = -\infty$ .

*Доказательство.*

Возьмем  $M > 0$  и попытаемся найти номер  $n_0$ , начиная с которого будет выполняться неравенство

$$-n^2 + 3n < -M.$$

Это неравенство – квадратное и его можно решить точно, но мы поступим иначе. В определении бесконечно большой величины требуется найти номер  $n_0$  такой, что неравенство  $x_n < -M$  будет выполняться для всех номеров  $n$ , следующих за  $n_0$ , но при этом не требуется, чтобы  $n_0$  был наименьшим номером, обладающим таким свойством. Поэтому оценим сначала данную величину

$-n^2 + 3n < -(n - 3)^2$  (эта оценка верна, если  $n > 3$ ) и найдем  $n_0$ , начиная с которого верно неравенство  $-(n - 3)^2 < M$ .

Решая это неравенство, получим  $n > \sqrt{M} + 3$ , следовательно, можно взять  $n_0 = [\sqrt{M}] + 4$ . Тогда неравенство  $-n^2 + 3n < -M$  тоже будет выполнено, что и требовалось доказать.

**Теорема 7.** Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

*Доказательство.*

Пусть  $x_n$  и  $y_n$  – бесконечно малые последовательности. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существуют номера  $n_1(\varepsilon/2)$  и  $n_2(\varepsilon/2)$  такие, что для всех  $n > n_1(\varepsilon/2)$  выполняется неравенство  $|x_n| < \varepsilon/2$  и  $\forall n_2(\varepsilon/2) \Rightarrow |y_n| < \varepsilon/2$ . Тогда, полагая  $n_0 = \max(n_1(\varepsilon/2), n_2(\varepsilon/2))$ , получим, что для любого  $n > n_0 \Rightarrow |x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ .

Следовательно,  $\{x_n \pm y_n\}$  – бесконечно малая последовательность.

**Теорема 8.** Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью.

*Доказательство.*

Пусть  $\{x_n\}$  – бесконечно малая последовательность, а  $\{y_n\}$  – ограниченная последовательность, т.е. существует такое число  $M > 0$ , что для всех натуральных номеров выполняется неравенство  $|y_n| \leq M$ .

Зададим  $\varepsilon > 0$ , в силу определения бесконечно малой последовательности существует такой номер  $N$ , что для всех  $n \geq N$  выполняются неравенства  $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ . Поэтому для всех  $n \geq N$  имеем  $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$ , что и означает, что последовательность  $\{x_n y_n\}$  бесконечно малая.

*Следствие.* Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

**Теорема 9.** Если последовательность  $\{x_n\}$  – бесконечно большая, то начиная с некоторого номера  $n$  определена последовательность  $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ , которая является бесконечно малой. Если

последовательность  $\{x_n\}$  – бесконечно малая и  $\forall n x_n \neq 0$ , то последовательность  $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$  является бесконечно большой.

**Пример 10.** Доказать, что последовательность  $\{a^n\}$  является:

а) бесконечно большой при  $|a| > 1$ ;

б) бесконечно малой при  $|a| < 1$ .

*Доказательство.*

1. Докажем, что последовательность  $\{a^n\}$  удовлетворяет определению бесконечно большой, т.е.  $\forall M > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N$  выполняется неравенство

$$|a|^n > M. \quad (1)$$

Зададим произвольное  $M > 0$ . Для отыскания номера  $N$  решим неравенство (1) относительно  $n$ . Получим

$$n > \log_{|a|} M. \quad (2)$$

Положим  $N = \lceil \log_{|a|} M \rceil$ . Тогда  $\forall n > N$  выполняется неравенство (2), а значит, и неравенство (1). Таким образом,  $\forall M > 0 \exists N = \lceil \log_{|a|} M \rceil$  такое, что  $\forall n > N: |a|^n > M$ . Это и требовалось доказать.

2. Если  $a = 0$ , то  $a^n = 0 \forall n$  и, следовательно,  $\{a^n\}$  – бесконечно малая. Пусть  $a \neq 0$ . Тогда  $a_n = \left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)^{-1}$ . Так как  $\left|\frac{1}{a}\right| > 1$ , то

последовательность  $\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^n\right\}$  является бесконечно большой, а

последовательность  $\left\{\left(\left(\frac{1}{a}\right)^n\right)^{-1}\right\}$  – бесконечно малой в силу

теоремы 3. Таким образом, последовательность  $\{a^n\}$  – бесконечно малая при  $|a| < 1$ .

### **Основные теоремы о пределах**

**Теорема 10.** Для того чтобы последовательность  $\{a^n\}$  имела пределом число  $A$ , необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде  $\{a^n\} = A + \{\alpha_n\}$ , где  $\{\alpha_n\}$  – бесконечно малая последовательность.

**Теорема 11.** Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Тогда:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$ ;

в) если  $b \neq 0$ , то начиная с некоторого номера определена последовательность  $\left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{a}{b}$ .

Мы уже знакомы с пределами некоторых последовательностей. Следовательно, уже можем вычислять пределы последовательностей, составленных из этих известных с помощью арифметических действий.

Но часто требуется вычислить предел последовательности, к которой невозможно применить теорему об арифметических свойствах пределов.

Например,  $x_n = \frac{3n^3 + 2n + 5}{6n^3 + 7}$ . Здесь при  $n \rightarrow \infty$  числитель и знаменатель являются бесконечно большими последовательностями и теорема о пределе частного неприменима. Про такую дробь говорят, что она *не определена* при  $n \rightarrow \infty$  или, что она представляет собой неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right)$  называют *неопределенностью типа  $\frac{0}{0}$* . Аналогично определяют неопределенности типа  $\frac{\infty}{0}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ . В этих случаях теорема 11 неприменима.

#### 6.4. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И КРИТЕРИЙ КОШИ

Пусть дана числовая последовательность  $\{x_n\}$ . Она называется *фундаментальной*, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): \forall n \geq N, \forall p = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

**Определение 9.** Фундаментальной называется числовая последовательность, обладающая следующими свойствами:

1)  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): x_N \in \{x_n\}$ ,  $\varepsilon$ -окрестности которого находятся все элементы последовательности  $\{x_n\}$  с номерами больше либо равными  $N$ ;

2) это ограниченная последовательность.

### Основная теорема (критерий Коши).

Для того чтобы числовая последовательность  $\{x_n\}$  была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

*Доказательство.*

1. Необходимость.

Пусть  $\{x_n\}$  сходится к  $x$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$ .  
 $\{x_n\} \rightarrow x \Rightarrow$  для  $\frac{\varepsilon}{2} \exists N: \forall n \geq N: |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ , а также для любого натурального  $p$   $|x_{n+p} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

По свойству модуля  $\forall n \geq N$  и  $\forall p$ :

$$|x_{n+p} - x| = |(x_{n+p} - x) + (x - x_n)| \leq |x_{n+p} - x| + |x_n - x| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \{x_n\}$  – фундаментальная.

2. Достаточность.

Пусть  $\{x_n\}$  – фундаментальная. Чтобы доказать её сходимость, достаточно доказать ограниченность и то, что верхний  $\bar{x}$  и нижний  $\underline{x}$  пределы совпадают.

Последовательность  $\{x_n\}$  ограничена по свойству фундаментальной последовательности. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ , тогда  $\exists x_N$  такой, что вне интервала  $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$  лежит не более чем конечное число элементов  $\{x_n\}$ .

Следовательно, интервал  $(\underline{x}, \bar{x})$  обязан находиться в интервале  $(x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon) \Rightarrow \bar{x} - \underline{x} \leq (x_N + \varepsilon) - (x_N - \varepsilon) = 2\varepsilon$ .

Таким образом, для любого  $\varepsilon > 0$  справедливо:

$$0 \leq \bar{x} - \underline{x} \leq 2\varepsilon.$$

Поскольку  $\varepsilon$  может быть любым положительным числом, из неравенства следует, что  $\bar{x} - \underline{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \underline{x}$ .

Итак,  $\{x_n\}$  ограничена, её верхний и нижний пределы совпадают, следовательно,  $\{x_n\}$  – сходящаяся, что и требовалось доказать.

**Пример 11.** Найти предел последовательности, заданной в следующей рекуррентной форме  $x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}$ .

*Решение.*

Все члены данной последовательности очевидно неотрицательны. Заметим, что, если  $x_n < 3$ , то и  $x_{n+1} < 3$ . Но, поскольку  $x_1 = 1 < 3$ , то и все члены последовательности не превосходят 3. То есть последовательность ограничена сверху. С другой стороны, имеем оценку:

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n+6} - x_n = \frac{x_n + 6 - x_n^2}{\sqrt{x_n + 6} + x_n} > 0 \text{ при } x_n < 3.$$

Следовательно, данная последовательность монотонно возрастает и сходится.

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ , из условия задачи следует, что  $A^2 = A + 6$ , откуда  $A = 3$ .

**Число  $e$**

Рассмотрим последовательность  $\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ .

Согласно неравенству Бернулли  $(1+x)^n \geq 1+nx$ ,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2.$$

Обозначим  $y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 2$ .

Тогда для последовательности  $\{y_n\}$  имеем

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n : \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n-1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}.$$

Согласно неравенству Бернулли, получим  $\frac{y_{n-1}}{y_n} \geq 1$ . То есть последовательность  $\{y_n\}$  монотонно убывает и ограничена снизу числом 2. Следовательно, она имеет конечный предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Итак, последовательность  $\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$  тоже имеет предел.

Этот предел принято обозначать  $e$ .

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cong .. 2, 7182818.$$

**Пример 12.** Вычислить предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{1 + n - 2n^2}$ .

Решение. При  $n \rightarrow \infty$  числитель и знаменатель стремятся к бесконечности (являются бесконечно большими). Действительно,  $3n^2 - 2n + 1 = n^2 \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow \infty$  так как  $\frac{2}{n}$  и  $\frac{1}{n^2}$  – бесконечно малые величины, а последовательность  $\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$  ограничена как сходящаяся. Аналогично, знаменатель тоже стремится к бесконечности. Поэтому сразу применить теорему о пределе отношения нельзя (мы имеем так называемую неопределенность вида  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ), сначала вынесем в числителе и в знаменателе старшую степень  $n^2$ , после чего применим теорему о пределе частного:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{1 + n - 2n^2} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - 2\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - 2\right)} = \\ &= \frac{3 - 2 \cdot 0 + 0}{0 + 0 - 2} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Пример 13.** Вычислим предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{1 + n^2}$ .

Решение.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{1 + n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 - \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = 0,$$

так как при  $n \rightarrow \infty$  числитель  $\left(2 - \frac{3}{n}\right)$  является ограниченной последовательностью (она имеет предел, равный 2), а знаменатель  $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$  – бесконечно большая функция, а обратная к ней

$\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$  бесконечно малая, а произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является бесконечно малой функцией.

### ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  (указать  $N(\varepsilon)$ ).

- 1)  $a_n = \frac{3n-2}{2n-1}, a = \frac{3}{2}$ ;      2)  $a_n = \frac{4n-1}{2n+1}, a = 2$ ;  
 3)  $a_n = \frac{7n+4}{2n+1}, a = \frac{7}{2}$ ;      4)  $a_n = \frac{2n-5}{3n+1}, a = \frac{2}{3}$ ;  
 5)  $a_n = \frac{7n-1}{n+1}, a = 7$ ;      6)  $a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}, a = \frac{4}{3}$ ;  
 7)  $a_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3}, a = -\frac{1}{2}$ ;      8)  $a_n = \frac{4n-3}{2n+1}, a = 2$ ;  
 9)  $a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}, a = -\frac{1}{2}$ ;      10)  $a_n = -\frac{5n}{n+1}, a = -5$ .

Задание 2. Доказать ограниченность или неограниченность последовательностей  $\{x_n\}$ .

- 1)  $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ ;      2)  $x_n = 2n$ ;      3)  $x_n = \ln n$ ;      4)  $x_n = \sin n$ ;  
 5)  $\{x_n\} = 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \dots$ ;      6)  $x_n = 2^{(-1)^n n}$ ;      7)  $x_n = \frac{1}{n!}$ ;  
 8)  $x_n = \frac{n^4}{n^4+16}$ ;      9)  $x_n = (1+(-1)^n)n$ ;      10)  $x_n = \frac{n^2+1}{n}$ .

Задание 3. Установить, являются ли последовательности  $\{x_n\}$  бесконечно большими, бесконечно малыми или не являются ни бесконечно большими, ни бесконечно малыми.

- 1)  $x_n = n^k (k < 0)$ ;      2)  $x_n = n^k (k > 0)$ ;      3)  $x_n = (1+(-1)^n)n$ ;  
 4)  $x_n = (-1)^n 0,999^n$ ;      5)  $x_n = n(-1)^n$ ;      6)  $x_n = \frac{n}{2n^3+1}$ ;  
 7)  $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ ;      8)  $\{x_n\} = 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, \dots$ ;  
 9)  $x_n = \log_2(\log_2 n) (n \geq 2)$ ;      10)  $x_n = \frac{n^4}{n^4+16}$ .

Задание 4. Вычислить пределы числовых последовательностей.

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}$ ;  | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}$ ;    |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}$ ;  | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}$ ;    |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$ ;  | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}$ ;    |
| 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}$ ;  | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$ ;    |
| 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$ ; | 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3}$ . |

Задание 5. Вычислить пределы числовых последовательностей.

- |   |   |
|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n-1}}$ ;       | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n-n}}$ ;               |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}$ ; | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3-n}}$ ;                          |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3+4}}{4\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^5+n}}$ ;  | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n-9n^2}}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}$ ;                       |
| 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}$ ;  | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^5+1}}$ ; |
| 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1} - 5n}$ ;                | 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2-n}}$ .                        |

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Определение числовой последовательности.
2. Определение предела числовой последовательности.
3. Что значит, что последовательность сходится?
4. Что значит, что последовательность расходится?
5. Конечный и бесконечный пределы.
6. Приведите примеры сходящихся и расходящихся последовательностей.
7. Свойства сходящихся последовательностей (сумма, разность, произведение, частное пределов).
8. Теорема о единственности предела.

9. Связь между пределом последовательности и пределом функции.

10. Свойства монотонных последовательностей.

11. Теорема о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности.

12. Вычисление пределов с использованием определения.

13. Вычисление пределов с использованием свойств пределов.

14. Примеры применения пределов в различных задачах (например, в геометрии, физике).

15. Связь предела последовательности с понятием непрерывности.

16. Примеры числовых последовательностей, которые могут быть использованы для иллюстрации различных свойств пределов.

17. Теорема Вейерштрасса о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности.

18. Предел последовательности  $\epsilon$  (число Эйлера).

## 7. СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

### 7.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ В ВИДЕ ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКА

Задать функцию означает установить правило (закон), с помощью которого по данным значениям независимой переменной следует находить соответствующие им значения функции. Рассмотрим некоторые способы задания функций.

#### Табличный способ

Довольно распространенный способ, который заключается в задании таблицы отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции. Такой способ задания функции применяется в том случае, когда область определения функции является дискретным конечным множеством.

Например

$x$	-3	-1	0	2	3	4
$y$	-6	-2	0	4	6	8

При табличном способе задания функции можно приближенно вычислить не содержащиеся в таблице значения функции, соответствующие промежуточным значениям аргумента. Для этого используют способ интерполяции.

Преимущества табличного способа задания функции состоят в том, что он дает возможность определить те или другие конкретные значения сразу, без дополнительных измерений или вычислений. Однако в некоторых случаях таблица определяет функцию не полностью, а лишь для некоторых значений аргумента и не дает наглядного изображения характера изменения функции в зависимости от изменения аргумента.

#### Графический способ

Заметим, что всякую линию на плоскости можно определить выражением  $f(x,y) = 0$ . В случае, если такое выражение можно разрешить относительно одной из переменных величин, например  $y$ , можно прийти к следующему определению:

**Определение 1.** Графиком функции  $y = f(x)$  называется множество точек  $(x;y)$ , координаты которых связаны соотношением  $y = f(x)$ . Само равенство  $y = f(x)$  называется уравнением данного графика.

График функции – это множество точек  $(x; y)$ , где  $x$  – это аргумент, а  $y$  – значение функции, которое соответствует данному аргументу. На рис. 7.1 изображена точка  $M(1,2)$ , принадлежащая графику прямой линии.

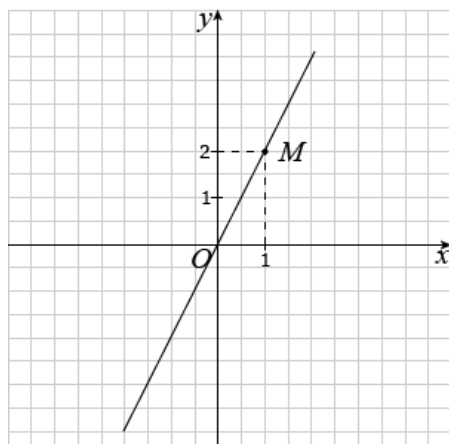


Рис. 7.1

Проще говоря, график функции показывает множество всех точек, координаты которых можно найти, просто подставив в функцию любые числа вместо  $x$ .

Графический способ задания функции не всегда дает возможность точно определить численные значения аргумента. Однако он имеет большое преимущество перед другими способами – наглядность. В технике и физике часто пользуются графическим способом задания функции, причем график бывает единственно доступным для этого способом.

Отметим, что не всякое множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции. Например, на рис. 7.2 изображено соответствие, которое не является функцией  $y = f(x)$ . Отсюда можно сделать вывод: здесь и далее при упоминании о функции вида  $y = f(x)$  – будем понимать однозначные функции: каждому  $x$  соответствует единственный  $y$ , а каждому  $y$  – хотя бы один  $x$ .

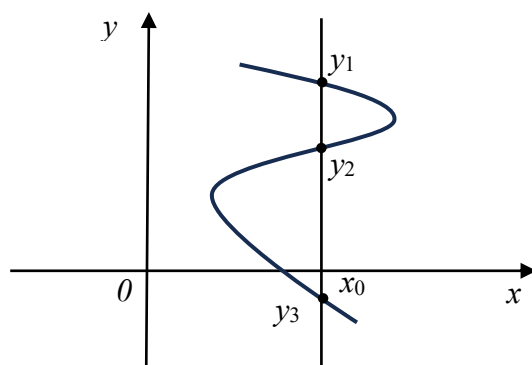


Рис. 7.2

### Аналитический способ

Чаще всего закон, устанавливающий связь между аргументом и функцией, задается посредством формул. Такой способ задания функции называется аналитическим. Этот способ дает возможность по каждому численному значению аргумента  $x$  найти соответствующее ему численное значение функции  $y$  точно или с некоторой точностью.

Если зависимость между  $x$  и  $y$  задана формулой, разрешенной относительно  $y$ , т.е. имеет вид  $y = f(x)$ , то говорят, что функция от  $x$  задана в явном виде. Если же значения  $x$  и  $y$  связаны некоторым уравнением вида  $F(x, y) = 0$ , т.е. формула не разрешена относительно  $y$ , то говорят, что функция  $y = f(x)$  задана неявно.

Например,  $y = x^2$  – явная функция,  $0 = x^3 + y^2$  – неявная функция.

**Определение 2.** Пусть заданы две функции  $f: X \rightarrow Y, f(x) = y$  и  $\varphi: Y \rightarrow Z, \varphi(y) = z$ . Функция  $\psi: X \rightarrow Z, \psi(x) = z$  называется композицией (суперпозицией) функций  $\varphi$  и  $f$  или *сложной* функцией. Обозначают:  $\varphi \circ f(x)$  или  $\varphi f(x)$ .

Итак, по определению,  $\varphi f(x) = z = \varphi(y) = \varphi(f(x))$ . Поэтому сложную функцию называют еще функцией от функции. При этом функцию  $\varphi$  называют внешней, функцию  $f$  – внутренней.

Например,  $y = \sin(x+1)$ . Эта функция – сложная. Внутренняя функция  $f$  здесь равна  $x+1$ , а внешняя функция  $\varphi$  – это синус.

## 7.2. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ

К основным характеристикам поведения функции относятся: нули функции и интервалы знакопостоянства, четность или нечетность, периодичность, монотонность (убывание и возрастание) и экстремумы (максимумы и минимумы), выпуклость или вогнутость и точки перегиба, ограниченность и наибольшее и наименьшее значения, асимптоты.

Дадим определения некоторых основных характеристик поведения функции, известные из элементарной математики, другие же будем вводить по мере необходимости и расширения арсенала методов исследования.

### 1. Нули функции.

Нулями функции  $y = f(x)$  называются корни уравнения  $f(x) = 0$ , т.е. значения аргумента  $x$ , при которых функция обращается в нуль. Другими словами, нуль функции – это точка, в которой график функции пересекает ось  $Ox$ .

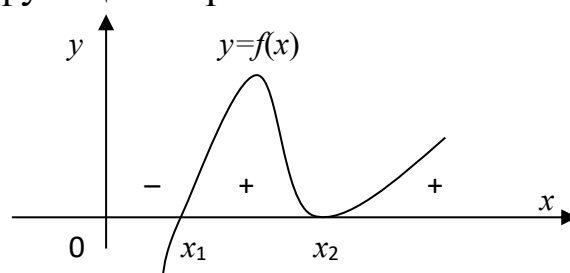


Рис. 7.3

На рис.7.3 точки  $x_1, x_2$  – нули функции,  $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$ .

### 2. Четность функции.

Функция  $y = f(x)$  называется *четной*, если:

а) область определения функции  $D(f)$  симметрична относительно начала координат;

б)  $f(-x) = f(x), \forall x \in D(f)$ .

Функция  $y = f(x)$  называется *нечетной*, если:

а) область определения функции  $D(f)$  симметрична относительно начала координат;

б)  $f(-x) = -f(x), \forall x \in D(f)$ .

Функция, не являющаяся четной или нечетной, называется *функцией общего вида*. График четной функции симметричен относительно оси  $Oy$ . График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

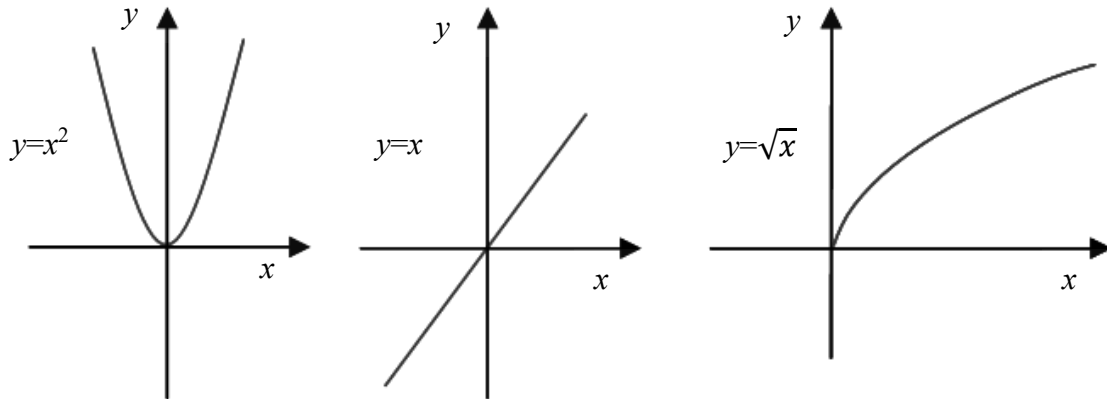


Рис. 7.4. Примеры четности функций

### 3. Периодичность функции.

Функция  $y = f(x) \neq const$  называется *периодической*, если  $\exists t \neq 0$  такое, что

- а)  $x + t, x - t \in D(f), \forall x \in D(f)$ ;
- б)  $f(x \pm t) = f(x)$ .

Число  $t$  при этом называют периодом функции. Если функция  $y = f(x)$  – периодическая, то ее наименьший положительный период  $T$  называют основным периодом. Поэтому любой период функции имеет вид  $kT$ , где  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ . График периодической функции состоит из повторяющихся фрагментов.

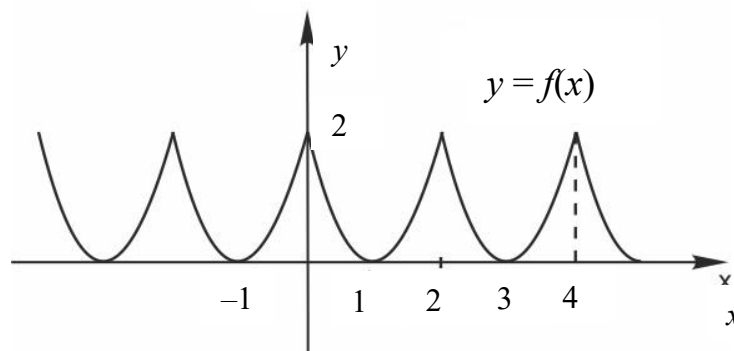


Рис. 7.5. График периодической функции

**Пример 1.** Доказать, что функция  $y = \{x\}$  ( $\{x\}$  – дробная часть числа  $x$ ) является периодической.

Очевидно, что числа  $x$  и  $x+k$  имеют одинаковую дробную часть, т. е.  $\{x\} = \{x+k\}$ . Значит, любое целое число и является периодом функции  $\{x\}$ , а основной период  $T = 1$ .

#### 4. Монотонность функции

Функция  $y = f(x)$  называется *возрастающей* (неубывающей) на интервале  $(a;b)$  если  $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$  таких, что  $x_1 < x_2$  выполняется неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) \leq f(x_2)$ ).

Функция  $y = f(x)$  называется *убывающей* (невозрастающей) на интервале  $(a;b)$  если  $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$  таких, что  $x_1 < x_2$  выполняется неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$  ( $f(x_1) \geq f(x_2)$ ).

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются *монотонными*.

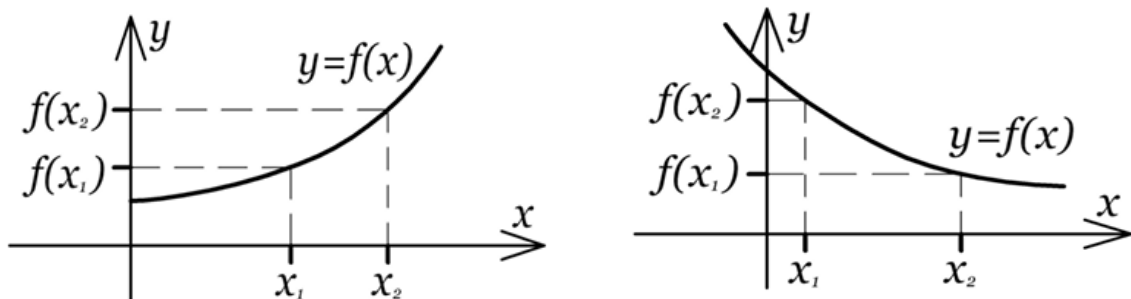


Рис. 7.6. Возрастающая и убывающая функции

Геометрические изображения позволяют убедиться в справедливости следующих утверждений:

1. Если функция  $y = f(x)$  четна и возрастает при  $x > 0$ , то она убывает при  $x < 0$ .

2. Если функция  $y = f(x)$  четна и убывает при  $x > 0$ , то она возрастает при  $x < 0$ .

3. Если функция  $y = f(x)$  нечетна и возрастает при  $x > 0$ , то она возрастает и при  $x < 0$ .

4. Если функция  $y = f(x)$  нечетна и убывает при  $x > 0$ , то она убывает и при  $x < 0$ .

5. Монотонная функция не может быть периодической.

Рассмотрим монотонную и однозначную функцию  $y=f(x)$ ,  $x \in \langle a;b \rangle$ ,  $\forall y \in \langle \alpha;\beta \rangle \exists !x \in \langle a;b \rangle$ . Тогда можно сказать, что на сегменте  $\langle a;b \rangle$  задана функция  $x = f^{-1}(y)$  – *обратная* к  $y = f(x)$ .

**Утверждение 1.** Каждая строго монотонная функция  $f: X \rightarrow R$ , определенная на числовом множестве  $X \subset R$ , обладает обратной

функцией  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , которая определена на множестве  $Y = f(X)$  значений функции  $f$  и имеет на  $Y$  тот же характер монотонности, какой имеет функция  $f$  на множестве  $X$ .

*Доказательство.*

Отображение  $f: X \rightarrow Y = f(X)$  сюръективно, т.е. является отображением на множество  $Y$ .

Пусть для определенности  $f: X \rightarrow Y$  возрастает на  $X$ . В этом случае

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X (x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)). \quad (7.1)$$

Таким образом, отображение  $f: X \rightarrow Y$  в различных точках принимает различные значения, т.е. оно инъективно. Следовательно,  $f: X \rightarrow Y$  биективно, т.е.  $f$  – взаимно однозначное отображение  $X$  на  $Y$ .

Значит, определено обратное отображение  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , задаваемое формулой  $x = f^{-1}(y)$ , если  $y = f(x)$ .

Сопоставляя определение отображения  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  с соотношением (7.1) и приходим к выражению

$$\forall y_1 \in Y \forall y_2 \in Y (f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Leftrightarrow y_1 < y_2), \quad (7.2)$$

означающему, что функция  $f^{-1}$  возрастает на области своего определения. Случай, когда  $f: X \rightarrow Y$  убывает на  $X$ , очевидно, разбирается аналогично.

### **Свойства монотонных функций.**

1. Если функция  $y = f(x)$  ( $x \in \langle a; b \rangle$ ) монотонна, то у неё существует левый и правый пределы в любой внутренней точке сегмента  $\langle a; b \rangle$ , и кроме того, существует левый предел  $b$  и правый предел  $a$ .

2. Если функция  $y = f(x)$  строго монотонна на сегменте  $\langle a; b \rangle$ , то и обратная к ней функция также строго монотонна.

3. Пусть функция  $y = f(x)$  – строго монотонна и непрерывна на сегменте  $\langle a; b \rangle$ . Тогда любое число  $\gamma \in \langle a; \beta \rangle$  определяется как значение исходной функции.

4. Из строгой монотонности и непрерывности исходной функции на сегменте  $\langle a; b \rangle$  следует существование, строгой монотонности и непрерывности функции, обратной к исходной.

5. Из существования обратной функции, определённой к исходной, непрерывной на сегменте  $\langle a; b \rangle$  функции  $y = f(x)$ , следует, что исходная функция монотонна.

**Пример 2.** Исследовать на монотонность функцию  $y = x^3$ .

Эта функция является нечетной; значит, достаточно провести сначала исследование для промежутка на  $[0, +\infty]$ . Если  $0 < x_1 < x_2$ , то  $x_1^3 < x_2^3$ . Значит, из  $x_1 < x_2$  следует  $f(x_1) < f(x_2)$ , т. е. функция возрастает при  $x > 0$ . Также она возрастает и при  $x < 0$ . Наконец, так как для  $x_1 < 0$  и  $x_2 > 0$  очевидно, что  $f(x_1) < f(x_2)$ , то можно сделать вывод о том, что функция возрастает не только при  $x < 0$  и при  $x > 0$ , но и на всей числовой прямой.

**Пример 3.** Исследовать на монотонность функцию  $y = x^2 + 2$ .

Данная функция четная. Если  $0 < x_1 < x_2$ , то, используя свойства числовых неравенств, получим  $x_1^2 + 2 < x_2^2 + 2$ , т. е.  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Значит, функция возрастает при  $x > 0$ . Тогда, согласно свойству 1, она убывает при  $x < 0$ .

### 5. Ограниченность функции

Функция  $y = f(x)$  называется *ограниченной снизу*, если  $\exists a \in \mathbb{R}$  такое, что  $a \leq f(x)$ ,  $\forall x \in D(f)$ . Функция  $y = f(x)$  называется *ограниченной сверху*, если  $\exists b \in \mathbb{R}$  такое, что  $f(x) \leq b$ ,  $\forall x \in D(f)$ . Функция, ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной*. Функция  $y = f(x)$  ограничена  $\Leftrightarrow \exists m > 0$  такое, что  $|f(x)| \leq m$ ,  $\forall x \in D(f)$ .

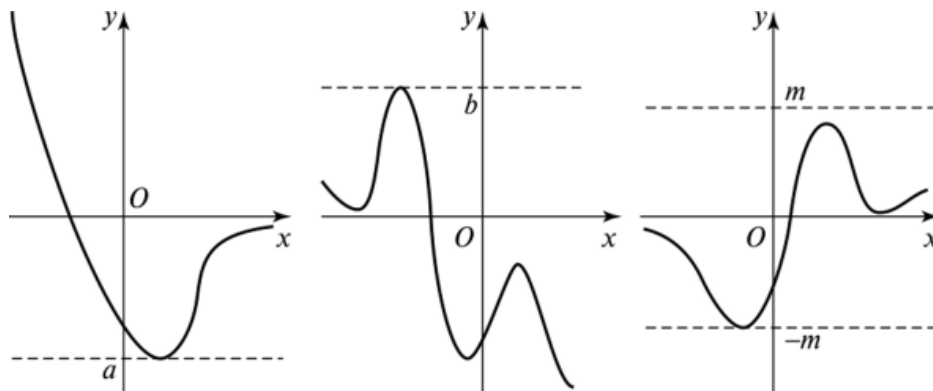


Рис. 7.7. Графики ограниченных функций

### 7.3. ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Если у нас есть произвольный график  $y = f(x)$ , то для построения графика  $y = -f(x)$  необходимо график  $y = f(x)$  симметрично отразить относительно оси  $Ox$  (рис. 7.8). Такое преобразование называется *преобразованием симметрии относительно оси  $Ox$* .

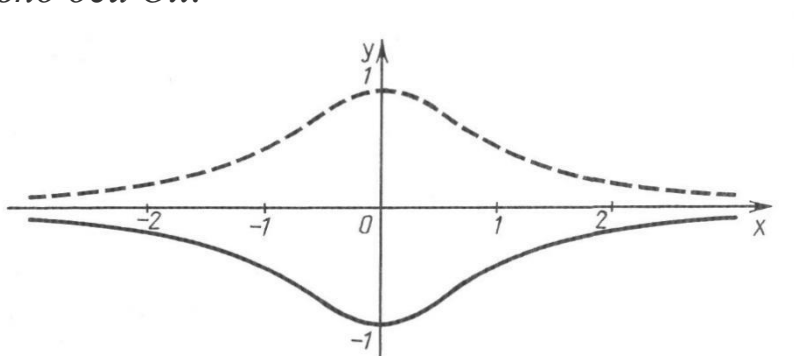


Рис. 7.8. Преобразование симметрии относительно оси  $Ox$

Преобразование симметрии – зеркальное отражение относительно прямой. На рис. 7.9 показан пример симметрии относительно оси  $Ox$  графика параболы.

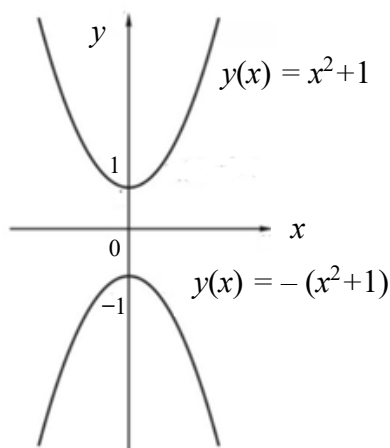


Рис. 7.9. Симметрия относительно оси  $Ox$

График  $y = f(x) + n$  получается из графика функции  $y = f(x)$  параллельным переносом последнего вдоль оси ординат на  $n$  единиц вверх, если  $n > 0$ , и на  $|n|$  единиц вниз, если  $n < 0$  (рис. 7.10).

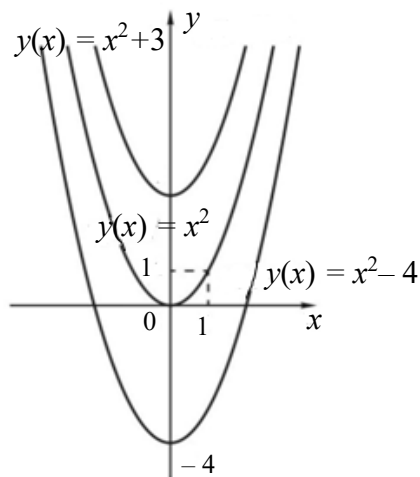


Рис. 7.10. Параллельный перенос вдоль оси  $Oy$

Чтобы построить график функции  $y = kf(x)$ , где  $k > 0$  и  $k \neq 1$ , нужно ординаты точек заданного графика умножить на  $k$ . Такое преобразование называется растяжением от оси  $Ox$  с коэффициентом  $k$ , если  $k > 1$ , и сжатием к оси  $Ox$ , если  $0 < k < 1$  (рис. 7.11).

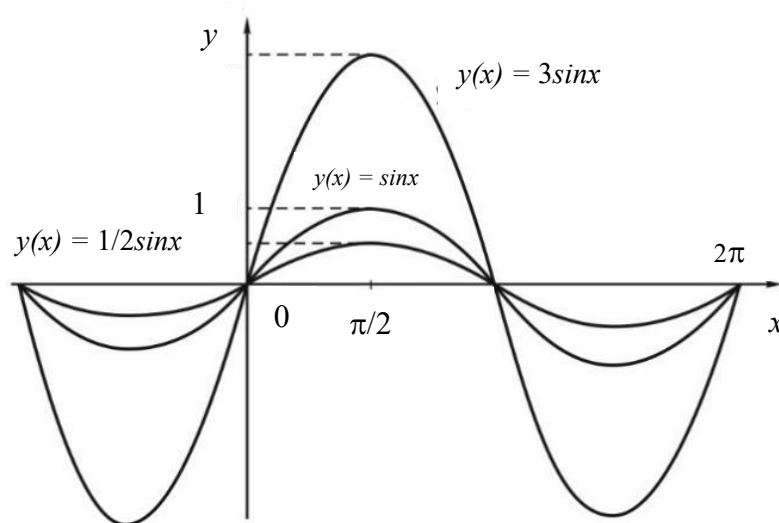


Рис. 7.11. Растяжение от/к оси  $Ox$

График  $y = f(x + k)$  получается из графика функции  $y = f(x)$  параллельным переносом на  $k$  единиц влево, если  $k > 0$ , и на  $|k|$  единиц вправо, если  $k < 0$  (рис. 7.12).

График функции  $y = f(kx)$ , где  $k > 0$  и  $k \neq 1$ , получается из графика функции  $y = f(x)$  сжатием с коэффициентом  $k$  к оси  $Oy$

(если  $0 < y < 1$ , то указанное «сжатие» фактически является растяжением с коэффициентом  $1/k$ ) (рис. 7.13).

График  $y = f(-x)$  получается из графика функции  $y = f(x)$  преобразованием симметрии относительно оси  $Oy$  (рис. 7.14).

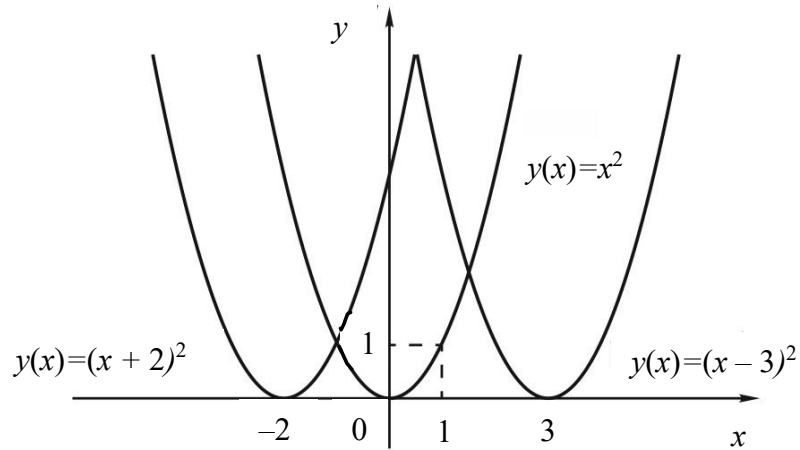


Рис. 7.12. Параллельный перенос влево при  $k > 0$  и вправо при  $k < 0$

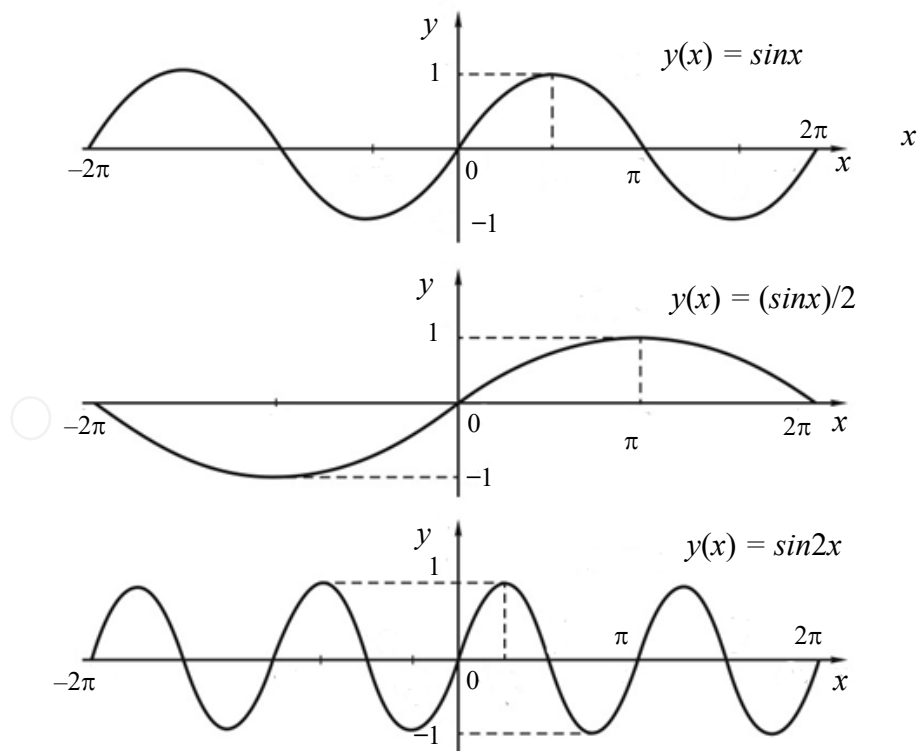


Рис. 7.13. Сжатие / растяжение к оси  $Oy$

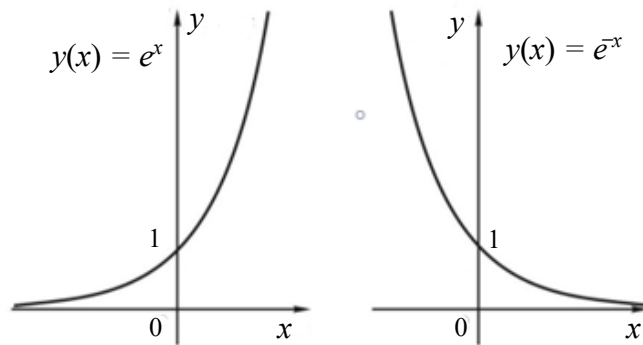


Рис. 7.14. Преобразование симметрии относительно оси  $Oy$

### Построение графиков $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$

Пусть дан график  $y = f(x)$ , построим график  $y = |f(x)|$ . Для начала раскроем модуль по определению:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Следовательно, те точки, в которых значения функции положительны или равны 0, остаются на месте, а все точки, в которых значения отрицательны, отражаются относительно оси  $Ox$  (рис. 7.15).

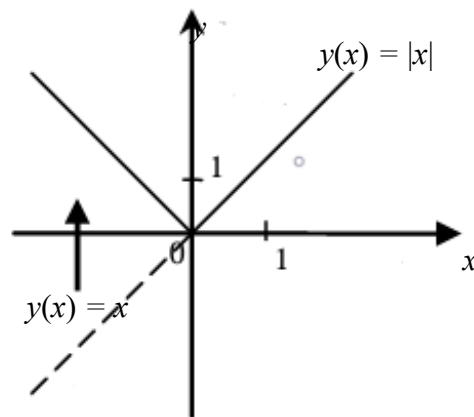


Рис. 7.15. Графики функций  $y = f(x)$  и  $y = |f(x)|$

Для того чтобы построить график  $y = f(|x|)$ , нужно часть исходного графика, лежащую выше оси  $Ox$ , оставить без изменения, а нижнюю отразить вверх относительно оси  $Ox$ .

Пусть дан график  $y = f(x)$ , построим график  $y = f(|x|)$ . Для начала раскроем модуль по определению:

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ -f(x), & f(x) < 0. \end{cases}$$

Следовательно, все точки с положительными или равными нулю абсциссами остаются без изменения, а все точки с отрицательными заменяются точками с противоположными абсциссами (рис. 7.16).

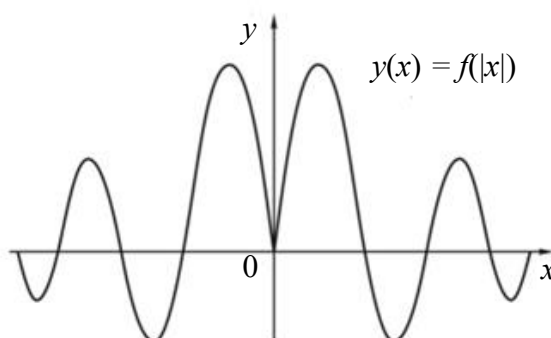


Рис.7.16. График функции  $y = f(|x|)$

**Пример 3.** Построим график функции  $y = (x + 3)^2 - 1$ .

*Решение.*

Это парабола, сдвинутая на 3 единицы влево по оси  $Ox$  и на 1 единицу вниз по оси  $Oy$  (рис. 7.17). Вершина будет в точке с координатами  $(-3; -1)$ .

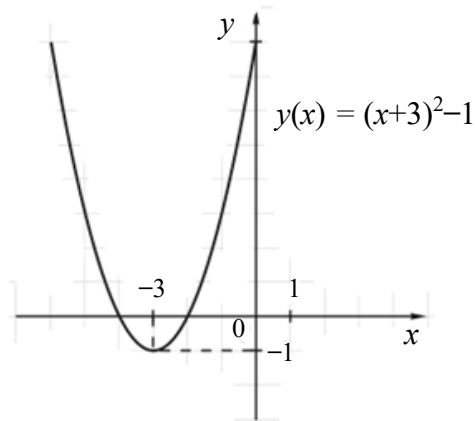


Рис.7.17.

**Пример 4.** Построим график функции  $y = x^2 - 4x - 1$ .

*Решение.*

Выделим полный квадрат в формуле.

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 - 1 = x^2 - 4x + 4 - 5 = (x - 2)^2 - 5.$$

График – парабола, сдвинутая на 2 единицы вправо по оси  $Ox$  и на 5 единиц вниз по оси  $Oy$  (рис. 7.18).

Обратите внимание: график функции  $y = ax^2 + bx + c$  пересекает ось  $Oy$  в точке  $(0;c)$ . На нашем графике это точка с координатами  $(0;-1)$ .

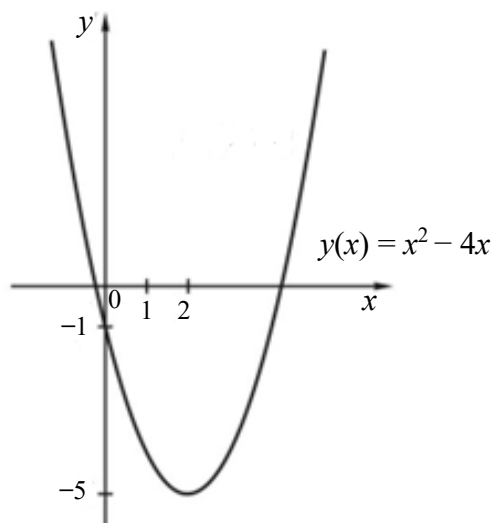


Рис.7.19.

## ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

### Вариант 1

Задание 1. Постройте график линейной функции, определите, проходит ли график функции через указанную точку:  $y = 2x - 5$ ,  $Z(-21; -47)$ .

Задание 2. Постройте график квадратичной функции, укажите множество значений данной функции:  $y = -(x + 3)^2 - 2$ .

Задание 3. Постройте график функции, определите, возрастает или убывает указанная функция:  $y = -x^3 - 1$ .

Задание 4. Постройте график функции  $y = \sqrt{x+2} - 1$ , укажите наименьшее значение функции.

Задание 5. Постройте график функции, содержащей знак модуля:  $y = \left|1 - \frac{1}{4}x\right|$ .

### Вариант 2

Задание 1. Постройте график линейной функции, определите, проходит ли график функции через указанную точку:  $y = \frac{1}{2}x - 2$ ,  $B(42; 19)$ .

Задание 2. Постройте график квадратичной функции, укажите множество значений данной функции:  $y = -(x + 4)^2 + 5$ .

Задание 3. Постройте график функции, определите, возрастает или убывает указанная функция:  $y = (x - 3)^2 - 2$ .

Задание 4. Постройте график функции  $y = \sqrt{x - 1} + 2$ , укажите наименьшее значение функции.

Задание 5. Постройте график функции, содержащей знак модуля:  $y = \left|3 - \frac{1}{2}x\right|$ .

### Вариант 3

Задание 1. Постройте график линейной функции, определите, проходит ли график функции через указанную точку:  $y = -\frac{1}{3}x + 5$ ,  $C(-33; 6)$

Задание 2. Постройте график квадратичной функции, укажите множество значений данной функции:  $y = (x - 4)^2 - 7$ .

Задание 3. Постройте график функции, определите, возрастает или убывает указанная функция:  $y = -(x + 2)^3$ .

Задание 4. Постройте график функции  $y = \sqrt{x+3}+1$ , укажите наименьшее значение функции.

Задание 5. Постройте график функции, содержащей знак модуля:  $y = \left| \frac{1}{2}x - 4 \right|$ .

#### **Вариант 4**

Задание 1. Постройте график линейной функции, определите, проходит ли график функции через указанную точку:  $y = -2x - 3$ ,  $D(-40;77)$ .

Задание 2. Постройте график квадратичной функции, укажите множество значений данной функции:  $y = x^2 + 2x + 1$ .

Задание 3. Постройте график функции, определите, возрастает или убывает указанная функция:  $y = (x + 2)^3$ .

Задание 4. Постройте график функции  $y = \sqrt{x - 4} - 2$ , укажите наименьшее значение функции.

Задание 5. Постройте график функции, содержащей знак модуля:  $y = \left| 1 - \frac{1}{3}x \right|$ .

#### **Вариант 5**

Задание 1. Постройте график линейной функции, определите, проходит ли график функции через указанную точку:  $y = -2x + 5$ ,  $D(-44;67)$ .

Задание 2. Постройте график квадратичной функции, укажите множество значений данной функции:  $y = x^2 + 2x + 2$ .

Задание 3. Постройте график функции, определите, возрастает или убывает указанная функция:  $y = -(x + 2)^3$ .

Задание 4. Постройте график функции  $y = \sqrt{x+3} - 2$ , укажите наименьшее значение функции.

Задание 5. Постройте график функции, содержащей знак модуля:  $y = \left| 1 - \frac{1}{2}x \right|$ .

### **ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ**

1. Перечислите способы, с помощью которых можно задать функцию.

2. Что такое график функции?

3. Каждая ли линия на координатной плоскости задаёт функцию?

4. Как определить, является ли функция четной или нечетной по графику?

5. Какая функция называется возрастающей?

6. Какая функция называется убывающей?

7. Что такое нули функции?

8. Как определить по графику промежутки возрастания?

9. Как определить по графику промежутки убывания?

10. Каким преобразованием из известного графика  $y = ax^2$  можно получить график  $y = ax^2 + b$ ?

11. Каким преобразованием из известного графика  $y = ax^2$  можно получить график  $y = a(x + a)^2$ ?

12. Каким преобразованием из известного графика  $y = ax^2$  можно получить график  $y = a(x + a)^2 + b$ ?

## 8. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

### 8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ПО КОШИ И ПО ГЕЙНЕ

Фиксируем точку  $a$  на числовой прямой таким образом, чтобы окрестность этой точки содержала значения  $x \in X$ . Заметим, что если  $a \notin X$ , то такая окрестность называется **выколотой**.

*Определение предела функции по Гейне.*

**Определение 1.** Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если для любой последовательности значений аргумента  $\{x_n\}$  функции  $y = f(x)$  такой, что эта последовательность значений сходится к  $a$  (причем  $x_n \neq a$ ), последовательность значений функции  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  сходится к числу  $A$ , т.е. при  $\{x_n\} \rightarrow a$  следует  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \rightarrow A$ .

*Определение предела функции по Коши (на языке « $\varepsilon - \delta$ »).*

**Определение 2.**  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x: 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

*Геометрический смысл определения предела функции в точке.*

Число  $A$  называется *пределом функции  $f$  в точке  $x_0$* , если какая бы ни была полоса, ограниченная прямыми  $y = A - \varepsilon$ ,  $y = A + \varepsilon$ , всегда найдётся такая  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$ , что для всех точек из этой окрестности, не равных  $x_0$  и принадлежащих  $D(f)$ , соответствующие точки графика попадут в рассматриваемую  $\varepsilon$ -полосу (рис. 8.1).

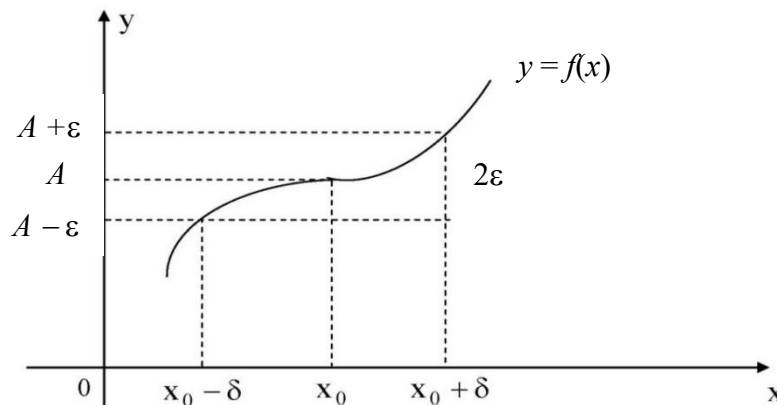


Рис. 8.1

Для  $y = f(x)$  можно определить левосторонний предел  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  и правосторонний предел  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ , а также предел при  $x \rightarrow \pm\infty$   $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ . Определения эквивалентны.

При  $x \rightarrow +\infty$

1. По Гейне:

$A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , если для любой бесконечно большой последовательности значений  $\{x_n\}$  соответствующая последовательность значений  $f(x_n)$  сходится к  $A$ , т.е.

$$\{x_n\}: |x_n| > M, M \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A.$$

2. По Коши:

$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x, |x| > \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

**Определение 3.** Число  $b$  называется *правым (левым) пределом функции*  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любого малого числа  $\varepsilon > 0$  найдётся другое малое число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех  $x \in D(f)$  и лежащих в правой (левой) окрестности точки  $x_0$ , т.е.  $x_0 < x < x_0 + \delta$  ( $x_0 - \delta < x < x_0$ ), справедливо неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

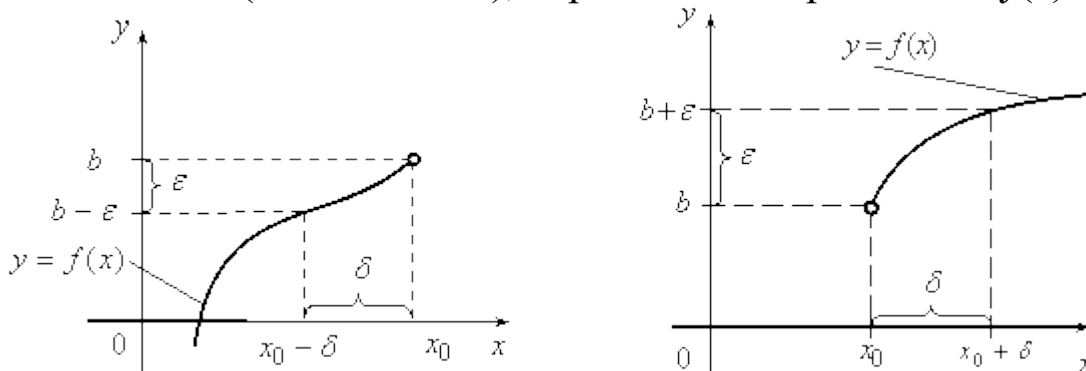


Рис. 8.2. К определению односторонних пределов функции

**Пример 1.** Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow 2} (3x+5) = 11$ .

*Решение.*

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и найдем  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству,  $|x - 2| < \delta$ , выполняется неравенство  $|(3x + 5) - 11| < \varepsilon$ , т.е.  $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ .

Взяв  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ , видим, что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству,  $|x - 2| < \delta$  ( $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ ), выполняется неравенство  $|(3x+5) - 11| < \varepsilon$ , следовательно,  $\lim_{n \rightarrow 2} (3x+5) = 11$ .

*Замечание 1.* Если  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  предел равный  $A$ , то существуют значения функции  $f(x_0+0)$  и  $f(x_0 - 0)$  и справедливо равенство  $f(x_0+0) = f(x_0 - 0) = A$ .

*Замечание 2.* Если  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  правый  $f(x_0+0)$  и левый пределы, но они не равны между собой, то в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  не имеет предела.

**Определение 4.** Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $M > 0$ , что для всех  $x$ ,  $|x| > M$  выполняется неравенство  $|A - f(x)| < \varepsilon$ . При этом предполагается, что функция  $y = f(x)$  определена в окрестности бесконечности. Записывают:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

## 8.2. КРИТЕРИЙ КОШИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Для определенности будем считать, что предел  $y = f(x)$  задан по Коши или по Гейне в точке  $a$ .

**Определение 5.** Функция  $y = f(x)$  удовлетворяет в точке  $x = a$  критерию Коши, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x', x'' \in X$ :

$$\begin{cases} |x' - a| < \delta \\ |x'' - a| < \delta \end{cases} \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

**Теорема (критерий Коши).**

Для того чтобы функция  $y = f(x)$  в точке  $x = a$  имела предел, необходимо и достаточно, чтобы эта функция в точке  $A$  удовлетворяла критерию Коши.

*Доказательство.*

*Необходимость.*

Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . В силу определения предела функции  $f(x)$  по Коши, для любого  $\varepsilon > 0$ , в том числе и для  $\frac{\varepsilon}{2}$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любых  $x'$  и  $x''$ :

$$\begin{cases} |x' - a| < \delta \\ |x'' - a| < \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2}; \\ |f(x'') - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Рассмотрим модуль разности значений функции в точках  $x'$  и  $x''$ .

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + b - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \leq \varepsilon.$$

*Достаточность.*

Пусть  $y = f(x)$  удовлетворяет критерию Коши в точке  $a$ . Пусть  $\{x_n\}$  – последовательность значений, сходящаяся к  $a$ . Фиксируем  $\varepsilon > 0$  и отвечающее ему по критерию Коши  $\delta > 0$ . Так как  $\{x_n\}$  сходится, для  $\delta \exists N: \forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \delta$ . Если  $p$  – любое положительное число, то  $|x_{n+p} - a| < \delta$  при любом  $n \geq N$ . Таким образом,  $\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \delta, |x_{n+p} - a| < \delta$ . Из этого следует, что  $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$ , а значит, последовательность  $\{f(x_n)\}$  фундаментальная и сходится к некоторому  $b$ . Докажем, что для любых двух последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{x'_n\}$ , сходящихся к  $a$ , соответствующие последовательности  $\{f(x_n)\}$  и  $\{f(x'_n)\}$  сходятся к одному и тому же пределу.

Предположим, что  $\{f(x_n)\} \rightarrow b, \{f(x'_n)\} \rightarrow b'$ . Рассмотрим последовательность  $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots$ , сходящуюся к  $a$ . В силу доказанного выше последовательность  $f(x_1), f(x'_1), \dots, f(x_n), f(x'_n), \dots$  сходится к некоторому  $b''$ . Из этого следует, что, поскольку любая подпоследовательность сходится к  $b''$ , то  $b = b' = b''$ , что и требовалось доказать.

**Пример 2.** Доказать, что функция  $f(x) = 1/x$  не имеет конечного предела справа в точке  $a = 0$ .

*Решение.*

Для доказательства покажем, что найдется такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что для любого  $\delta > 0$  найдутся такие  $x'$  и  $x''$ , удовлетворяющие условию  $0 < x' < \delta, 0 < x'' < \delta$ , что  $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon_0$ . Пусть  $\varepsilon_0 = 1$ . Зафиксируем произвольное  $\delta > 0$  и выберем  $x' = \delta/2, x'' = \delta/(2 + \delta)$ .

Тогда  $0 < x' < \delta, 0 < x'' < \delta$ , но  $|f(x') - f(x'')| = 2/\delta - 2/(\delta + 1) = 1 = \varepsilon_0$ , что и требовалось доказать.

### 8.3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

**Определение 6.** Функция  $y = f(x)$  называется *бесконечно малой* при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

По определению предела функции равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  означает, что для сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$  найдётся такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \neq x_0$  удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , будет выполняться неравенство  $|f(x)| < \varepsilon$ .

**Определение 7.** Функция  $y = f(x)$  называется *бесконечно большой* при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

По определению предела функции равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  означает, что для сколь угодно большого числа  $M$  найдётся такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$  будет выполняться неравенство  $|f(x)| > M$ .

Аналогично, можно говорить о бесконечно больших и бесконечно малых функциях при  $x \rightarrow \infty$ .

Бесконечно большие и бесконечно малые функции обладают следующими свойствами.

*Свойство 1.* Сумма конечного числа бесконечно малых функций является функцией бесконечно малой.

*Свойство 2.* Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию является функцией бесконечно малой.

*Свойство 3.* Произведение постоянной на бесконечно малую функцию является функцией бесконечно малой.

*Свойство 4.* Произведение конечного числа бесконечно малых функций является функцией бесконечно малой.

*Свойство 5.* Сумма конечного числа бесконечно больших функций является функцией бесконечно большой.

*Свойство 6.* Произведение ограниченной функции на бесконечно большую функцию является функцией бесконечно большой.

*Свойство 7.* Произведение постоянной на бесконечно большую функцию является функцией бесконечно большой.

*Свойство 8.* Функция, обратная по величине бесконечно большой, является функцией бесконечно малой.

*Свойство 9.* Функция, обратная по величине бесконечно малой, является функцией бесконечно большой.

*Замечание:* свойства 8 и 9 отражают связь между бесконечно большой и бесконечно малой функциями.

Если принять следующие обозначения: бесконечно малая функция – символ  $0$ , бесконечно большая функция – символ  $\infty$ , постоянная величина – символ  $C$ , ограниченная функция – символ  $f$ , то все изложенные свойства можно записать следующим образом:

- |                        |                                   |  |
|------------------------|-----------------------------------|--|
| 1. $[0 + 0] = 0$ .     | 4. $[0 \cdot 0] = 0$ .            | 7. $[C \cdot \infty] = \infty$ .         |
| 2. $[f \cdot 0] = 0$ . | 5. $[\infty + \infty] = \infty$ . | 8. $\left[\frac{1}{0}\right] = \infty$ . |
| 3. $[C \cdot 0] = 0$ . | 6. $[f \cdot \infty] = \infty$ .  | 9. $\left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$ . |

Для сравнения двух бесконечно малых функций  $\alpha_1(x)$  и  $\alpha_2(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  находят предел их отношения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = C.$$

1. Если  $C = 0$ , то  $\alpha_1(x)$  называется бесконечно малой функцией более высокого порядка по сравнению с  $\alpha_2(x)$ .

2. Если  $C = \infty$ , то  $\alpha_2(x)$  называется бесконечно малой функцией более высокого порядка по сравнению с  $\alpha_1(x)$ .

3. Если  $C \neq 0$ , то  $\alpha_1(x)$  и  $\alpha_2(x)$  называются бесконечно малыми функциями одного и того же порядка.

4. Если  $C = 1$ , то  $\alpha_1(x)$  и  $\alpha_2(x)$  называются эквивалентными (равносильными) бесконечно малыми:  $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ .

#### 8.4. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Первый замечательный предел:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

Вывод разобьем на 4 этапа:

1. Пусть  $x$  — центральный угол или длина дуги окружности единичного радиуса, причем  $0 < x < \pi/2$  (рис. 8.3). Сравнение площадей треугольника  $OAB$ , сектора  $AOB$  и треугольника  $OAD$  дает

$$0 < S_{\Delta OAB} < S_{\text{сек.}OAB} < S_{\Delta OAD}.$$

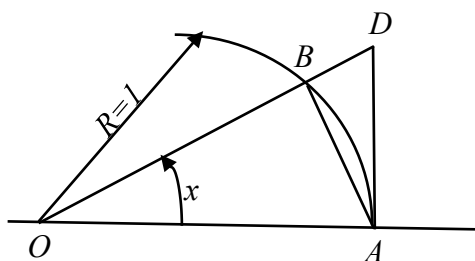


Рис. 8.3.

Но при  $OA = 1$   $S_{\Delta OAB} = (\sin x)/2$ ,  $S_{\text{сек.}AOB} = x/2$ ,  $S_{\Delta OAD} = (\text{tg}x)/2$  и поэтому  $0 < \sin x < x < \text{tg}x \forall x \in (0, \pi/2)$ .

2. Из пункта 1 и из нечетности функций получаем, что верно утверждение  $0 > \sin x > x > \text{tg}x$  при  $0 > x > -\pi/2$  и, следовательно,  $0 < |\sin x| < |x| < |\text{tg}x|$  при  $x \in U_{\pi/2}(0)$ .

3. Из пункта 2 и из теоремы о пределе промежуточной функции:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ . По теореме о замене переменной в пределе  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} = 0$ . Отсюда и из арифметических свойств предела следует, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1.$$

4. Из пункта 2 имеем  $1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|}$ . Но в  $U_{\pi/2}(0)$  функции  $x/\sin x$  и  $\cos x$  положительны, поэтому  $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ , а значит,  $1 > \frac{\sin x}{x} < \cos x$ . Отсюда, из пункта 3 и теоремы о пределе промежуточной функции получаем  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

**Второй замечательный предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .**

Ранее мы показали, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ . Докажем второй замечательный предел для вещественных  $x$ , т.е. докажем, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . Рассмотрим два случая:

1. Пусть  $x \rightarrow +\infty$ , каждое значение  $x$  заключено между двумя положительными целыми числами:  $n \leq x < n+1$ , где  $n = [x]$  – это целая часть  $x$ .

Отсюда следует:  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$ , поэтому  $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ .

Если  $x \rightarrow +\infty$ , то  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому, согласно пределу  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ .

2. Пусть  $x \rightarrow -\infty$ . Сделаем подстановку  $x = t$ , тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^1 = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Из двух этих случаев вытекает, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  для любого  $x$ .

## 8.5. СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

*Свойства предела функции, часто используемые при решении практических задач.*

Пусть даны функции  $y = f(x)$  и  $y = \varphi(x)$ :

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ , где  $C - const$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , где  $C - const$ .

3. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$  существуют, то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ .

4. Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$  существуют, то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}$ .

7. Для элементарных функций в любой точке их определения справедливо равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f \lim_{x \rightarrow x_0} x$ .

Следует отметить, что:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C}{f(x)} = \infty$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C}{f(x)} = 0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ .

Как показывает практика нахождения пределов, подстановка предельного значения аргумента часто приводит к неопределенным выражениям вида  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $(\infty - \infty)$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ . Нахождение предела функции в этих случаях называют *раскрытием неопределенности*. Неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  являются основными, так как практически все остальные пределы сводятся к ним с помощью различных математических действий. При раскрытии неопределенности вида  $\frac{0}{0}$  необходимо в числителе и знаменателе выделить выражение вида  $(x - x_0) \rightarrow 0$  и после его сокращения применить свойства пределов 1–7. Способы выделения  $(x - x_0) \rightarrow 0$  могут быть различными: применение формул сокращенного умножения, теорема Виета, нахождение корней квадратного трехчлена, умножение числителя и знаменателя на сопряженные выражения, деление многочленов на выражение  $(x - x_0) \rightarrow 0$ , а также основные результаты теории пределов, изложенные далее.

### Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ .

При  $x \rightarrow \infty$  дробно-рациональная функция стремится либо к нулю, либо к  $\infty$ , либо к конечному числу, отличному от нуля. Это зависит от степени числителя и знаменателя. Рассмотрим в общем виде:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \begin{cases} 0, & \text{если } m < n; \\ \infty, & \text{если } m > n; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

При отыскании предела отношений двух целых многочленов относительно  $x$  при  $x \rightarrow \infty$  оба члена отношения надо разделить на  $x^n$ , где  $n$  – наивысшая степень этих многочленов. Этот приём можно применить и для дробей, содержащих иррациональности, а также для раскрытия неопределенностей этого вида в числовых последовательностях.

**Пример 3.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x + 11}{x^2 + 2x + 3}$ .

Проверяем, есть ли в пределе неопределенность. При подстановке вместо  $x$  значение, к которому он стремится, т.е. в нашем случае – бесконечность, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\infty]^2 + 5[\infty] + 11}{[\infty]^2 + 2[\infty] + 3} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right]. \text{ Имеем неопределенность типа } \frac{\infty}{\infty}.$$

Вынесем в числителе и в знаменателе высшую степень  $x^2$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0:$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left( 1 + \frac{5}{x} + \frac{11}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left( 1 + \frac{5}{x} + \frac{11}{x^2} \right)}{\left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1.$$

### Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ .

Для решения задач с такими неопределенностями используют несколько приёмов: разложить на множители, умножить на сопряженное выражение числитель и знаменатель или умножить на выражение, позволяющее применить формулы сокращенного умножения.

**Пример 4.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{4+5x}-2}$ .

Здесь неопределенность вида  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . Для того чтобы избавиться от неопределенности, умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение.

**Замечание.** Сопряженными называют пары  $(a-b)$  и  $(a+b)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{4+5x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot (\sqrt{4+5x}+2)}{(\sqrt{4+5x}-2) \cdot (\sqrt{4+5x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot (\sqrt{4+5x}+2)}{(\sqrt{4+5x})^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot (\sqrt{4+5x}+2)}{4+5x-4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot (\sqrt{4+5x}+2)}{5} = \\ &= \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

**Пример 5.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4}$ . Здесь неопределенность вида  $\left[\frac{0}{0}\right]$ . Избавимся от неопределенности с помощью разложения функции на множители:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}.$$

*Первый замечательный предел.*

Для раскрытия неопределенности вида  $\frac{0}{0}$ , в которые входят тригонометрические функции, используется первый замечательный предел.

Первый замечательный предел имеет вид  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Часто используется обобщенная формула

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha x}{\sin \alpha x} = 1, \alpha = \text{const.}$$

**Пример 6.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x} = \left( \left[ \frac{0}{0} \right] \text{-неопределенность} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\underbrace{7x}_{=1}} \cdot \frac{7}{2} = \frac{7}{2}.$$

**Пример 7.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 6x}{2x}$ .

Преобразуем и воспользуемся обобщенной формулой:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 6x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7x - \frac{\sin 6x}{6x} \cdot 6x}{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x - 6x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

**Пример 8.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \text{tg} 4x}{\sin^2(2x)^2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin^2(2x)^2} \cdot \frac{\sin 4x}{\cos 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 4x}{\sin^2(2x)^2 \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{\sin 4x}{4x} 4x}{\sin^2(2x)^2 \cos 4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 1 \cdot 4x}{\frac{\sin^2(2x)^2}{2x^2} \cdot 2x^2 \cdot \frac{\sin^2(2x)^2}{2x^2} \cdot 2x^2 \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{4x^4 \cos 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \cdot 1} = \\ &= \infty. \end{aligned}$$

*Второй замечательный предел.*

Неопределенность  $1^\infty$  раскрывается при помощи второго замечательного предела:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ .

**Пример 9.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}$ .

Мы видим, что в этом пределе имеет место выражение, в котором функция стоит в функциональной степени, и этот предел нужно сводить ко второму замечательному пределу.

Воспользуемся формулой  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ , где  $t = t(x)$ . То есть  $t$  – это не переменная, а некоторое функциональное выражение,

стремящееся к нулю и зависящее от  $x$ . В нашем пределе в скобках стоит дробь, а нам нужно получить  $(1 + t)$ . Преобразуем выражение:

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x^2 - 4) + 8}{x^2 - 4} = 1 + \frac{8}{x^2 - 4}.$$

Подставим в предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{8}{x^2 - 4} \right)^{x^2}.$$

У нас  $t = \frac{8}{x^2 - 4}$ ,  $\frac{1}{t} = \frac{x^2 - 4}{8}$ . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{8}{x^2 - 4} \right)^{x^2 \cdot \frac{x^2 - 4}{8} \cdot \frac{8}{x^2 - 4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot 8}{x^2 - 4}} = e^8.$$

**Пример 10.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{x}}$ .

Так как при непосредственной подстановке  $x = 0$  получается неопределенность вида  $[1^\infty]$ , воспользуемся следствием из второго замечательного предела, предварительно преобразовав функцию.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{x}} &= [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{2x} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot \frac{3}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^2 + 1}{2x}} \right]^{\frac{2x}{x^2 + 1} \cdot \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{2x}{x^2 + 1} \cdot \frac{3}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot 3}{x^2 + 1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{x^2 + 1}} = e^6 = e^6. \end{aligned}$$

*Эквивалентные бесконечно малые величины.*

Пусть  $\alpha(x), \beta(x)$ :  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$ .

**Определение 8.** Две бесконечно малые величины называются эквивалентными, если предел их отношения равен 1 ( $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ ).

Эквивалентность бесконечно малых величин обозначается так же, как и приближенное равенство:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

**Теорема 1.** Предел отношения бесконечно малых не изменится, если заменить их эквивалентными бесконечно малыми:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}, \text{ где } \alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x).$$

На основании изложенного можно показать эквивалентность следующих функций:

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x), \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x), \operatorname{arcsin} \alpha(x) \sim \alpha(x), \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x),$$

$$\log_a(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \log_a e, \quad a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a, \quad \sqrt{1 + \alpha(x)} \sim 1 + \frac{1}{2} \alpha(x),$$

$$(1 + \alpha(x))^k \sim 1 + k\alpha(x) \text{ если } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Докажем некоторые из наиболее часто встречающихся эквивалентностей:

1.  $\sin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \text{— замечательный предел, его доказательство}$$

приведено в пособии.

2.  $\operatorname{arcsin} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ .

*Доказательство:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x}{x} = \left[ \begin{array}{l} \operatorname{arcsin} x = t \\ x = \sin t \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

3.  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$  при  $x \rightarrow 0$ .

*Доказательство:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1.$$

4.  $\ln(1+x) \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ .

*Доказательство:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1+x))^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

Остальные эквивалентности по аналогии свойств можно доказать самостоятельно.

**Пример 11.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\operatorname{tg}(4 - x^2)}$ .

Так как  $\operatorname{tg}(4 - x^2) \sim 4 - x^2$  при  $x \rightarrow 2$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{\operatorname{tg}(4 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(2 - x)(2 + x)} = -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{2 + x} = \frac{1}{4}.$$

**Пример 12.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cdot \operatorname{ctg} 6x$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cdot \operatorname{ctg} 6x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot \cos 6x}{\sin 6x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \left[ \begin{array}{l} \sin 5x \sim 5x, x \rightarrow 0 \\ \sin 6x \sim 6x, x \rightarrow 0 \end{array} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot \cos 6x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 6x}{6} = \frac{5 \cdot 1}{6} = \frac{5}{6}.$$

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Вычислить пределы.

#### Вариант №1

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 7x + 3x^2}{2 + 5x - x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5 - \sqrt{22 - x}}{1 - \sqrt{4 + x}}$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\cos x - \cos^5 x}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 5}{2x + 3} \right)^{x+1}$	6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5}$
7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} 3x}$	10. $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3x - 1}{x + 1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}}$
1. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 3)(\ln(x - 2) - \ln(x + 1))$	

#### Вариант № 2

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 + x - 10}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x^2 + x} + 3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{5 - x}}{3 - \sqrt{8 + x}}$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$	6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$
7. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{-2x}}{2 \arcsin x - \sin x}$	10. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left( \frac{\sin x}{\sin \alpha} \right)^{\frac{1}{x-\alpha}}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2)(\ln(2x+1) - \ln(2x-1))$	

### Вариант № 3

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{10 + x\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{4 - \sqrt{25-x}}{\sqrt{x-5} - 2}$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x^2)^{\frac{1}{2x^2}}$	6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - 2x}$	10. $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+2)(\ln(x+1) - \ln x)$	

### Вариант № 4

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$	4. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\cos x - \cos \alpha}{x - \alpha}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}$	6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x-1} - 1}$

7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{\sin 2x - \sin x}$	10. $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (4x - 3)(\ln(x+2) - \ln(x-1))$	

Вариант № 5

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 10x + 21}$	2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{arctg} 4x}$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}$	4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$	6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 + 3x}$
7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 5^{3x}}{\operatorname{arctg} x + x^3}$	10. $\lim_{x \rightarrow 8} \left( \frac{2x-7}{x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (8x - 3)(\ln(3x+2) - \ln(3x-1))$	

Вариант № 6

1. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 8x + 15}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+3)^2}{x^2 + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\operatorname{tg} \pi x}$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$	6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1}$
7. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\operatorname{tg}(2\pi(x+0.5))}$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\arctg x - x^2}$	10. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tg x)^{\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)}}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-2x + 3)(\ln(3x - 4) - \ln(3x - 2))$	

Вариант № 7

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 9x + 10}{x^2 + 7x + 10}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 5x + 12x^2}{2 + 3x - 6x^2}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$	4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x+x^5}$
7. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{5x} - 2^x}{x - \sin 9x}$	10. $\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tg\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 1)(\ln(x + 5) - \ln(x - 6))$	

Вариант № 8

1. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 4}{x^4 + 2x^2 - 3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{2\arctg x - \sin x}$	4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}\right)^{x^2}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+a)} - x)$	6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^3 - x - 1}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^2} - (1+x)}{x}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-1}}}$	10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \tg 2x}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-4x - 3)(\ln(7x + 4) - \ln(7x - 6))$	

Вариант № 9

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15}$
3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{12 - x} - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}$	4. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin x - \sin \alpha}{x - \alpha}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 3}{2x + 1} \right)^{x+1}$	6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x + x^2}}{x + x^2}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1 + 2x)}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12^x - 5^{-3x}}{2 \arcsin x - x}$	10. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 4)(\ln(6x + 4) - \ln(6x - 3))$	

Вариант № 10

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$	2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 - x + 2}$
3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$	4. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 - 25}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{\frac{x-3}{x+2}}$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt[3]{27 - x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x + 1))}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{-2x}}{\sin x - 2x}$	10. $\lim_{x \rightarrow 2\pi} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (-4x + 5)(\ln(5x + 4) - \ln(5x - 2))$	

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Дайте определение предела функции по Гейне и по Коши. Равносильны ли они?
2. Перечислите свойства конечного предела функции.
3. Дайте определения предела функции при  $x \rightarrow \infty$ .
4. Что называется бесконечным пределом функции при  $x \rightarrow x_0$ .
5. Дайте определения односторонних пределов функции. Сформулируйте теорему о существовании предела.
6. Сформулируйте и докажите критерий Коши существования предела функции.
7. Как связаны понятия предела функции и предела последовательности?
8. Перечислите и объясните основные свойства пределов: предел суммы, произведения, частного, константы.
9. Какие типы неопределенностей существуют? Как их раскрывать?
10. Напишите формулы первого и второго замечательных пределов.
11. Дайте определение бесконечно малых и бесконечно больших функций.

## 9. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

### 9.1. ФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть дана функция  $y = f(x)$  и точка  $x = a$ , лежащая в области определения этой функции вместе со своей  $\varepsilon$ -окрестностью. Другими словами, потребуем, чтобы точка  $a$  была предельной точкой множества  $\{X\}$  из области определения функции  $X$ .

$$f(x) : X \rightarrow Y; x=a: U_\varepsilon(a) \in X.$$

**Определение 1.** Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке  $a$ , если существует предел функции в этой точке, и он равен частному значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

**Пример 1.** Для функции  $y = x^3$  определим непрерывность в точке  $x = 3$ .

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^3 = 27 = f(3) \Rightarrow \text{функция в точке } x = 3 \text{ непрерывна.}$$

#### *Определение по Гейне*

**Определение 2.** Функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $a$ , если существует последовательность значений аргумента  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , сходящаяся к  $a$ , и при этом соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots\}$  сходится к значению  $f(a)$  (для любой последовательности  $\{x_n\}$  это справедливо).

*Замечание.*

По сравнению с определением предела функции по Гейне в определении непрерывности по Гейне опущено требование, обязывающее все элементы последовательности  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  быть отличными от  $a$ .

Это можно сделать в силу того, что добавление к элементам последовательности  $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots\}$ , сходящейся к  $f(a)$ , любого числа новых элементов, равных  $f(a)$ , не нарушит сходимости этой последовательности к  $f(a)$ .

#### *Определение по Коши*

**Определение 3.** Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке  $x = a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

*Замечание.*

По сравнению с определением предела функции по Коши в определении непрерывности по Коши опущено требование, обязывающее все значения аргумента  $x$  удовлетворять неравенству  $|x - a| > 0$ , т. е. быть отличным от  $a$ . Это можно сделать в силу того, что для значений  $x = a$  разность  $f(x) - f(a)$  равна 0 и удовлетворяет неравенству  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  при любом  $\varepsilon > 0$ .

Заметим, что в силу определения непрерывности функции в точке, так как  $a = \lim_{x \rightarrow a} x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$ . Это утверждение можно использовать при нахождении пределов непрерывных функций.

**Определение 4.** Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке  $x = x_0$ , если приращение функции в точке  $x_0$  является бесконечно малой величиной.

$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  – бесконечно малая функция при  $x \rightarrow x_0$ .

**Определение 5 (геометрическое).** Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$ .

Определение на языке  $\varepsilon - \delta$  позволяет дать следующую наглядную геометрическую интерпретацию для непрерывной функции. Рассмотрим график функции  $y = f(x)$ , непрерывной в точке  $x = a$  (рис. 9.1).

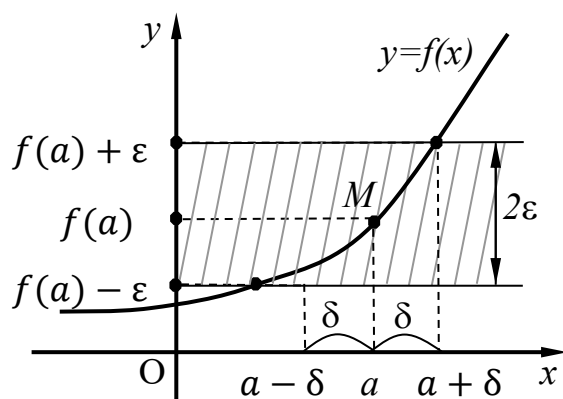


Рис. 9.1

Так как из неравенства  $|x - a| < \delta$  следует неравенство  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ , то это значит, что для всех точек  $x$ , отстоящих от  $a$  не далее, чем на  $\delta$ , точка  $M$  графика непрерывной функции  $y = f(x)$  лежит внутри полосы шириной  $2\varepsilon$  (заштрихована), ограниченной прямыми  $y = f(a) - \varepsilon$  и  $y = f(a) + \varepsilon$ . Мы можем потребовать, чтобы ширина этой полосы  $2\varepsilon$  была как угодно малой; для непрерывной функции всегда найдется соответствующее  $\delta$ , определяющее  $\delta$  – окрестность точки  $x = a$ .

**Определение 6.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна во всех точках сегмента или на сегменте, то говорят, что функция непрерывна на этом сегменте, причём существуют односторонние пределы функции на границах. Аналогично определяется непрерывность функции на множестве  $\{X\}$ .

*Замечание.*

В последнем определении важно учитывать не только существование односторонних пределов на концах, но и непрерывность справа (слева) функции на этих концах.

Односторонняя непрерывность функции  $y = f(x)$  определяется через существование односторонних пределов в соответствии с формальным определением непрерывности в точке. Если односторонний предел  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$ , то функция называется непрерывной справа (рис. 9.2).

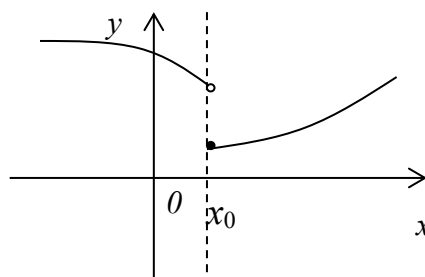


Рис. 9.2

Если односторонний предел  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ , то функция называется непрерывной слева (рис. 9.3).

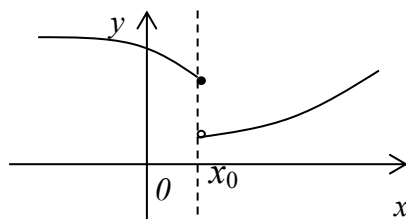
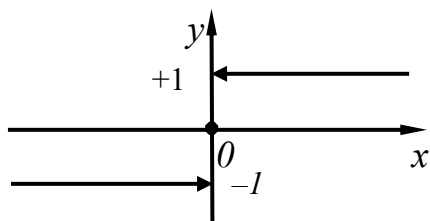


Рис. 9.3

### Пример 2.

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad \text{— функция Кронекера (рис. 9.4).$$



$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \operatorname{sgn}(x) = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sgn}(x) = +1;$$

$$\operatorname{sgn}(x)|_{x=0} = 0.$$

Рис. 9.4

Функция не является непрерывной в точке  $x_0 = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть функция  $x = \varphi(t)$  непрерывна в точке  $a$ , а функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $b = \varphi(a)$ , тогда сложная функция  $y = f(\varphi(t))$  непрерывна в точке  $a$ .

**Пример 3.** Функция  $y = x$  непрерывна на  $R$ . Действительно, для любой точки  $x_0 \in R$  имеем  $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$ , как только  $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$ .

**Пример 4.** Любая последовательность  $\{f_n\}: N \rightarrow R$  есть функция, непрерывная на множестве  $N$  натуральных чисел, поскольку каждая точка множества  $N$  является его изолированной точкой.

**Пример 5.** Функция  $y = |x|$  непрерывна на всей числовой прямой. Функция  $y = |x|$  на промежутке  $(-\infty; 0)$  совпадает с функцией  $y = -x$ , а на промежутке  $(0; +\infty)$  — с функцией  $y = x$ , которые непрерывны на этих промежутках. Осталось исследовать на непрерывность данную функцию в точке  $x = 0$ .

Поскольку  $||x_n| - 0| = |x_n - 0|$ , то для любой последовательности  $\{x_n\}$  такой, что  $\lim_{x \rightarrow 0} x_n = 0$ , верно  $\lim_{x \rightarrow 0} |x_n| = 0$ . Тогда по определению непрерывности функции, функция  $y = |x|$  непрерывна в точке  $x = 0$ .

### *Свойства непрерывных функций*

1. Сумма, разность и произведение непрерывных в точке  $x_0$  функций есть функция, непрерывная в точке  $x_0$ .

2. Частное двух непрерывных функций  $\frac{f(x)}{g(x)}$  есть непрерывная функция при условии, что  $g(x)$  не равна нулю в точке  $x_0$ .

3. Суперпозиция непрерывных функций есть непрерывная функция.

Это свойство может быть записано следующим образом. Если  $u = f(x)$ ,  $v = g(x)$  – непрерывные функции в точке  $x = x_0$ , то функция  $v = g(f(x))$  – тоже непрерывная функция в этой точке. Справедливость приведенных выше свойств можно легко доказать, используя теоремы о пределах.

### *Непрерывность некоторых элементарных функций*

1. Функция  $f(x) = C$ ,  $C = const$  – непрерывная функция на всей области определения.

2. Рациональная функция  $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$  непрерывна для всех значений  $x$ , кроме тех, при которых знаменатель обращается в ноль. Таким образом, функция этого вида непрерывна на всей области определения.

3. Тригонометрические функции ( $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$ ) непрерывны на всей своей области определения. Обратные тригонометрические функции ( $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$  и  $y = \operatorname{arcctg} x$ ) тоже непрерывны на всей своей области определения.

Докажем непрерывность функции синуса. Возьмем произвольную точку  $x_0$  из области определения синуса  $R$ . Докажем, что выполняется равенство:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x_0 + \Delta x) = \sin(x_0).$$

Воспользуемся формулой синуса суммы углов, а также арифметическими свойствами пределов:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\sin(x_0) \cos(\Delta x) + \cos(x_0) \sin(\Delta x)) =$$

$$= \sin(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(\Delta x) + \cos(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(\Delta x) = \dots$$

Теперь используем два предела  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0$

$$\dots = \sin(x_0) \cdot 1 + \cos(x_0) \cdot 0 = \sin(x_0).$$

Мы доказали, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin(x_0 + \Delta x) = \sin(x_0)$ . Это по определению означает, что функция синуса непрерывна на всей своей области определения.

Аналогичные действия можно провести и для косинуса.

4. Показательная и логарифмическая функция непрерывны на своих областях определений.

Докажем это свойство для логарифмической функции. Функция  $f(x) = \log_a x$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) непрерывна в произвольной точке  $x_0 \in (0, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} \text{Действительно, } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0 = \\ &= \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right) \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Пример 6.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$ .

При подстановке предельного значения 0 мы получаем неопределённость  $\left[\frac{0}{0}\right]$ , но разложить на множители или доопределить функцию до формул сокращенного умножения мы не можем, поэтому воспользуемся непрерывностью функции логарифма.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{a+x}{a}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{a+x}{a}\right)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a+x}{a}\right)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}} \right]^{\frac{1}{a}} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

## 9.2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НА ИНТЕРВАЛЕ И НА ОТРЕЗКЕ

Пусть функция  $y=f(x)$  определена на промежутке  $[x_0; x_0 + \delta)$  (на промежутке  $(x_0 - \delta; x_0]$ ).

**Определение 7.** Функция  $y=f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$  справа (слева), если справедливо

равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$  (соответственно:  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$ ) .

Очевидно, что если  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0 \Leftrightarrow f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  справа и слева.

**Определение 8.** Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной на интервале (отрезке), если она непрерывна в любой точке интервала (отрезка).

При этом не требуется непрерывность функции на концах отрезка или интервала, необходима только односторонняя непрерывность на концах отрезка или интервала.

*Свойства функций, непрерывных на отрезке*

**Свойство 1** (первая теорема Вейерштрасса). Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке.

*Доказательство (от противного).* Пусть для всякого  $M > 0$  найдется такая точка  $x_M \in [a, b]$ , что  $|f(x_M)| > M$ : для  $M = 1$  найдется  $x_1 \in [a, b]: |f(x_1)| > 1$ ; для  $M = 2$  найдется  $x_2 \in [a, b]: |f(x_1)| > 2$  и т. д. Для  $M = n$  найдется  $x_n \in [a, b]: |f(x_n)| > n$  и так далее. Итак, построена последовательность  $\{x_n\} \subset [a, b]$  такая, что для всех  $n$ :  $|f(x_n)| > n$ . Ясно, что  $f(x_n) \rightarrow \infty$ . Последовательность  $\{x_n\} \subset [a, b]$ , т.е. ограничена. Следовательно, по теореме Больцано – Вейерштрасса существует подпоследовательность  $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$  такая, что  $x_{n_k} \rightarrow \alpha \in [a, b]$ . Так как функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , она непрерывна и в точке  $\alpha \in [a, b]$ . Итак, имеем  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\alpha)$ , но по построению  $f(x_{n_k}) \rightarrow \infty$ , что является противоречием. Теорема доказана.

Доказательство этого свойства основано на том, что функция, непрерывная в точке  $x_0$ , ограничена в некоторой ее окрестности, а если разбивать отрезок  $[a, b]$  на бесконечное количество отрезков, которые «стягиваются» к точке  $x_0$ , то образуется некоторая окрестность точки  $x_0$ .

Заметим, что, например, функции  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = 1/x$  непрерывны на интервале  $E = (0; 1)$ , но  $f_1$  не имеет на  $E$  ни максимального, ни минимального значений, а функция  $f_2$  не ограничена на  $E$ . Таким образом, свойства непрерывной функции также связаны с некоторым свойством области определения, а именно с тем, что из покрытия множества  $E$  окрестностями его

точек можно извлечь конечное покрытие. Такие множества мы назовем *компактами*.

**Свойство 2.** Функция, непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , принимает на нем наибольшее и наименьшее значения, т.е. существуют такие значения  $x_1$  и  $x_2$ , что  $f(x_1) = m$ ,  $f(x_2) = M$ , причем  $m \leq f(x) \leq M$ .

Эти наибольшие и наименьшие значения функция может принимать на отрезке и несколько раз (например, функция  $f(x) = \sin x$ ).

Разность между наибольшим и наименьшим значением функции на отрезке называется *колебанием* функции на отрезке.

**Свойство 3** (вторая теорема Больцано – Коши). Если функция  $y=f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a,b]$ , и  $C$  — любое число, заключённое между  $f(a)$  и  $f(b)$ , то существует точка  $c \in (a,b)$  такая, что  $f(c) = C$ .

**Свойство 4.** Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x = x_0$ , то существует некоторая окрестность точки  $x_0$ , в которой функция сохраняет знак.

**Свойство 5** (первая теорема Больцано – Коши). Если функция  $y = f(x)$  – непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где  $f(x) = 0$ , т.е. если  $\text{sign}(f(a)) \neq \text{sign}(f(b))$ , то  $\exists x_0: f(x_0) = 0$ .

*Доказательство.*

Делим отрезок  $[a, b]$  пополам. Если в точке деления функция не равна нулю, то на концах одного из двух полученных в результате деления отрезков функция снова принимает значения разных знаков. С этим отрезком поступаем теперь так же, как и с исходным отрезком  $[a, b]$ , т. е. делим его пополам, и продолжаем процесс. Тогда мы либо на каком-то шаге попадем в точку  $c \in [a, b]$ , где  $f(c) = 0$ , либо получим последовательность  $\{I_n\}$  вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю и на концах которых  $f(x)$  принимает значения разных знаков. В последнем случае на основании леммы о вложенных отрезках найдется единственная точка  $c \in [a, b]$ , общая для всех этих отрезков. По построению существуют две последовательности  $\{x'_n\}$  и  $\{x''_n\}$  концов отрезков

$I_n$  такие, что  $f(x'_n) < 0$ ,  $f(x''_n) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{x \rightarrow \infty} x''_n = c$ . По свойствам предела и определению непрерывности получаем  $\lim_{x \rightarrow \infty} x'_n = f(c) \leq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x''_n = f(c) \geq 0$ . Таким образом,  $f(c) = 0$ .

*Замечание 1.*

Доказательство этого свойства доставляет простейший алгоритм отыскания корня уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке, в концах которого непрерывная функция имеет значения разных знаков.

*Замечание 2.*

Последнее свойство утверждает, что при непрерывном изменении нельзя перейти от положительных значений к отрицательным или наоборот, не приняв по дороге значения нуль.

**Определение 8.** Функция  $y=f(x)$  называется *равномерно непрерывной* на отрезке  $[a, b]$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\Delta > 0$  такое, что для любых точек  $x_1 \in [a, b]$  и  $x_2 \in [a, b]$  таких, что  $|x_2 - x_1| < \Delta$  верно неравенство  $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ .

Отличие равномерной непрерывности от «обычной» в том, что для любого  $\varepsilon$  существует свое  $\Delta$ , не зависящее от  $x$ , а при «обычной» непрерывности  $\Delta$  зависит от  $\varepsilon$  и  $x$ .

Если функция равномерно непрерывна на множестве, то она непрерывна в любой его точке. Непрерывность функции, вообще говоря, не влечет ее равномерную непрерывность.

Например, функция  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  на интервале  $(0;1)$  непрерывна. Однако в любой окрестности точки 0 в множестве  $(0;1)$  функция принимает как значение  $-1$ , так и значение  $1$ , поэтому при  $\varepsilon < 2$  для нее уже не выполнено условие  $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$ .

**Свойство 6** (теорема Кантора). Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем (это свойство справедливо только для отрезков, а не для интервалов и полуинтервалов).

*Доказательство.*

Доказательство поведем от противного. Пусть для некоторого определенного числа  $\varepsilon > 0$  не существует такого числа  $\Delta > 0$ , о котором идет речь в определении равномерной непрерывности. В таком случае, какое бы число  $\Delta > 0$  ни взять, найдутся в промежутке  $[a, b]$  такие два значения  $x'_0$  и  $x''_0$ , что  $|x'_0 - x''_0| < \Delta$  и тем не менее  $|f(x'_0) - f(x''_0)| \geq \varepsilon$ .

Возьмем теперь последовательность  $\{\Delta_n\}$  положительных чисел так, что  $\Delta_n \rightarrow 0$ .

В силу сказанного, для каждого  $\Delta_n$  найдутся в  $[a, b]$  значения  $x_0^{(n)}$  и  $x^{(n)}$  (они играют роль  $x'_0$  и  $x'$ ), такие, что  $|x^{(n)} - x_0^{(n)}| < \Delta_n$  и тем не менее  $|f(x^{(n)}) - f(x_0^{(n)})| \geq \varepsilon$ .

По лемме Больцано – Вейерштрасса из ограниченной последовательности  $\{x^{(n)}\}$  можно извлечь частичную последовательность, сходящуюся к некоторой точке  $x_0$  промежутка  $[a, b]$ . Будем считать, что уже сама последовательность  $\{x^{(n)}\}$  сходится к  $x_0$ .

Тогда, ввиду непрерывности функции в точке  $x_0$ , должно быть  $f(x^{(n)}) \rightarrow f(x_0)$  и  $f(x_0^{(n)}) \rightarrow f(x_0)$ , так что  $f(x^{(n)}) - f(x_0^{(n)}) \rightarrow 0$ , а это противоречит тому, что при всех значениях  $n$   $|f(x^{(n)}) - f(x_0^{(n)})| \geq \varepsilon$ .

Если интересоваться непрерывностью функции, обратной к вещественнозначной функции, полезно исследовать условия непрерывности монотонных функций.

**Пример 7.** Функция  $y = \sin x$  возрастает и непрерывна на отрезке  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Значит, ограничение этой функции на отрезок  $[-\pi/2, \pi/2]$  имеет обратную функцию  $x = f^{-1}(y)$ , обозначаемую как  $x = \arcsin y$ , определенную на отрезке  $[\sin(-\pi/2), \sin(\pi/2)] = [-1, 1]$ , возрастающую от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$  и непрерывную на этом отрезке.

**Теорема об устойчивости знака непрерывной в точке функции.**

Пусть функция  $y = f(x)$  задана на множестве  $\{X\}$ , непрерывна в точке  $a$  этого множества и ее значение  $f(a)$  положительно (отрицательно). Тогда существует такое положительное число  $\delta$ , что функция  $y = f(x)$  является положительной (отрицательной) всюду на множестве  $B_\delta$ , представляющем собой пересечение множества  $\{X\}$  с  $\delta$ -окрестностью точки  $a$ .

*Замечание.*

Если множество задания функции  $y = f(x)$  сплошь покрывает некоторую  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , то в качестве  $B_\delta$  можно взять саму  $\delta$ -окрестность точки  $a$ .

Иллюстрацией к теореме может служить рис. 9.5.

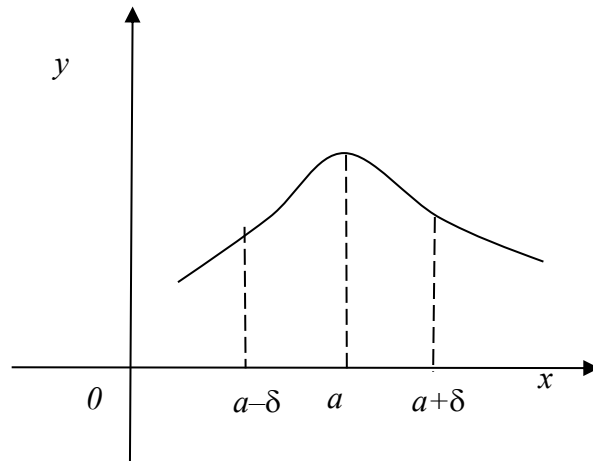


Рис.9.5

Эту теорему легко переформулировать на случай, когда функция будет непрерывна в точке  $a$  только справа или только слева.

### 9.3. ТОЧКИ РАЗРЫВА

**Определение 9.** Если функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , но не является непрерывной в этой точке, то  $y = f(x)$  называют разрывной в точке  $x_0$ , а саму точку  $x_0$  называют **точкой разрыва** функции  $y = f(x)$ .

*Замечание.*

Функция  $y = f(x)$  может быть определена в неполной окрестности точки  $x_0$ . Тогда рассматривают соответствующую одностороннюю непрерывность функции.

Пусть  $x_0$  – точка разрыва функции  $y = f(x)$ .

**Определение 10.** Точка  $x_0$  называется **точкой разрыва 1-го рода (скачок)**, если в этой точке функция  $y=f(x)$  имеет конечные, но не равные друг другу левый и правый пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x).$$

Для выполнения условий этого определения не требуется, чтобы функция была определена в точке  $x = x_0$ , достаточно того, что она определена слева и справа от нее. Из определения можно сделать вывод, что в точке разрыва 1-го рода функция может иметь только конечный скачок.

**Определение 11.** Если дана функция  $y = f(x)$ , то точка  $x = a$  называется *точкой устранимого разрыва*, если предел в этой точке для  $y=f(x)$  существует, но либо в самой точке не определена функция, либо предел функции в этой точке имеет какое-то частное значение.

**Пример 8.** Функция  $y = f(x) = x - \frac{|x|}{x}$  определена и непрерывна всюду, кроме точки  $x_0 = 0$ , которая является точкой разрыва функции.

$$\text{Так как } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases} \text{ то } y = f(x) = x - \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

Точка  $x_0 = 0$  является точкой разрыва первого рода, т. е. скачком. Действительно,

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} (x + 1) = 1,$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x - 1) = -1,$$

т.е.  $f(-0) \neq f(+0)$ .

Скачок функции в точке  $x_0 = 0$  равен  $f(+0) - f(-0) = -2$ .

**Пример 9.** Для функции

$$\text{sign } x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

точка  $x = 0$  является точкой разрыва 1-го рода.

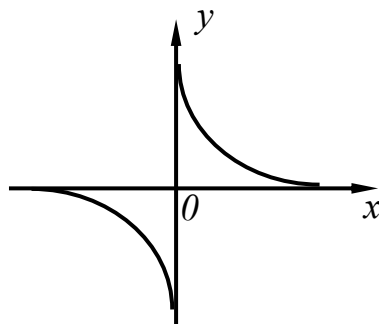
**Определение 12.** Точка  $x = a$  – *точка разрыва второго рода* для  $y = f(x)$ , если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов равен  $\infty$  или вообще не существует.

**Пример 10.** Для функции  $\text{tg } x$   $x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$  – точки разрыва 2-го рода.

**Пример 11.** Для функции  $y = \frac{1}{x}$  точка  $x = 0$  является точкой разрыва 2-го рода.

$$f(0 + 0) = +\infty;$$

$$f(0 - 0) = -\infty.$$



**Определение 13.** Функция  $y = f(x)$  называется *кусочно-непрерывной функцией* на сегменте, если во всех внутренних точках этого сегмента за исключением, быть может, конечного числа точек, она непрерывна, а в самих этих точках функция терпит разрыв 1-го рода.

**Пример 12.** Функция  $y = [x]$ , определяемая как наибольшее целое число, не превышающее  $x$ , может служить примером функции, являющейся кусочно-непрерывной на любом отрезке  $[a, b]$ . Ее график изображен на рис. 9.6.

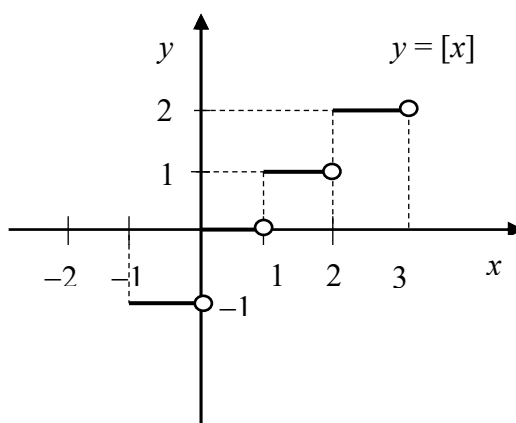


Рис. 9.6

Точками разрыва этой функции являются целые значения  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Разрывы в этих точках первого рода, т.е. в них существуют правый и левый пределы функции.

### **Теорема о точках разрыва монотонной функции**

Если функция монотонна при  $x \in [a, b]$ , то у нее существует не более чем счетное количество точек разрыва первого рода.

*Доказательство.*

Монотонная функция имеет конечный правый и конечный левый пределы в любой внутренней точке сегмента  $[a, b]$  и, кроме того, конечный правый предел в точке  $a$  и конечный левый предел в точке  $b$ . Отсюда и вытекает, что точками разрыва монотонной функции могут быть только точки разрыва первого рода. Чтобы доказать утверждение о том, что множество всех точек разрыва не более чем счетно, будем считать для определенности, что  $y = f(x)$  является неубывающей на сегменте  $[a, b]$ . Достаточно доказать не более чем счетность множества точек разрыва, расположенных на

интервале  $(a, b)$ , т.е. точек разрыва, являющихся внутренними точками сегмента  $[a, b]$ .

Заметим, что в каждой точке разрыва  $x$  справедливо неравенство для правого и левого пределов  $f(x + 0) > f(x - 0)$ . Каковы бы ни были два вещественных числа, не равных друг другу, всегда найдется рациональное число, заключенное между ними.

Так как в каждой точке разрыва  $x$  справедливо неравенство  $f(x + 0) > f(x - 0)$ , то каждой точке разрыва  $x$  можно поставить в соответствие некоторое рациональное число  $r(x)$ , удовлетворяющее неравенствам  $f(x + 0) > r(x) > f(x - 0)$ .

Заметим, что при этом разным точкам разрыва будут поставлены в соответствии разные рациональные числа. В самом деле, если  $x_1$  и  $x_2$  – две точки разрыва такие, что  $x_1 < x_2$ , то из неубывания функции следует, что  $f(x_1 + 0) \leq f(x_2 - 0)$ , а поэтому  $r(x_1) < r(x_2)$ .

Таким образом, множество всех точек разрыва функции  $y = f(x)$ , расположенных внутри сегмента  $[a, b]$ , эквивалентно подмножеству множества рациональных чисел, которое является не более чем счетным.

**Пример 13.** Определим тип точек разрыва у функций.

1.  $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ . Функция не определена при  $x = 1$ , а для остальных значений аргумента может быть представлена как  $y = x - 2$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 1 - 2 = -1$ , т.е.  $x = 1$  – устранимая точка.

2.  $y = \frac{|x|}{x}$ . Из определения модуля следует, что  $y = 1$  при  $x > 0$ ,  $y = -1$  при  $x < 0$ , а при  $x = 0$  функция не определена. При этом  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{|x|}{x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{|x|}{x} = -1$ . Следовательно,  $x = 0$  – точка разрыва 1-го рода.

3.  $y = \frac{1}{x^2}$ . Функция не определена при  $x = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ . Поэтому  $x = 0$  – точка разрыва 2-го рода.

4.  $y = e^{\frac{1}{x}}$ . Найдем односторонние пределы в точке  $x = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ , то есть правосторонний предел не является конечным. Значит,  $x = 0$  – точка разрыва 2-го рода.

5.  $y = \sin \frac{1}{x}$ . Функция не определена при  $x = 0$  и не имеет предела при  $x \rightarrow 0$ . Следовательно,  $x = 0$  – точка разрыва 2-го рода.

**Пример 14.** Установить непрерывность или определить характер точек разрыва функции  $y = \frac{2}{2^{\frac{1}{x}} - 2}$ . Нарисовать график функции в окрестностях этих точек.

У данной функции знаменатель обращается в ноль при  $x = 1$ . Найдем односторонние пределы в этой точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{2^{\frac{1}{x}} - 2} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{2^{\frac{1}{x}} - 2} = -\infty.$$

В этой точке функция терпит разрыв. Оба предела равны  $\infty$ , поэтому это точка разрыва 2-го рода. В знаменателе нашей функции находится внутренняя функция  $1/x$ , которая обращается в ноль при  $x = 0$ . Находим односторонние пределы в точке  $x = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{2}{2^{\frac{1}{x}} - 2} = -1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2}{2^{\frac{1}{x}} - 2} = 0.$$

В этой точке функция терпит разрыв. Пределы существуют, но не равны, поэтому это точка разрыва 1-го рода. График функции изображен на рис. 9.7.

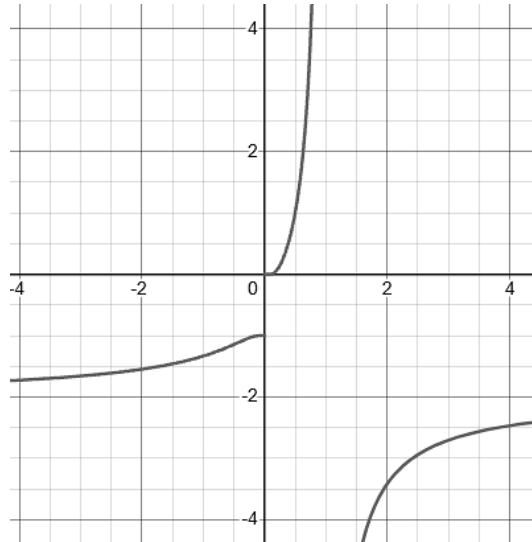


Рис. 9.7

**Пример 15.** Исследовать на непрерывность функцию  $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$ .  
 Найдем область определения функции. Так как  $x - 1 \neq 0$ , то  $x \neq 1$ . Функция определена при всех значениях  $x$ , кроме  $x = 1$ . Следовательно, точка  $x = 1$  – точка разрыва функции. Исследуем точку разрыва и вычислим односторонние пределы функции в указанной точке.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\frac{1}{1-0-1}} = 2^{-\frac{1}{0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\frac{1}{1+0-1}} = 2^{\frac{1}{0}} = 2^{\infty} = \infty.$$

Так как один из односторонних пределов равен  $\infty$ , то в точке  $x = 1$  функция имеет разрыв второго рода.

График функции  $y = 2^{\frac{1}{x-1}}$  показан на рис. 9.8.

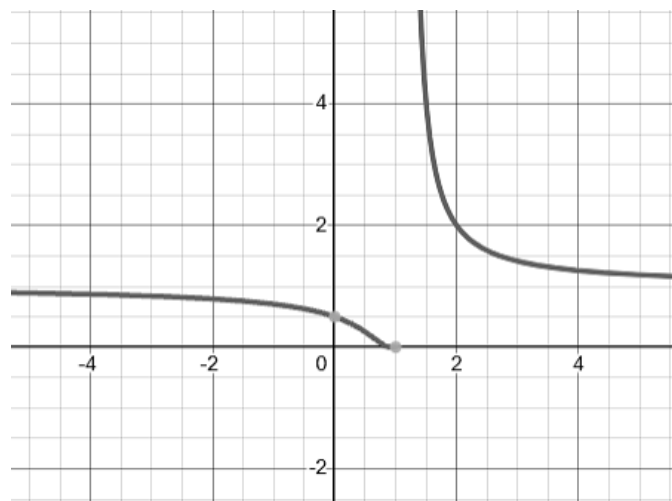


Рис. 9.8

*Замечание.*

Существует целый класс функций, называемых *элементарными*, каждая из которых в своей области определения является непрерывной (прил. 1).

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек.

1	$y = \frac{x}{(1+x)^2}$	2	$y = \frac{1+x}{1+x^3}$
3	$y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}$	4	$y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$
5	$y = \frac{x}{\sin x}$	6	$y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}$
7	$y = \cos^2 \frac{1}{x}$	8	$y = \operatorname{sgn} \left( \sin \frac{\pi}{x} \right)$
9	$y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$	10	$y = e^{\frac{x+1}{x}}$

Задание 2. Исследовать на непрерывность и нарисовать эскизы графиков следующих функций.

1	$y = \operatorname{sng}(\sin x)$	2	$y = x - [x]$
3	$y = x[x]$	4	$y = [x] \sin \pi x$

5	$y = x^2 - [x^2]$	6	$y = \left[ \frac{1}{x} \right]$
7	$y = x \left[ \frac{1}{x} \right]$	8	$y = \operatorname{sgn} \left( \cos \frac{1}{x} \right)$
9	$y = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x}$	10	$y = e^{-\frac{1}{x}}$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Как связаны между собой понятие непрерывности функции в точке и понятие предела функции в точке?
2. Что такое односторонняя непрерывность?
3. Приведите примеры функций, непрерывных в точке, и функций, разрывных в точке.
4. Какими свойствами обладают функции, непрерывные в точке?
5. Что называется точкой разрыва функции?
6. Какая точка разрыва функции называется точкой устранимого разрыва?
7. Какая точка разрыва функции называется точкой разрыва первого рода?
8. Какие арифметические операции сохраняют непрерывность функции? Сформулируйте соответствующие теоремы.
9. Непрерывность сложной функции. Сформулируйте теорему.
10. Что такое равномерная непрерывность?
11. Сформулируйте теорему о связи между непрерывностью и равномерной непрерывностью.
12. Сформулируйте теорему Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции на отрезке.
13. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о существовании наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.
14. Приведите примеры функций, непрерывных на всей числовой прямой.
15. Приведите примеры функций, непрерывных на некотором интервале, но не непрерывных на всей числовой прямой.

## 10. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на интервале  $(a, b)$ . Возьмем какое-либо значение  $x \in (a, b)$  и дадим аргументу  $x$  произвольное приращение  $\Delta x$ , такое, что  $x + \Delta x \in (a, b)$ . Назовем приращением функции величину  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .

Мы уже раньше выяснили, что при  $\Delta x \rightarrow 0$   $\Delta y \rightarrow 0$  функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x$  если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0.$$

Будем также считать, что  $\Delta x \neq 0$  и составим отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ . Так как величина аргумента  $x$  фиксирована, а  $\Delta x$  — произвольное приращение аргумента, то отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  представляет собой функцию от  $\Delta x$ . Это отношение определено при небольших  $\Delta x$ , то есть будем рассматривать вопрос о существовании предела отношения  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

**Определение 1.** Производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  называется предел (если он существует) отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

$$\text{Обозначение: } y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Отметим, что если  $y = f(x)$  определена на  $(a, b)$  и если при всех  $x \in (a, b)$  имеется производная, то эта производная является функцией  $x$  и эта функция  $f'(x)$  также определена на интервале  $(a, b)$ .

**Пример 1.** Вычислить производные функций, пользуясь определением.

1.  $y = C$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

2.  $y = x^2$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x + o(\Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

### Геометрический и физический смыслы производной

*Геометрический смысл* производной заключается в следующем: если к графику функции  $y = f(x)$  в некоторой точке  $x_0$  проведена касательная, непараллельная оси  $y$ , то значение производной в точке касания есть тангенс угла  $\alpha$ , образованного этой касательной с положительным направлением оси абсцисс или угловой коэффициент касательной.

Если угол наклона касательной с положительным направлением оси  $x$  – острый, прямая направлена вверх, то угловой коэффициент касательной – число положительное. Значит и тангенс данного угла положительный. Если угол наклона касательной с положительным направлением оси  $x$  – тупой, прямая направлена вниз, то угловой коэффициент касательной – число отрицательное. Значит и тангенс данного угла отрицательный.

Таким образом, чтобы найти значение производной в заданной точке, нужно вычислить тангенс угла  $\alpha$  (рис.10.1).

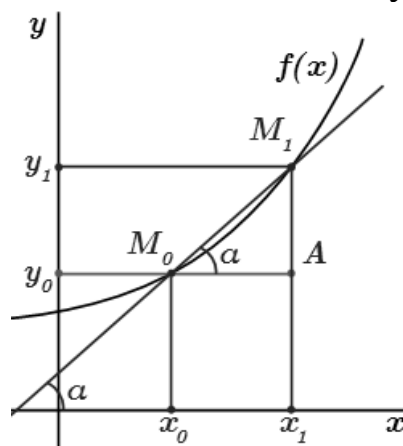


Рис. 10.1

Рассмотрим кривую, уравнение которой  $y = f(x)$ . Возьмем на этой кривой точки  $M_0(x_0, y_0)$  и  $M_1(x_1, y_1)$ . Прямую, проходящую через эти точки, будем называть *секущей*.

Уравнение любой прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , имеет вид  $y - y_0 = k(x - x_0)$ , где  $k$  – ее угловой коэффициент. Для

уравнения касательной  $k = f'(x)$ , поэтому уравнение будет иметь вид  $y - y_0 = f'(x)(x - x_0)$ .

Прямая, проходящая через точку  $M_0(x_0, y_0)$  перпендикулярно касательной, называется *нормалью*. Для нее  $k_n = -\frac{1}{k_t}$ , где  $k_t = f'(x)$ . Поэтому уравнение нормали к графику в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , имеет вид  $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ ; здесь предполагается, что  $f'(x_0) \neq 0$ .

Пусть функция  $y = f(x)$  описывает закон движения точки по прямой линии, причем  $x$  представляет собой время, а  $y$  – путь, пройденный за это время точкой от начала отсчета пути.

Тогда  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  – средняя скорость движения за промежуток времени от  $x$  до  $x + \Delta x$ , а  $f'(x)$  – мгновенная скорость в момент времени  $x$ . В этом и заключается *физический смысл* производной (точнее говоря, механический).

Точно так же можно считать, что  $x$  – время, а функция  $y = f(x)$  определяет количество электричества, прошедшее через поперечное сечение некоторого проводника за время  $x$ . В этом случае  $y' = f'(x)$  определяет скорость изменения во времени количества электричества, т.е. представляет собой силу тока в проводнике в момент времени  $x$ .

### Односторонние производные

Заметим, что определение производной позволяет по аналогии ввести определения односторонних производных.

**Определение 2.** Правой (левой) производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  называется  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  ( $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ).

Обозначается:  $f'(x + 0)$  – правая,  $f'(x - 0)$  – левая производные.

Если левосторонняя и правосторонняя производные в точке существуют и равны между собой, то они будут также равны производной функции в этой точке.

Верно и обратное: если существует производная функции во внутренней точке, то левосторонняя и правосторонняя производные будут совпадать.

**Пример 2.** Найти односторонние производные функции  $y=|\sin x|$  в точке  $x_0 = 0$ .

Решение. Пусть  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , тогда

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \\ -\sin x, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]. \end{cases}$$

Заметим, что  $\Delta x = x - x_0 = x$ . Тогда при  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  имеем

$$\Delta y = |\sin x| - |\sin 0| = \sin x \text{ и } y'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{При } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \text{ имеем } \Delta y &= |\sin x| - |\sin 0| = -\sin x \text{ и } y'_-(0) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{-\sin x}{x} = -1. \end{aligned}$$

В точке  $x_0 = 0$  существуют односторонние касательные: левая  $y = -x$  и правая  $y = x$  (рис. 10.2).

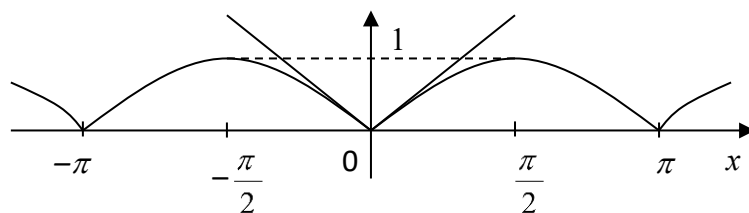


Рис. 10.2

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Говорим, что функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  *бесконечную положительную производную* (пишем:  $f'(x_0) = +\infty$ ), если  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ , и *бесконечную отрицательную производную* ( $f'(x_0) = -\infty$ ), если  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$ . Тогда в точке  $x_0$  существует вертикальная касательная с уравнением  $x = x_0$  (рис. 10.3).

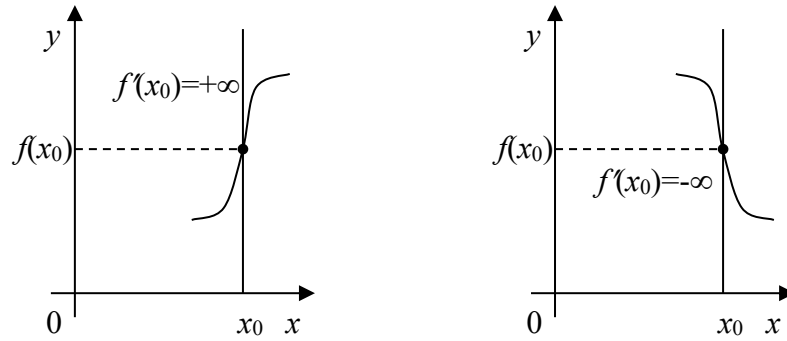


Рис. 10.3

Аналогично определяются односторонние бесконечные производные (рис. 10.4).

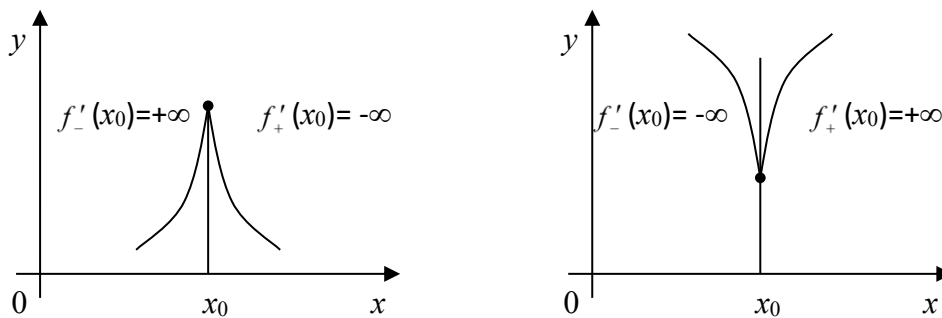


Рис. 10.4

**Пример 3.** Рассмотрим функцию  $y = \sqrt[3]{x}$  в точке  $x_0 = 0$  (рис. 10.5).

$$\text{Тогда } \Delta y = \Delta y(0, \Delta x) = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{\Delta x} \text{ и } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$

Тогда функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0 = 0$  положительную бесконечную производную  $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty$ .

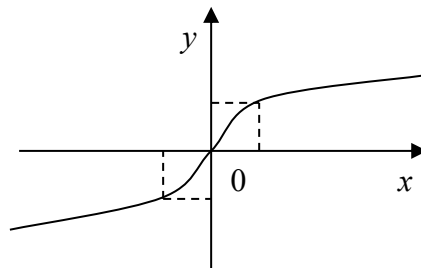


Рис. 10.5

**Пример 4.** Пример функции, имеющей левую и правую производную, но не имеющей производной.

$$\text{Пусть } f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Правая производная } f'(x+0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

$$\text{Левая производная } f'(x-0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Производной нет, так как нет касательной.

График функции на рис. 10.6.

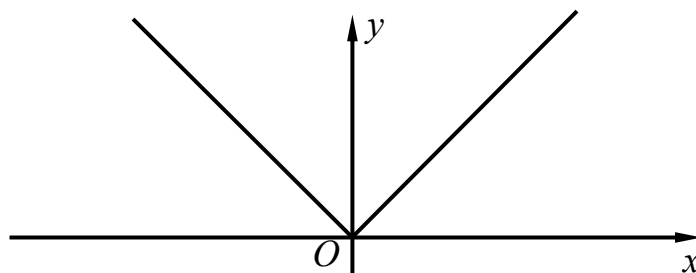


Рис. 10.6

**Теорема 1.** Если функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x$ , то она непрерывна в этой точке.

*Доказательство.*

Из существования предела  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  следует, что  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x)$ , где  $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что  $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$ .

Перейдя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , вычислим предел  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ . Это и означает непрерывность функции.

*Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.*

Непрерывная функция может не иметь производной. Пример мы уже имели:  $y = |x|$ .

## 10.2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Дифференцированием мы будем называть вычисление производной.

Если функции  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют производные в точке  $x$ , то их сумма, разность, произведение и частное (при условии, что  $v(x) \neq 0$ ) имеют производные и справедливы равенства:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; \quad (1)$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u; \quad (2)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0). \quad (3)$$

*Доказательство.*

Дадим приращение аргументу  $\Delta x$ , а соответствующие приращения функций  $u$  и  $v$  обозначим  $\Delta u$  и  $\Delta v$ .

Тогда

$$1) (u + v)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u + \Delta u + v + \Delta v - u - v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'.$$

$$2) (u \cdot v)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v = u'v + v'u.$$

$$3) \left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

*Частный случай.*

$$(C \cdot u)' = C'u + u'C = C \cdot u' \quad (C - \text{постоянная, } C' = 0).$$

(Постоянный множитель можно выносить за знак производной).

*Производные некоторых основных элементарных функций*

$$1. (x^n)' = n \cdot x^{n-1}. \text{ Докажем при } n \in \mathbb{N}.$$

Используем формулу

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$\begin{aligned} (x^n)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + (x + \Delta x)x^{n-1} + x^{n-1}]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + (x + \Delta x)x^{n-1} + x^{n-1}] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)^{n-1} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)^{n-2}x + \dots + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^{n-1} = \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1}}_{n \text{ раз}} = n \cdot x^{n-1}. \end{aligned}$$

$$2. \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{x^n \cdot (1)' - 1 \cdot (x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{n \cdot x^n}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

То есть мы можем воспользоваться формулой  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$  для  $n$  – отрицательных:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -n \cdot x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

Оказывается, формула  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$  справедлива для всех  $n$  (не только для целых).

$$3. (\sin x)' = \cos x.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x. \end{aligned}$$

$$4. (\cos x)' = -\sin x. \text{ Доказать самостоятельно.}$$

$$5. (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$6. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \text{ Доказательство аналогичное.}$$

$$\begin{aligned} 7. (a^x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \\ &= a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a. \end{aligned}$$

$$7a. (e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x, \quad (e^x)' = e^x.$$

$$8. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} (\log_a x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]}{x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

### 10.3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

**Определение 3.** Функция  $y = f(x)$  называется дифференцируемой в точке  $x$ , если приращение  $\Delta y$  этой функции в точке  $x$ ,

отвечающее приращению аргумента  $\Delta x$ , может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где  $A$  – некоторое число, не зависящее от  $\Delta x$ , а  $\alpha(\Delta x)$  – функция аргумента  $\Delta x$ , бесконечно малая  $\Delta x \rightarrow 0$ .

*Замечание.* Второе слагаемое в правой части можно переписать как  $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$ .

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 2.** Для того чтобы  $y = f(x)$  в точке  $x$  была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала конечная производная  $y'(x)$ .

*Доказательство.*

*Необходимость.*

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , тогда  $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ . Считая  $\Delta x$  отличным от нуля, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Правая и левая части этого равенства имеют равный  $A$  предел в точке  $\Delta x \rightarrow 0$ . Остается заметить, что предел при  $\Delta x \rightarrow 0$  левой части по определению равен производной  $f'(x)$ .

*Достаточность.*

Пусть существует конечная производная  $f'(x)$ , т.е. существует конечный предел  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Обозначим символом  $\alpha(\Delta x)$  разность  $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ . Из существования предела  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  вытекает, что функция  $\alpha(\Delta x)$  имеет предел при  $\Delta x \rightarrow 0$ , равный нулю. Умножим функцию  $\alpha(\Delta x)$  на  $\Delta x$ .

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Тем самым доказано, что из существования конечной производной  $f'(x)$  вытекает дифференцируемость функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ , причем в условии дифференцируемости число  $A$  совпадает с  $f'(x)$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в данной точке  $x$ , то она и непрерывна в этой точке.

*Доказательство.*

Так как функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , то для ее приращения  $\Delta y$  справедливо  $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ , из которого следует, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$ , а это и означает непрерывность функции  $y = f(x)$  в данной точке.

### Дифференцирование сложной функции

**Теорема 4.** Пусть  $x = \varphi(t)$  дифференцируема в  $t$ , а функция  $y = f(x)$  дифференцируема в соответствующей точке  $x = \varphi(t)$ . Тогда сложная функция  $y = f(\varphi(t))$  дифференцируема в указанной точке  $t$ , причем для ее производной в этой точке справедлива формула

$$\{f[\varphi(t)]\}' = f'(x) \cdot \varphi'(t) = f'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t).$$

*Доказательство.*

В силу дифференцируемости  $x = \varphi(t)$  придадим приращение  $\Delta t$ , которому будет соответствовать приращение аргумента  $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ . Аналогично функции  $y = f(x)$  можно определить приращение  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Поскольку функция  $y = f(x)$  по условию дифференцируема в указанной точке  $x = \varphi(t)$ , то ее приращение  $\Delta y$  в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где  $\alpha(\Delta x)$  имеет при  $\Delta x \rightarrow 0$  предел, равный нулю.

Поделив это уравнение на  $\Delta t \neq 0$ , будем иметь

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x) \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Докажем, что правая (а значит, и левая) часть этого равенства имеет предел при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Этим будет доказана дифференцируемость сложной функции и формула для ее производной.

Из дифференцируемости функции  $x = \varphi(t)$  в точке  $t$  вытекает что отношение  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  имеет предел при  $\Delta t \rightarrow 0$ , равный  $\varphi'(t)$ . Остается доказать, что функция  $\alpha(\Delta x)$  имеет предел при  $\Delta t \rightarrow 0$ , равный нулю, но это сразу вытекает из того, что  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и что  $\Delta t \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  на основании разностной формы условия непрерывности, дифференцируемой в точке  $t$  функции  $x = \varphi(t)$ . Итак, вся правая часть последнего равенства имеет предел при  $\Delta t \rightarrow 0$  и этот предел равен величине, стоящей в правой части формулы, вычисляющей производную сложной функции.

*Замечание.* Теорема 4 и содержащееся в ее формулировке правило вычисления производной сложной функции последовательно переносится на сложную функцию, являющуюся суперпозицией трех и большего числа функций.

**Пример 5.** Продифференцируем функцию  $y = \sin(2x + 3)$ . Здесь внешняя функция синус:  $f = \sin u$ , внутренняя — линейная:  $u = 2x + 3$ . Соответственно, производная данной сложной функции есть  $y' = \cos(2x+3) \cdot (2x+3)' = \cos(2x+3) \cdot 2 = 2\cos(2x+3)$ .

Продифференцируем функцию  $y = \sin^2 x$ . Здесь  $f = u^2$ ,  $u = \sin x$ . Почему так? Но ведь  $\sin^2 x = (\sin x)^2$ . Полезно запомнить, что, как только появляется степень, то внешняя функция — степенная, а внутренняя — это то, что в степень возводится. Итак, производная данной сложной функции есть  $y' = 2 \cdot \sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ .

### Дифференцируемость обратной функции

**Теорема 5.** Пусть  $y = f(x)$  монотонна, непрерывна в  $U(x)$  и дифференцируема в  $U(x)$ , причём  $f'(x) \neq 0$ . Тогда в  $U[f(x)]$  существует производная обратной функции  $[f^{-1}(y)]'$ , причём  $[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}$ .

*Доказательство.*

1. Монотонность и непрерывность гарантируют существование обратной функции в окрестности.

2. Придадим приращение  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \neq 0$ . Тогда обратная функция получит приращение  $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$ . Исходная функция монотонна и непрерывна, следовательно, обратная также монотонна и непрерывна.

3. Рассмотрим отношение  $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$ . Пусть теперь в этом тождестве приращение  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Остаётся доказать существование  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}$ .

$$x = f^{-1}(y); x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y) \Rightarrow x + \Delta x = f^{-1}(y + \Delta y).$$

Вернёмся от обратной функции к исходной:

$$y + \Delta y = f^{-1}(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{f'(x)}.$$

## Логарифмическая производная

Логарифмическим дифференцированием называется метод дифференцирования функций, при котором сначала находится логарифм функции, а затем вычисляется производная от него.

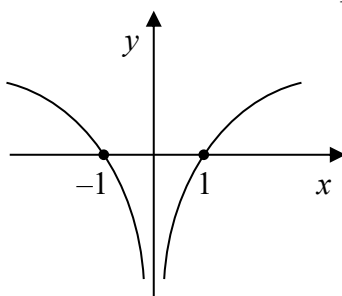


Рис. 10.7

Вычислим производную функции  $y = \ln|x|$ ,  $x \neq 0$ , (рис. 10.7). При  $x > 0$   $y = \ln x$  и  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , при  $x < 0$   $y = \ln(-x)$  и  $(\ln(-x))' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ , поэтому  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ .

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема и отлична от нуля. Вычислим производную функции  $\ln|x| = \ln|f(x)|$ .

По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$(\ln|x|)' = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ или } (\ln|y|)' = \frac{y'}{y}. \quad (4)$$

Это и есть **логарифмическая производная** функции  $y = f(x)$ , т.е. производная от логарифма модуля функции.

В качестве примера найдем с помощью логарифмической производной производную показательной-степенной функции  $y = u(x)^{v(x)}$ , где  $u = u(x) > 0$  и  $v = v(x)$  некоторые дифференцируемые функции. Так как  $\ln y = v(x) \ln u(x)$ , то по формуле

$$\frac{y'}{y} = [v(x) \ln u(x)]' = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)},$$

отсюда окончательно получаем

$$y' = u(x)^{v(x)} \left[ v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right],$$

или в краткой записи

$$y' = \underbrace{u^v \ln u}_{\substack{\text{производная} \\ \text{показательной} \\ \text{функции}}} \cdot v' + \underbrace{v u^{v-1}}_{\substack{\text{производная} \\ \text{степенной} \\ \text{функции}}} u'.$$

### Пример 6.

1. Найдем  $y'$ , если  $y = \frac{(x^2 - 1)^5 \sqrt[3]{x+3}}{(x-2)^3}$ .

*Решение.* Воспользуемся логарифмической производной:

$$\ln|y| = \ln \left| \frac{(x^2 - 1)^5 \sqrt[3]{x+3}}{(x-2)^3} \right| = 5 \ln|x^2-1| + \frac{1}{3} \ln|x+3| - 3 \ln|x-2|,$$

$$\frac{y'}{y} = 5 \cdot \frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+3} - \frac{3}{x-2},$$

окончательно получим

$$y' = \frac{(x^2 - 1)^5 \sqrt[3]{x+3}}{(x-2)^3} \left( \frac{10x}{x^2-1} + \frac{1}{3(x+3)} - \frac{3}{x-2} \right).$$

2. Найдем  $y'$ , если  $y = (\sin x)^x$ .

*Решение.*  $\ln|y| = x \ln \sin x$ .

$$\frac{y'}{y} = \ln \sin x + x \operatorname{ctg} x; \quad y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x).$$

### Неявное задание функции и ее дифференцирование

Пусть задано уравнение, связывающее переменные  $x$  и  $y$ , вида  $F(x, y) = 0$ . Пусть существует такой интервал  $(a, b)$ , что для каждого  $x_0 \in (a, b)$  существует по крайней мере одно число  $y$ , удовлетворяющее уравнению  $F(x, y) = 0$ . Обозначим одно из таких чисел  $y_0$  и поставим его в соответствие числу  $x_0 \in (a, b)$ . Тогда получим функцию  $y = f(x)$ , определенную в интервале  $(a, b)$  и такую, что  $F(x, f(x)) = 0$  для всех  $x \in (a, b)$ . В этом случае говорим, что функция  $y = f(x)$  задается неявно уравнением  $F(x, y) = 0$ , которое задает, вообще говоря, не одну, а некоторое множество функций.

Функции, неявно задаваемые уравнениями вида  $F(x, y) = 0$ , называются *неявными функциями* в отличие от функций,

задаваемых явно формулой  $y = f(x)$ . Термин « неявная функция » отражает не характер функциональной зависимости, а лишь способ ее задания.

Итак, функция  $y = f(x)$ ,  $x \in (a, b)$  является неявной функцией, если  $F(x, f(x)) \equiv 0 \forall x \in (a, b)$ , т.е. функция  $y = f(x)$  есть решение уравнения  $F(x, y) = 0$  относительно переменной  $y$ .

*Правило нахождения производных функций, заданных неявно.*

Для нахождения производной  $y'$  функции  $y = f(x)$ , заданной неявно уравнением  $F(x, y) = 0$ , необходимо продифференцировать это уравнение по переменной  $x$  как сложную функцию, рассматривая при этом  $y$  как функцию от  $x$ , и полученное уравнение разрешить относительно  $y'$ . Производная неявной функции выражается через аргумент  $x$  и функцию  $y$ , т.е. сама является функцией, заданной неявно.

**Пример 7.** Найти  $y'$ , если  $y = f(x)$  является неявной функцией, определяемой уравнением  $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ .

Решение. Продифференцируем уравнение по  $x$ , помня, что  $y$  есть функция от  $x$ :

$$2x + 2(y + xy') + 2yy' - 4 + 2y' = 0.$$

Находя из этого уравнения  $y'$ , получим  $y' = -\frac{x+y-2}{x+y+1}$ .

### Параметрическое задание функции и ее дифференцирование

Пусть даны две функции  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  одной независимой переменной  $t$ , определенные и непрерывные в некотором интервале  $(\alpha, \beta)$ . Если функция  $x = \varphi(t)$  строго монотонна, то она имеет обратную функцию  $t = \Phi(x)$ , непрерывную и монотонную в некотором интервале  $(a, b)$ . Поэтому  $y$  является сложной функцией, зависящей от переменной  $x$  посредством переменной  $t$ , называемой параметром:  $y = f(x) = \psi(\Phi(x))$ ,  $x \in (a, b)$ .

Эта функция непрерывна по теореме о непрерывности сложной функции. Итак, система функций  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in (\alpha; \beta)$  определяет функцию  $y = f(x)$  переменной  $x$ , а сами уравнения

называются параметрическими уравнениями функции  $y = f(x)$ . Такой способ задания функции называется *параметрическим*.

Пусть функции  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$  дифференцируемы в области определения  $(\alpha, \beta)$  и  $\psi'(t) \neq 0$ . Тогда обратная функция  $t = \Phi(x)$  дифференцируема и  $t'_x = \Phi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$ . По теореме о производной сложной функции получим

$$y'_x = [\psi(\Phi(x))]'_x = \psi'(\Phi(x)) \cdot \Phi'(x) = \psi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Следовательно,  $y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$  или, короче,  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ .

**Пример 8.** Найти производную функции  $y = f(x)$ , заданной уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

**Решение.** Очевидно, что  $y'_t = b \cos t$ ,  $x'_t = -a \sin t$ .

Следовательно,  $y'_x = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt}$ .

#### 10.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ И ИНВАРИАНТНОСТЬ ПЕРВОЙ ФОРМЫ

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , дифференцируемую в данной точке  $x$ . Заметим, что приращение  $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$  представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых линейно относительно  $\Delta x$ , а второе является в точке  $\Delta x = 0$  бесконечно малой функцией более высокого порядка чем  $\Delta x$ . Если число  $A$ , равное производной  $f'(x)$ , отлично от нуля, то указанное первое слагаемое  $A\Delta x = f'(x)\Delta x$  представляет собой главную часть приращения  $\Delta y$  дифференцируемой функции  $y = f(x)$ .

**Определение 4.** Дифференциалом функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  называется главная линейная часть приращения функции в этой точке.

$$dy = A\Delta x.$$

Заметим, что  $dy$  гарантирует непрерывность функции в точке:  $A = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)\Delta x$ .

Будем отождествлять дифференциал аргумента функции с приращением этого аргумента:

$$y = x;$$

$$dy = (y)' \Delta x;$$

$$dx = \Delta x.$$

Сразу же отметим, что дифференциал, что  $dy$  и приращение  $\Delta y$  в данной точке  $x$ , отвечающие одному и тому же приращению аргумента  $\Delta x$ , вообще говоря, не равны друг другу.

Приращение функции  $\Delta y$  при приращении аргумента на  $\Delta x$  отличается от дифференциала функции  $dy$  на бесконечно малую величину. Бесконечно малой величиной можно пренебречь и записать:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x;$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Чем меньше  $\Delta x$ , тем точнее оказывается результат вычисления значения функции в точке  $x_0 + \Delta x$ . Формула находит широкое применение на практике при приближенных вычислениях значений функций

**Пример 9.** Вычислить значение выражения  $\sqrt{4,02}$ .

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}};$$

$$x_0 = 4, \Delta x = 0,02;$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(4 + 0,02) = f(4) + f'(4) \cdot 0,02 = 2,005.$$

То есть  $\sqrt{4,02} \approx 2,005$ .

**Пример 10.** Пример использования дифференциала для приближенных вычислений.

Нужно рассчитать, сколько (какой объем) материала истрачено на изготовление кубической коробки с внутренним размером ребра коробки 10 см и толщиной стенок 1 мм.

Объем куба  $V(x) = x^3$ , где  $x$  – длина его ребра.

Объем стенок коробки:

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) = V(10 + 0,1) - V(10) \approx V'(x) \cdot \Delta x = V'(10) \cdot 0,1 =$$

$$= 0,1 \cdot 3x^2 |_{x=10} = 0,1 \cdot 3 \cdot 100 = 30 \text{ см}^3.$$

Точное значение  $\Delta V = (10,1)^3 - 10^3 = 30,301 \text{ см}^3$ .

Точность приближенного вычисления  $\approx 1\%$ .

## Геометрический смысл дифференциала

Для этого проведем к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x; y)$  касательную  $MT$  и рассмотрим ординату этой касательной для точки  $x + \Delta x$  (рис. 10.8). На рисунке  $|AM| = \Delta x$ ,  $|AM_1| = \Delta y$ . Из прямоугольного треугольника  $MAB$  имеем  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AB|}{\Delta x}$ , т.е.  $|AB| = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x$ . Но, согласно геометрическому смыслу производной,  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ . Поэтому  $AB = f'(x) \Delta x$  и получаем  $dy = AB$ , т.е. дифференциал функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда  $x$  получит приращение  $\Delta x$ .

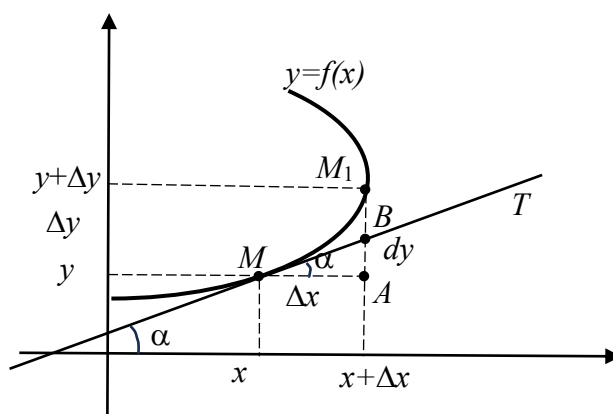


Рис. 10.8

## Инвариантность первой формы дифференциала

Пусть  $y = f(x)$ , где  $x$  – независимая переменная, тогда ее дифференциал в точке  $x$  имеет вид  $dy = y'(x) dx$ .

Пусть теперь  $y = f(x)$ , где  $x = \varphi(t)$ , т.е.  $x$  не является независимой переменной, а есть функция переменной  $t$ . Тогда найдем дифференциал сложной функции  $y = F(t) = f[\varphi(t)]$ :

$dy = F'(t) dt$ , где  $F'(t) = f'[\varphi(t)] \varphi'(t)$ , окончательно

$$dy = dF = f'[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

А так как  $\varphi'(t) dt = dx$ ,  $\varphi(t) = x$ , то последнее равенство имеет вид  $dy = y'(x) dx = f'(x) dx$ .

Вывод: вид дифференциала функции  $y = f(x)$  не зависит от того, является ли аргумент  $x$  независимой переменной или является функцией, т.е. зависимой переменной.

Это свойство дифференциала играет важную роль при вычислении неопределенных интегралов.

## 10.5. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в окрестности точки  $x_0$ . Тогда ее производная  $y' = f'(x)$  сама является функцией переменной  $x$  в указанной окрестности точки  $x_0$  и может иметь производную в этой точке, называемую *производной второго порядка* или *второй производной* функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , которую обозначают одним из символов  $\frac{d^2y}{dx^2}, y'', \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}, f''(x_0)$ .

Итак,  $f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$ , если этот предел существует.

Производную  $y' = f'(x)$  называют первой производной функции  $y = f(x)$ . Тогда можно сказать, что вторая производная – это производная от первой производной. Аналогично определяется производная третьего порядка  $y''' = (y'')'$ , т.е. как производная от второй производной. Производная  $n$ -го порядка  $y^{(n)}$  есть производная от  $(n-1)$ -й производной:

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$$

Таким образом, чтобы найти производную  $n$ -го порядка, необходимо найти все производные  $y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n-1)}$  до  $n-1$  включительно. Обозначение  $n$ -й производной:  $y^{(n)}, f^{(n)}, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f}{dx^n}$ . Функцию, имеющую на данном множестве  $\{x\}$  конечную производную порядка  $n$ , обычно называют  $n$  раз дифференцируемой на данном множестве.

Производные порядков выше первого называются *производными высших порядков*.

При вычислении высших производных используются все ранее изученные правила дифференцирования.

Приведем лишь формулу Лейбница, обобщающую правило нахождения производной произведения двух функций.

Пусть  $y = uv$ , где  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  имеют производные до порядка  $n$  включительно. Тогда справедлива *формула Лейбница*:

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} = u^{(n)}v + n u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2} u^{(n-2)}v'' + \dots + u v^{(n)}.$$

В частности,

$$y'' = (uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''''.$$

**Пример 11.** Вычислим  $n$ -производную функции  $y = \sin x$ . Используя формулу приведения  $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ , получим последовательно:

$$y' = \cos x = \sin(x + \pi/2), y'' = \cos(x + \pi/2) = \sin(x + \pi/2 + \pi/2) = \sin(x + 2 \cdot \pi/2),$$

$$y''' = \cos(x + 2 \cdot \pi/2) = \sin(x + 3 \cdot \pi/2), \dots,$$

$$y^{(k)} = \sin(x + k \cdot \pi/2), \dots \text{Итак, } (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}). \text{ Аналогично, } (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2}).$$

Найдем при помощи формулы Лейбница 50-ю производную  $y = (x^2 \cos ax)$ . Положим  $v = x^2$ ,  $u = \cos ax$ . Тогда

$u^{(k)} = a^k \cos(ax + k \frac{\pi}{2})$ ,  $v' = 2x$ ,  $v'' = 2$ ,  $v''' = 0$ , остальные производные  $v$  также будут равны 0. Таким образом, в формуле Лейбница все слагаемые, кроме трех первых, равны нулю.

$$y^{(50)} = x^2 a^{50} \cos(ax + 50 \frac{\pi}{2}) + 50 \cdot 2x \cdot a^{49} \cos(ax + 49 \frac{\pi}{2}) + \frac{50 \cdot 49}{2} \cdot 2 \cdot a^{48} \cos(ax + 48 \frac{\pi}{2}).$$

Заметим, что такую же формулу можно было бы установить и для  $n$ -й производной произведения нескольких сомножителей, она имеет сходство с разложением степени многочлена.

## Производные различных порядков от неявных функций

Сначала покажем способ нахождения производных различного порядка от неявных функций (на примере).

Пусть  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  – неявная связь  $y$  и  $x$  ( $y$  не выражен явно через  $x$ ). Или  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ . Дифференцируем по  $x$  обе части равенства, имея в виду, что  $y$  есть функция  $x$ , получим  $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$ .

Отсюда:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$ . Первая производная найдена, но выражена она через  $x$  и через  $y$ .

Последнее равенство еще раз дифференцируем по  $x$  (имея опять в виду, что  $y=y(x)$ ).

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x'y - y'x}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Подставляя вместо  $\frac{dy}{dx}$  ее значение (зависящее от  $x$  и  $y$ ), найдем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{y - x \left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)}{y^2} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{y + \frac{b^2x^2}{a^2y}}{y^2} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

Заметим, что  $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ , так что  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$ .

Дифференцируя по  $x$  полученное равенство, найдем  $\frac{d^3y}{dx^3}$  и т.д.

### **Производная второго порядка от функции, заданной параметрически**

Пусть функция  $y = f(x)$  задана параметрическими уравнениями  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in (\alpha; \beta)$ .

Как известно, первая производная  $y'_x$  находится по формуле  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ . Найдем вторую производную от функции, заданной параметрически. Из определения второй производной следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}.$$

Перейдем к определению дифференциалов высших порядков. Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в некотором интервале  $(a, b)$ . Тогда ее дифференциал  $dy = f'(x)dx$  является функцией, зависящей как от независимой переменной  $x$ , так и от ее дифференциала  $dx$ . Заметим, что  $dx$  есть произвольное и независимое от  $x$  число, которое при дифференцировании по  $x$  рассматривается как постоянный множитель, ведь при заданном значении аргумента  $x$  значения дифференциала (приращения)  $dx = \Delta x$  могут выбираться произвольно.

Заметим еще, что дифференциал функции еще называется ее *первым дифференциалом*. Таким образом, дифференциал функции  $dy = f'(x)dx$ , являясь функцией переменной  $x$ , сам может иметь дифференциал, называемый *дифференциалом второго порядка*, или *вторым дифференциалом* функции  $y = f(x)$  и обозначается  $d^2y$  ( $d^2y = d(dy)$ ), т. е. второй дифференциал – это дифференциал от первого дифференциала. Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков.

В частности, *дифференциалом  $n$ -го порядка*  $d^n y$  называется дифференциал от дифференциала  $(n-1)$ -го порядка как функции переменной  $x$ :  $d(d^{n-1}y)$ .

Учитывая все сказанное, получим

$$d^2 y = d(dy) = (dy)' dx = (f'(x) dx)' dx = f''(x) dx^2,$$

где  $dx^2 = (dx)^2$  (не путать с дифференциалом функции  $y = x^2$ :  $dy = (dx^2) = 2x dx$ ).

Аналогично имеем для дифференциала  $n$ -го порядка

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx.$$

Из последней формулы следует, что  $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ .

Воспользовавшись формулой для  $d^n y$ , можем преобразовать формулу Лейбница к дифференциалам. Достаточно для этого умножить ее на  $dx^n$ , чтобы получить  $d^n(uv) = \sum_{i=0}^n C_n^i d^{n-i} u d^i v$ . Сам Лейбниц установил свою формулу именно для дифференциалов.

**Пример 12.** Найти  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  для функции  $y(x) = \arctg x$ .

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x \arctg x) = \frac{d}{dx} (x) \cdot \arctg x + x \cdot \frac{d}{dx} (\arctg x) = \arctg x + \frac{x}{x^2+1};$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \arctg x + \frac{x}{x^2+1} \right) = \frac{1}{x^2+1} + \left( \frac{x}{x^2+1} \right)' = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1+1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+1)^2}.$$

Вспоминая, что первый дифференциал функции обладает свойством инвариантности формы, можем задать вопрос, обладают ли подобным свойством дифференциалы высших порядков. Покажем, например, что уже второй дифференциал этим свойством не обладает.

Пусть  $y = f(x)$  и  $x = \varphi(t)$ , так что  $y$  можно рассматривать как сложную функцию от  $t$ :  $y = f(\varphi(t))$ . Ее первый дифференциал по  $t$  можно написать в форме  $dy = f'(x)dx$ , где  $dx = x'_t dt$  есть функция от  $t$ . Вычисляем второй дифференциал по  $t$ :

$$d^2y = d(y'_x dx) = dy'_x dx + y'_x d(dx).$$

Дифференциал  $dy'_x$  можно, снова пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, взять в форме  $dy'_x = y''_{x^2} dx$ , так что окончательно

$$d^2y = y''_{x^2} dx^2 + y'_x d^2x,$$

В то время как при независимой переменной  $x$  второй дифференциал имел вид  $d^2y = y''_{x^2} dx^2$ .

Таким образом, если  $x$  перестает быть независимой переменной, то дифференциал второго порядка  $d^2y$  выражает через дифференциалы  $x$  двучленной формулой. Для дифференциалов третьего и дальнейших порядков число добавочных членов еще возрастет.

## 10.6. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**Теорема 6 (теорема Ферма).** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке  $x_0$  существует производная, то она равна нулю, т. е.  $f'(x_0) = 0$ .

*Доказательство.* Пусть для определенности функция  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  принимает наибольшее значение, т. е.  $f(x) \leq f(x_0)$  для любого  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  (рис. 10.9).

Ясно, что  $\Delta y = f(x) - f(x_0) \leq 0$  для любого  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

Если  $x > x_0$ , т. е.  $\Delta x = x - x_0 > 0$ , то  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$  и, следовательно,  $f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ . Если  $x < x_0$ , т. е.  $\Delta x < 0$ , то  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$  и, следовательно,  $f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ .

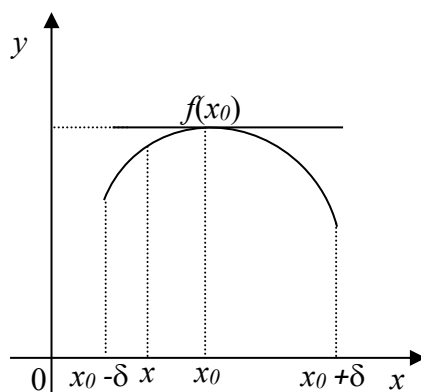


Рис. 10.9

Геометрический смысл теоремы Ферма: если в точке  $x_0$  дифференцируемая функция  $y = f(x)$  имеет наибольшее (наименьшее) значение, то в точке  $(x_0, f(x_0))$  касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна оси  $Ox$ , т. е. горизонтальна.

В качестве приложения теоремы Ферма приведем еще одну теорему о производной функции.

**Теорема Дарбу.** Если функция  $y = f(x)$  имеет конечную производную на промежутке  $[a, b]$ , то функция  $f'(x)$  принимает, в качестве значения, каждое промежуточное число между  $f'(a)$  и  $f'(b)$ .

Эта теорема имеет большое сходство со второй теоремой Коши, согласно которой всякая непрерывная функция переходит от одного значения к другому, лишь переходя через все промежуточные числа. Однако теорема Дарбу не является следствием теоремы Коши, так как производная  $f'(x)$  непрерывной функции сама может и не быть непрерывной функцией.

**Теорема 7 (теорема Ролля).** Пусть функция  $y = f(x)$ :

- 1) непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
- 2) дифференцируема в каждой точке интервала  $(a, b)$ ;
- 3)  $f(a) = f(b)$ , т. е. на концах отрезка принимает равные значения.

Тогда существует хотя бы одна точка  $c \in (a, b)$ , такая, что  $f'(c) = 0$ .

*Доказательство.* Функция, непрерывная на отрезке, принимает наибольшее  $M$  и наименьшее  $m$  значения, т. е.

существуют точки  $x_1, x_2 \in [a, b]$  такие, что  $f(x_1) = m$  и  $f(x_2) = M$  и выполняются неравенства  $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$ .

Возможны два случая: 1)  $m = M$ ; 2)  $m < M$ .

1. В этом случае  $f(x) = m = M = \text{const}$ . Поэтому  $f'(x) = 0$  в каждой точке интервала  $(a, b)$ . В качестве точки  $c$  можно взять любую точку интервала  $(a, b)$ .

2. В этом случае ( $m < M$ ), учитывая, что  $f(a) = f(b)$ , либо  $x_1 \in (a, b)$ , либо  $x_2 \in (a, b)$ , т.е. одно из значений  $m$  или  $M$  принимается внутри интервала  $(a, b)$ . Таким образом, существует точка  $c \in (a, b)$ , в которой функция  $y = f(x)$  принимает наибольшее или наименьшее значение, и по теореме Ферма  $f'(c) = 0$ .

Геометрически теорема Ролля означает, что у графика непрерывной на отрезке и дифференцируемой внутри него функции, принимающей на его концах одинаковые значения, существует точка, в которой касательная параллельна оси  $Ox$  (рис. 10.10).

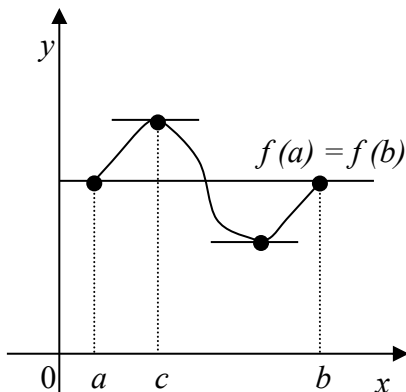


Рис. 10.10

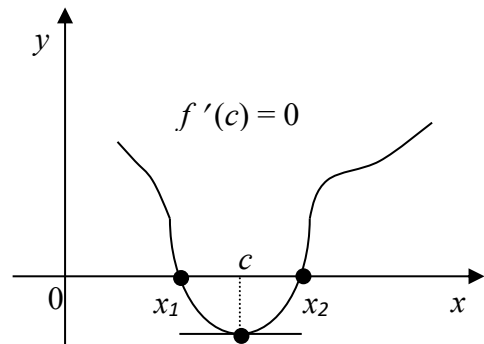


Рис. 10.11

Из теоремы Ролля вытекает еще один важный вывод.

Напомним, что нулем функции  $y = f(x)$  называется точка  $c$  такая, что  $f(c) = 0$ .

Пусть функция  $y = f(x)$  удовлетворяет условиям теоремы Ролля, тогда между двумя нулями функции  $y = f(x)$  всегда лежит хотя бы один нуль ее производной:  $f'(c) = 0, c \in (x_1, x_2)$  (рис. 10.11).

**Теорема 8 (теорема Лагранжа о конечном приращении).**

Пусть функция  $y = f(x)$ :

- 1) непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ;
- 2) дифференцируема в каждой точке интервала  $(a, b)$ .

Тогда существует хотя бы одна точка  $c \in (a, b)$ , такая, что  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$  или  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную функцию  $F(x) = f(x) - \lambda(x)$ , которая непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируема в интервале  $(a, b)$  при любом выборе числа  $\lambda$ , причем  $F'(x) = f'(x) - \lambda$ . Выберем  $\lambda$  так, чтобы  $F(a) = F(b)$ , т. е. чтобы  $f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b$ . Отсюда получим  $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Тогда для функции  $F(x)$  выполняются все условия теоремы Ролля. Поэтому существует хотя бы одна точка  $c \in (a, b)$  такая, что  $F'(c) = 0$ , т. е.  $f'(c) - \lambda = 0$  и  $f'(c) = \lambda$ . Окончательно получаем  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем. Пусть  $A(a, f(a)), B(b, f(b))$  – концы графика функции  $y = f(x)$ ,  $AB$  – хорда, соединяющая точки  $A$  и  $B$  (рис 10.12). Отношение  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  есть угловой коэффициент хорды  $AB$ , т. е. тангенс угла наклона хорды к оси  $Ox$ , а производная  $f'(c)$  – угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(c, f(c))$ .

Таким образом, теорема Лагранжа показывает, что в интервале  $(a, b)$  существует точка  $c$ , в которой касательная к графику параллельна хорде  $AB$ .

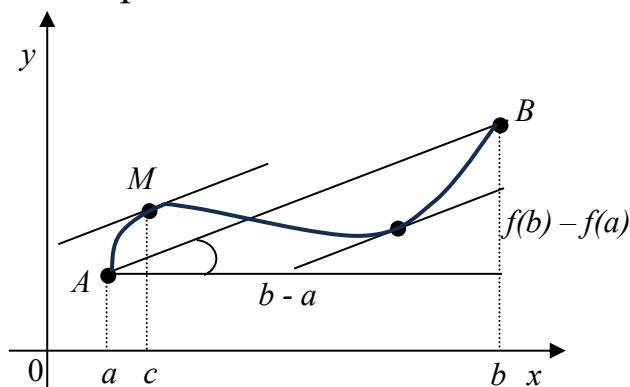


Рис. 10.12

*Следствие 1.* Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и в интервале  $(a, b)$  имеет производную, равную нулю,  $f'(c) = 0 \forall x \in (a, b)$ , то функция постоянна на отрезке  $[a, b]$ :

$$f(x) = c = \text{const.}$$

*Доказательство.* Выберем произвольно точки  $x_1, x_2 \in [a, b]$ ,  $x_1 < x_2$ . Тогда на отрезке  $[x_1, x_2] \subset [a, b]$  функция  $y = f(x)$  удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, поэтому существует точка  $c \in (x_1, x_2)$  такая, что  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ . По условию,  $f'(x) = 0$  на  $(a, b)$ , в частности  $f'(c) = 0$ . Поэтому  $f(x_2) - f(x_1) = 0$  и  $f(x_2) = f(x_1)$  для любых  $x_1, x_2 \in [a, b]$ . Это и означает, что функция  $y = f(x)$  постоянна на отрезке  $[a, b]$ .

*Следствие 2.* Пусть функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и дифференцируемы в интервале  $(a, b)$ . Если они имеют равные производные  $f'(x) = g'(x)$  для всех  $x \in (a, b)$ , то эти функции отличаются лишь на константу:

$$f(x) = g(x) + C,$$

где  $C$  – константа.

*Доказательство.* Функция  $F(x) = f(x) - g(x)$  удовлетворяет условиям следствия 1 и  $F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ . Поэтому  $F(x) = C = const$ , т. е.  $f(x) - g(x) = C$ .

*Замечание.* Рассмотрим приращение  $\Delta y = f(x) - f(x_0)$  функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ . По теореме Лагранжа существует такая точка  $c$ , лежащая между точками  $x_0$  и  $x$ , что  $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$  или  $\Delta y = f'(c) \Delta x$ . В таком виде теорему Лагранжа называют теоремой о среднем или формулой конечных приращений.

## 10.7. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ В РЯД ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

### Теорема Тейлора.

Пусть функция  $y = f(x)$  в точке  $x \in U(a)$  имеет производную не ниже  $(n+1)$ -го порядка, то есть  $\exists f^{(n+1)}(x), x \in U(a)$ . Тогда для всякого  $x$  из  $U(a)$  и некоторого  $\xi \in (x; a) \subset U(a)$  справедливо представление функции в следующем виде (разложение в окрестности точки  $x = a$ ):

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + R_{n+1}(x),$$

где  $R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$  — остаток ( $p$  – произвольное положительное число).

При  $a = 0$  разложение называется разложением в ряд Маклорена (разложение в окрестности нуля):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x).$$

**Теорема 9.** Такое разложение функции в данной окрестности единственное.

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

**Пример 13.**

$$1. f(x) = e^x, x \in U(0).$$

$$f(0) = 1; f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1.$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(0) = 1.$$

$$\text{Тогда } f(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + R_{n+1}(x).$$

$$2. f(x) = (1+x)^n, n \in \mathbb{N}, x \in U(0).$$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1};$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2};$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = n!.$$

$$\text{Тогда } f(x) \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n!}{n!} x^n + R_{n+1}(x).$$

**Пример 14.** Разложить функцию  $f(x) = \frac{1}{x}$  в ряд Тейлора в окрестности  $x_0 = -1$ .

$$f(-1) = -1;$$

$$f'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1$$

...

$$\text{Тогда } f(x) \approx -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \dots - (x+1)^n + R_{n+1}(x).$$

**Пример 15.** Разложить функцию  $f(x) = \ln(x+1)$  в ряд Тейлора в окрестности  $x_0 = 0$ .

$$f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, f''(0) = -1;$$

$$f'''(x) = \frac{((1+x)^{-2})'}{(1+x)^4} = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}, f'''(0) = 2;$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1+x)^n} \cdot (-1)^{n-1}, \quad f^{(n)}(0) = \frac{n!}{x^n} \cdot (-1)^{n-1}.$$

$$\text{Тогда } f(x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

### Остаточный член ряда Тейлора

С учётом условий теоремы о разложении функции в ряд Тейлора при всяком  $p > 0$  и  $\xi \in U(x)$  остаточный член  $R_{n+1}(x)$  можно представить в общем виде:

$$R_{n+1}(x) = \left( \frac{x-a}{x-\xi} \right)^p \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n! \cdot p} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$$

- 1) при  $p = n + 1$  – остаточный член в форме Лагранжа;
- 2) при  $p = 1$  – остаточный член в форме Коши (формулы Лагранжа и Коши используют для вычисления с заданной точностью);
- 3) в форме Пеано. Используют, когда точность не так важна, как оценка скорости сходимости степенного ряда Тейлора к функции  $f(x)$ .

### Применение разложения функций в степенные ряды:

1. Аппроксимация функций с заданной степенью точности на заданной окрестности (асимптотическое приближение функций).
2. Приближённое вычисление значения функции в точке с заданной точностью.
3. Вычисление пределов.
4. Вычисление «неберущихся» интегралов.

Кроме того, применяя разложения в ряд Маклорена для функции  $e^z$ ,  $z = x + iy$ , получаем функцию Эйлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ .

## 10.8. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ.

### ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

**Теорема 10.** Пусть функции  $f$  и  $\varphi$  непрерывны и имеют производные в окрестности точки  $a$  ( $a$  – число или  $\infty$ ), за исключением, может быть, точки  $a$ , при этом  $\varphi$  и  $\varphi'$  не равны

нулю в указанной окрестности и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0$ . Тогда, если существует предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$  (конечный или бесконечный), то существует также равный ему предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

В частности, здесь может идти речь о правом или левом пределе, и тогда под окрестностью точки  $a$  понимается правая или левая ее окрестность.

*Доказательство* (для случая  $a$  – конечного).

Полагая  $f(a) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  и  $\varphi(a) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ , доопределим функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  так, чтобы они были непрерывны в точке  $x = a$ . Тогда функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  удовлетворяют условиям теоремы Коши и для любой точки  $x$  из рассматриваемой окрестности найдется между  $a$  и  $x$  точка  $\xi = a + \theta(x - a)$ ,  $0 < \theta < 1$  такая, что

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Если теперь  $x \rightarrow a$ , то  $\xi \rightarrow a$ , так что получаем:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

*Замечание 1.*

Обратное утверждение неверно. Именно из существования предела  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'}{\varphi'}$  следует наличие предела  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{\varphi}$ , но не наоборот!

*Замечание 2.*

Если  $f'(a) = 0$  и  $\varphi'(a) = 0$  и производные  $f'(x)$  и  $\varphi'(x)$  удовлетворяют тем условиям, которые наложены на  $f$  и  $\varphi$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \quad \text{и т.д.}$$

Формула из теоремы 10 называется правилом Лопиталья по имени французского математика, применившего ее для весьма простых случаев. Впрочем, до Лопиталья это правило было известно швейцарскому математику Бернулли.

**Замечание 3.**

Правило Лопиталья «действует не всегда», т.е. предел отношения функций может существовать и в случае, когда предел отношения производных не существует.

Например, при  $a = 0$ ,  $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$ ,  $\varphi(x) = \sin x$  существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = 0,$$

в то время как предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}}{\cos x}$  не существует.

**Теорема 11.** Пусть функции  $y = f(x)$  и  $y = \varphi(x)$  непрерывны и имеют производные  $f'$  и  $\varphi'$  в окрестности (в частности, в левой или правой окрестности) точки  $a$  (конечной или бесконечной), за исключением самой точки  $a$ . При этом  $\varphi' \neq 0$  в указанной окрестности и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$  ( $+\infty$  или  $-\infty$ ). Тогда, если

существует предел  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ , то существует равный ему предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A \text{ (без доказательства).}$$

**Пример 16.** Примеры использования правила Лопиталья.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cos 5x}{3} = \frac{5}{3};$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$

В последнем случае правило Лопиталья было применено трижды, так как неопределенность вида  $\frac{0}{0}$  получалась как для функций, так и для первых и вторых производных.

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cos \frac{k}{x} \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} k \cos \frac{k}{x} = k \cdot 1 = k.$

Мы рассмотрели примеры раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Встречаются неопределенности вида  $0 \cdot \infty$ ;  $0^0$ ;  $\infty^0$ ;  $1^\infty$ ;  $\infty - \infty$ . Путем подходящих замен переменных они, как правило, сводятся к неопределенностям вида  $\frac{0}{0}$  или  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Пример 17.**

1. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x$  – это неопределенность  $0 \cdot \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n}{n} = 0.$$

2. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$  – это неопределенность  $\infty - \infty$ .

Приведем дроби к общему знаменателю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \text{ (неопределенность } \frac{0}{0} \text{)}.$$

Прежде чем применить правило Лопиталю, заменим знаменатель дроби эквивалентной ему бесконечно малой.

Получим  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4}$ . По правилу Лопиталю

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2\sin x \cos x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{6x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{6x^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

**Пример 18.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ . Пусть  $x^x = y$ . Тогда

$$\ln \lim y = \lim \ln y = \lim \ln(x^x) = \lim (x \ln x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

$$\ln \lim y = 0, \lim y = e^0 = 1, \text{ т.е. } \lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$$

### ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Найти производную.

1. $y = \sqrt{x} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+a}) - \sqrt{x+a}.$	2. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$
---	-------------------------------------

3. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x})$ .	4. $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$ .
5. $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$ .	6. $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$ .
7. $y = \ln^2(x + \cos x)$ .	8. $y = \ln^3(1 + \cos x)$ .
9. $y = \ln \frac{x^2}{1-x^2}$ .	10. $y = \operatorname{Intg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ .
11. $y = \ln^4 \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ .	12. $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} + a^{\pi\sqrt{2}}$ .
13. $y = \ln \sin \frac{2x+4}{x+1}$ .	14. $y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x$ .
15. $y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x$ .	16. $y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)/2$ .
17. $y = \ln \cos \frac{2x+3}{x+1}$ .	18. $y = \lg \ln(\operatorname{ctg} x)$ .
19. $y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ .	20. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}\operatorname{tg} x + \sqrt{1+2\operatorname{tg}^2 x})$
21. $y = \ln \arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$ .	22. $y = \ln \arccos \sqrt{1-e^{4x}}$ .
23. $y = \ln(bx + \sqrt{a^2 + b^2x^2})$ .	24. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - x\sqrt{2}}$ .
25. $y = \ln \ln^2 \ln^3 x$ .	26. $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$ .
27. $y = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}$ .	28. $y = \ln \frac{\ln x}{\sin(1/x)}$ .
29. $y = \ln \ln \sin(1+1/x)$ .	30. $y = \ln \ln^3 \ln^2 x$ .

Задача 2. Найти производную.

1. $y = (\cos(x+2))^{\ln x}$	6. $y = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$
------------------------------	--

2. $y = (\operatorname{tg}3x)^{\arcsin\sqrt{x}}$	7. $y = (\cos(x+5))^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$
3. $y = (\arcsin6x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$	8. $y = (\ln(x+3))^{\sin\sqrt{x}}$
4. $y = (\ln(2x - 7))^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$	9. $y = (\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$
5. $y = (\operatorname{arctg}6x)^{\sqrt{x-2}}$	10. $y = (\sin6x)^{\arccos\sqrt{x}}$

Задача 3. Найти производную.

1. $\operatorname{tgy} = xy$	6. $xy = \operatorname{arctg}x$
2. $x^3 + y^3 = a^3$	7. $\ln y + x/y = 0$
3. $x^3 + x^2y + y^2 = 0$	8. $\ln x + e^y = 0$
4. $y - 0,3\sin y = x$	9. $\operatorname{arctg}(x+y) = x$
5. $e^y = x+y$	10. $\operatorname{arctg}x = \ln(x^2+y^2)$

Задача 4. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}x - x}{x - \sin x}$	6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}x - x}{2\sin x + x}$
2. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1/\cos^2 x - 2\operatorname{tg}x}{1 + \cos 4x}$	7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\frac{\pi x}{2})}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg}x$	8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg}x}{x^3}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}$	9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$	10. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Дайте определение производной функции, ее геометрический и физический смысл.
2. Сформулируйте основные правила дифференцирования.

3. Приведите формулы дифференцирования основных элементарных функций.
4. Основные приложения производной.
5. Дифференцирование сложной, обратной и параметрически заданной функций.
6. Что такое дифференцирование методом логарифмической производной? Когда его применяют?
7. Что называется дифференциалом функции? Каков его геометрический смысл?
8. Что такое инвариантность формы первого дифференциала? Сохраняется ли она для второго дифференциала?
9. Свойства дифференцируемых функций: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
10. Формулы Тейлора и Маклорена.
11. Правило Лопиталю.
12. Производные и дифференциалы высшего порядка.
13. Что называется производной второго порядка? Каков физический смысл производной второго порядка?

# 11. ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

## 11.1. АСИМПТОТЫ

Для многих функций существуют прямые, к которым графики функций неограниченно приближаются. Такие прямые называют **асимптотами**, и их точное определение выглядит следующим образом.

**Определение 1.** Прямая  $\ell$  называется асимптотой кривой, если при неограниченном удалении точки  $M$  кривой от начала координат расстояние от точки  $M$  до прямой  $\ell$  стремится к нулю.

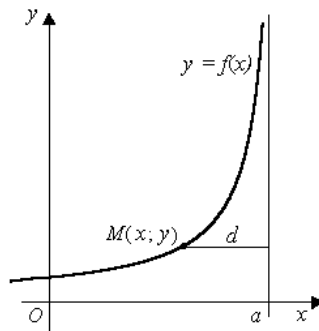


Рис. 11.1

*Замечание.* Выделяют два вида асимптот: вертикальные и наклонные. Вертикальные асимптоты кривая  $y = f(x)$  не пересекает, наклонные — может пересекать.

**Теорема 1.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена хотя бы в некоторой полуокрестности точки  $x = a$  и хотя бы один из ее односторонних пределов в этой точке бесконечен, т.е. равен  $+\infty$  или  $-\infty$ . Тогда прямая  $x = a$  является *вертикальной* асимптотой графика функции.

Таким образом, вертикальные асимптоты графика функции следует искать в точках разрыва функции или на концах ее области определения (если это конечные числа).

**Теорема 2.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена при значениях аргумента, достаточно больших по абсолютной величине, и существует конечный предел функции  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ . Тогда прямая  $y = b$  есть *горизонтальная* асимптота графика функции  $y = f(x)$ .

Может случиться, что  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b_1$ , а  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b_2 \neq b_1$ , причем  $b_1$  и  $b_2$  — конечные числа, тогда график имеет две

различные горизонтальные асимптоты: левостороннюю и правостороннюю. Если же существует лишь один из конечных пределов  $b_1$  или  $b_2$ , то график имеет либо одну левостороннюю, либо одну правостороннюю горизонтальную асимптоту.

**Теорема 3.** Прямая  $y = kx + b$  является *наклонной* асимптотой кривой  $y = f(x)$  тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = b$ .

*Замечания.*

1. Из теоремы следует, что график функции  $y = f(x)$  может иметь наклонную асимптоту только если функция определена в окрестности  $+\infty$  или  $-\infty$ . Причем, наклонных асимптот у кривой  $y = f(x)$  может быть не более двух: для правой ветви (т.е. при  $x \rightarrow +\infty$ ) и для левой ветви (т.е. при  $x \rightarrow -\infty$ ).

2. Если  $\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow +(-)\infty} (f(x) - kx) = b$ , то наклонная асимптота имеет уравнение  $y = b$ , т.е. является горизонтальной.

## 11.2. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Будем изучать поведение функции  $y = f(x)$  вблизи некоторой точки  $x_0$ . Конечно, мы считаем, что  $f(x)$  определена в некоторой окрестности этой точки. Тогда возможны следующие случаи.

**Определение 2.** Точка  $x_0$  называется точкой *локального максимума* (*минимума*) функции  $f$ , если существует такая окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$ , что для всех  $x \in X \cap U(x_0)$  выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$  (соответственно  $f(x) \geq f(x_0)$ ).

Если для всех  $x \in X \cap U(x_0)$  и  $x \neq x_0$  выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$  (соответственно  $f(x) > f(x_0)$ ), то точка  $x_0$  называется *точкой строгого локального максимума* (*минимума*).

В дальнейшем для простоты точки (строгого) локального максимума и минимума функции будем кратко называть ее точками (строгого) максимума и минимума. Точки максимума и минимума (строгого) функции называют *ее точками экстремума* (*строгого*).

**Теорема 4** (необходимое условие экстремума). Если функция имеет в точке локального экстремума производную, то эта производная равна нулю.

*Доказательство.*

Действительно, из того, что у функции в точке существует производная, следует, что функция определена в некоторой окрестности этой точки, а так как эта точка является точкой локального экстремума, то ее окрестность можно выбрать так, что сужение на выбранную окрестность функции примет в рассматриваемой точке наибольшее или наименьшее значение. Из теоремы Ферма, примененной к указанному сужению функции, следует, что если в указанной точке производная существует, то она равна нулю.

Отметим, что условия равенства нулю производной или ее несуществования в данной точке, будучи необходимыми условиями экстремума, не являются достаточными условиями для наличия экстремума в этой точке. Например, у функции  $f(x) = x^3$  производная  $f'(x) = 3x^2$  в точке  $x = 0$  равна нулю, а экстремума в этой точке нет.

**Определение 3.** Если функция определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и в этой точке производная функции либо существует и равна нулю, либо не существует, то точка  $x_0$  называется *критической точкой* этой функции.

Критические точки функции, в которых производная функции равна нулю, называются также и *стационарными точками*.

Теорема 4 означает, что все точки локального экстремума функции находятся среди множества ее критических точек.

**Определение 4.** Точка  $x_0$  называется *точкой возрастания* (убывания) функции  $y = f(x)$ , если у точки  $x_0$  существует такая окрестность  $U(x_0)$ , что при  $x \in X \cap U(x_0)$ , и  $x < x_0$ , выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$  (соответственно  $f(x) \geq f(x_0)$ ), а при  $x \geq x_0$  – неравенство  $f(x) \geq f(x_0)$  (соответственно  $f(x) \leq f(x_0)$ ).

Если при  $x \neq x_0$  выполняется, кроме того, неравенство  $f(x) \neq f(x_0)$ , то точка  $x_0$  называется *точкой строгого возрастания* (строгого убывания) функции. Точки строгого экстремума, точки строгого возрастания и убывания удобно описывать в терминах

знака приращения функции  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . В точке строгого максимума приращение функции в некоторой окрестности этой точки имеет отрицательное значение при  $\Delta x \neq 0$ , в точке строгого минимума – положительное, в точке строгого возрастания при  $\Delta x < 0$  – отрицательное, при  $\Delta x > 0$  – положительное, а в точке строгого убывания – положительное при  $\Delta x < 0$  и отрицательное при  $\Delta x > 0$  (рис. 11.2).



Рис. 11.2

Конечно, здесь всегда предполагается, что приращение аргумента  $\Delta x$  таково, что точка  $x_0 + \Delta x$  принадлежит области определения  $X$  функции. Таким образом, при переходе через точку строгого экстремума  $x_0$  (т. е. при изменении знака приращения аргумента  $\Delta x$ ) приращение функции не меняет знака, а при переходе через точки строгого возрастания и убывания меняет знак. Нетрудно сформулировать в терминах знака производной в точке достаточные условия того, что эта точка является точкой строгого возрастания или убывания (в этом случае согласно определению производной функция заведомо определена в некоторой окрестности рассматриваемой точки).

**Лемма.** Если в точке конечная или бесконечная производная положительна (соответственно отрицательна), то эта точка является точкой строгого возрастания (строгого убывания) функции.

Таким образом, если в точке  $x_0$  существует не равная нулю производная (конечная или определенного знака бесконечная), то эта точка является либо точкой строгого возрастания, либо точкой строгого убывания, а следовательно, не может быть точкой экстремума. Тем самым мы еще раз доказали, что если в точке экстремума существует конечная или определенного знака бесконечная производная, то она равна нулю.

*Замечание.* Аналогично лемме нетрудно доказать, что если в точке производная, конечная или бесконечная, неотрицательна (неположительна), то эта точка является точкой возрастания (соответственно убывания) функции, но, вообще говоря, нестрогого.

Отметим, что у функции, равной тождественно постоянной на множестве ее задания, все точки этого множества являются как точками экстремума, так и точками возрастания и убывания функции.

Все это делает целесообразным введение понятий как точек экстремума, точек возрастания и убывания функции, так и точек строгого экстремума, точек строгого возрастания и строгого убывания функции.

**Теорема 5.** Пусть функция непрерывна в некоторой окрестности точки, дифференцируема в ее проколотовой окрестности, и производная с каждой стороны от рассматриваемой точки сохраняет один и тот же знак. Для того чтобы функция в этой точке имела строгий максимум (строгий минимум), необходимо и достаточно, чтобы при переходе через нее производная меняла знак с плюса на минус (соответственно с минуса на плюс). Для того чтобы эта точка была точкой строгого возрастания (строгое убывания) функции, необходимо и достаточно, чтобы производная с обеих сторон от рассматриваемой точки была положительной (отрицательной).

Таким образом, образно говоря, в условиях теоремы точка является точкой строгого максимума (строгое минимума) функции тогда и только тогда, когда в этой точке строгое возрастание (строгое убывание) функции сменяется ее строгим убыванием (соответственно строгим возрастанием). Подобным образом точка является точкой строгого возрастания (строгое

убывания) функции тогда и только тогда, когда с обеих сторон от этой точки функция строго возрастает (соответственно строго убывает) (рис.11.3).

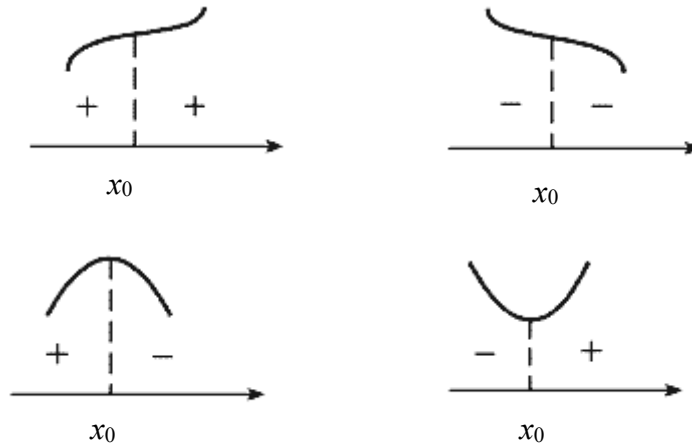


Рис.11.3

Следует обратить внимание на то, что рассмотренным здесь случаем, когда производная с каждой стороны от данной точки не меняет своего знака (а поэтому можно говорить об изменении знака производной при переходе через точку), не исчерпываются возможные ситуации даже для дифференцируемых функций: может случиться, что для сколь угодно малой окрестности по одну из сторон от точки  $x_0$  или по обе стороны производная меняет знак. В этих точках приходится применять другие методы для исследования функций на экстремум. Таким образом, в более широком классе функций, дифференцируемых в окрестности рассматриваемой точки, кроме, быть может, самой этой точки, условие изменения знака производной в данной точке является лишь достаточным условием экстремума.

На этот случай мы укажем другое достаточное условие наличия экстремума в данной точке  $x_0$  возможного экстремума, не требующее исследования знака  $f'(x)$  в окрестности  $x_0$ , но зато предполагающее существование в точке  $x_0$ , отличной от нуля конечной второй производной  $f''(x)$ .

**Теорема 6.** Пусть функция  $y = f(x)$  имеет в данной точке  $x_0$  возможного экстремума конечную вторую производную. Тогда

функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  максимум, если  $f''(x) < 0$ , и минимум, если  $f''(x) > 0$ .

### 11.3. ВЫПУКЛОСТЬ (ВОГНУТОСТЬ) И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Пусть  $\ell$  – кривая,  $M_0$  – точка кривой, причем в  $M_0$  существует невертикальная касательная к  $\ell$ . Кривую  $\ell$  называют выпуклой в точке  $M_0$ , если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит ниже касательной, проведенной к  $\ell$  в точке  $M_0$ . Кривую  $\ell$  называют вогнутой в точке  $M_0$ , если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит выше касательной, проведенной к  $\ell$  в точке  $M_0$  (рис. 11.4).

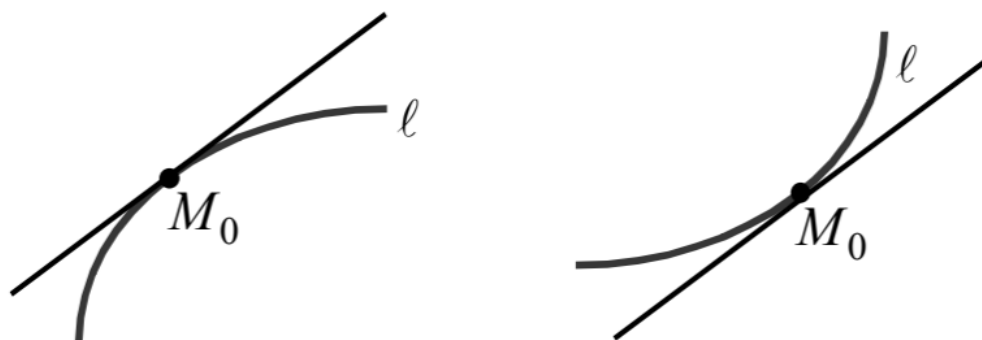


Рис. 11.4

Точки кривой, которые разделяют ее выпуклые и вогнутые участки, называются точками *перегиба* кривой.

*Замечания.*

1. Выпуклость и вогнутость кривой в точке – локальные понятия. Они определяют относительное расположение точек кривой и касательной вблизи точки касания. В точках, удаленных от точки касания, кривая и касательная могут располагаться произвольным образом.

2. В точке перегиба касательная к кривой (если она существует) пересекает кривую (кривая переходит с одной стороны касательной на другую) (рис.11.5).

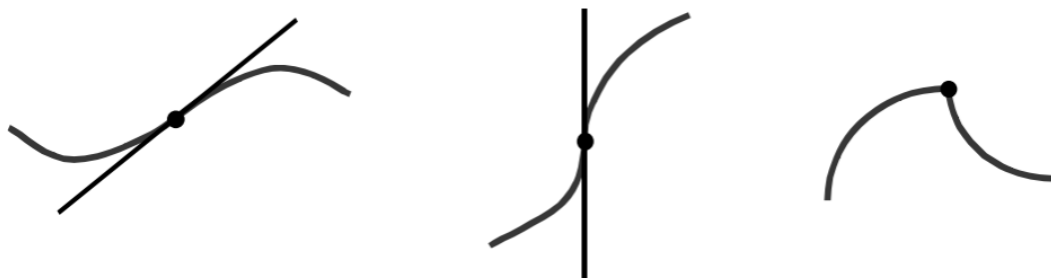


Рис.11.5

Кривая  $y = f(x)$  называется выпуклой (вогнутой) на интервале  $(a; b)$ , если  $\forall x \in (a; b)$  кривая выпукла (вогнута) в соответствующей точке  $M(x; f(x))$ .

*Замечания.*

1. Если  $M_0(x_0; f(x_0))$  – точка перегиба кривой  $y = f(x)$ , то  $x_0$  – внутренняя точка области определения функции  $y = f(x)$ .

2. Точками перегиба кривой  $y = f(x)$  часто называют точки, которые разделяют интервалы выпуклости и вогнутости этой кривой (т.е. абсциссы точек перегиба кривой  $y = f(x)$ ).

**Теорема 7** (необходимое и достаточное условия выпуклости (вогнутости) графика функции).

Пусть функция  $y = f(x)$  дважды дифференцируема на интервале  $(a; b)$ . Тогда:

1) если кривая  $y = f(x)$  выпукла (вогнута) на интервале  $(a; b)$ , то  $f''(x) \leq 0$  ( $f''(x) \geq 0$ ),  $\forall x \in (a; b)$  (необходимое условие выпуклости (вогнутости) графика);

2) если  $f''(x) < 0$  ( $f''(x) > 0$ )  $\forall x \in (a; b)$ , то кривая  $y = f(x)$  выпукла (вогнута) на интервале  $(a; b)$  (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика).

*Замечание.* Точки, в которых вторая производная функции  $y = f(x)$  обращается в ноль или имеет разрыв, называют иногда критическими точками II рода функции  $y = f(x)$  (или критическими точками функции  $y = f(x)$  по второй производной).

**Теорема 8** (достаточное условие перегиба кривой  $y = f(x)$ ). Пусть  $x_0$  – внутренняя точка  $D(f)$  и функция  $y = f(x)$  дважды дифференцируема в  $U^*(x_0, \delta)$ . Если при переходе через точку  $x_0$  функция  $f''(x)$  меняет знак, то точка  $M_0(x_0; f(x_0))$  является точкой перегиба кривой  $y = f(x)$ .

## 11.4. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Для качественного исследования графика функции  $y = f(x)$  целесообразно провести следующие исследования:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить вопрос о существовании асимптот (вертикальных и наклонных).
3. Найти области возрастания и убывания функции и точки экстремума.
4. Найти области сохранения направления выпуклости и точки перегиба графика.
5. Найти точки пересечения с осью  $Ox$ .

Обычно по полученным данным легко строится эскиз графика.

### Пример 1.

В качестве примера построим график функции

$$y = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}.$$

1. Наша функция представляет собой рациональную дробь. Она определена при всех значениях  $x$ , при которых знаменатель не обращается в нуль. Область определения функции  $x \neq 0$  (определена везде кроме точки  $x = 0$ ).

2. Выясним, есть ли асимптоты. Для этого найдем значения предела при стремлении функции к нулю слева и справа.

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = -\infty.$$

Таким образом, имеется вертикальная асимптота  $x = 0$ .

А есть ли наклонная асимптота?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^3} = \frac{1}{2}; \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ f(x) - \frac{1}{2}x \right] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 - 2x^3}{4x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5x^2 + 14x - 6}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-5 + \frac{14}{x} - \frac{6}{x^2}}{4} = -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Итак, при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$  график имеет наклонную асимптоту  $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ .

3. Для нахождения области возрастания и убывания вычислим первую производную функции.

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(2x^3 - 5x^2 + 14x - 6)' \cdot x^2 - (2x^3 - 5x^2 + 14x - 6)(x^2)'}{4x^4} = \\
 &= \frac{(6x^2 - 10x + 14) \cdot x^2 - (2x^3 - 5x^2 + 14x - 6) \cdot 2x}{4x^4} = \\
 &= \frac{6x^3 - 10x^2 + 14x - 4x^3 + 10x^2 - 28x + 12}{4x^3} = \frac{x^3 - 7x + 6}{2x^3} = \\
 &= \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.
 \end{aligned}$$

Имея в виду, что при  $x = 0$  функция и ее первая производная не существуют, составим таблицу, в которой отразим области сохранения знака первой производной  $y'$ .

Область значений $x$	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Знак $y'$	+	-	+	-	+
Поведение функции	Возр.	Убыв.	Возр.	Убыв.	Возр.

Из приведенной таблицы очевидно, что функция имеет следующие точки экстремума:

1) максимум при  $x = -3$ , при этом  $f(-3) = -\frac{49}{12}$ ;

2) максимум при  $x = 1$ ,  $f(1) = \frac{5}{4}$ ;

3) минимум при  $x = 2$ ,  $f(2) = \frac{9}{8}$ .

4. Для нахождения областей сохранения выпуклости вычислим вторую производную

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{(x^3 - 7x + 6)' \cdot x^3 - (x^3 - 7x + 6)3x^2}{2x^6} = \\
 &= \frac{(3x^2 - 7) \cdot x^3 - 3x^5 + 21x^3 - 18x^2}{2x^6} = \frac{14x^3 - 18x^2}{2x^6} = \frac{7x - 9}{x^4}.
 \end{aligned}$$

Составим таблицу сохранения знака  $y''$  (заметим, что при  $x = 0$   $y''$  не существует).

Область значений $x$	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \frac{9}{7}$	$\frac{9}{7} < x < \infty$
Знак $y''$	-	-	+
Направление выпуклости графика	Вверх	Вверх	Вниз

Из этой таблицы очевидно, что график функции имеет перегиб в точке  $\left(\frac{9}{7}; f\left(\frac{9}{7}\right)\right)$ .

5. Найдем точки пересечения графика с осью  $Ox$ . Эти точки соответствуют вещественным корням уравнения

$$2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0.$$

Так как  $2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 2x + 6)$ , а квадратный трехчлен  $x^2 - 2x + 6$  имеет только комплексные корни ( $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 6 < 0$ ), то уравнение имеет единственный вещественный корень  $x = \frac{1}{2}$ , т.е. график пересекает ось  $Ox$  только в точке  $x = \frac{1}{2}$ . По полученным данным строим эскиз графика (рис. 11. 6).

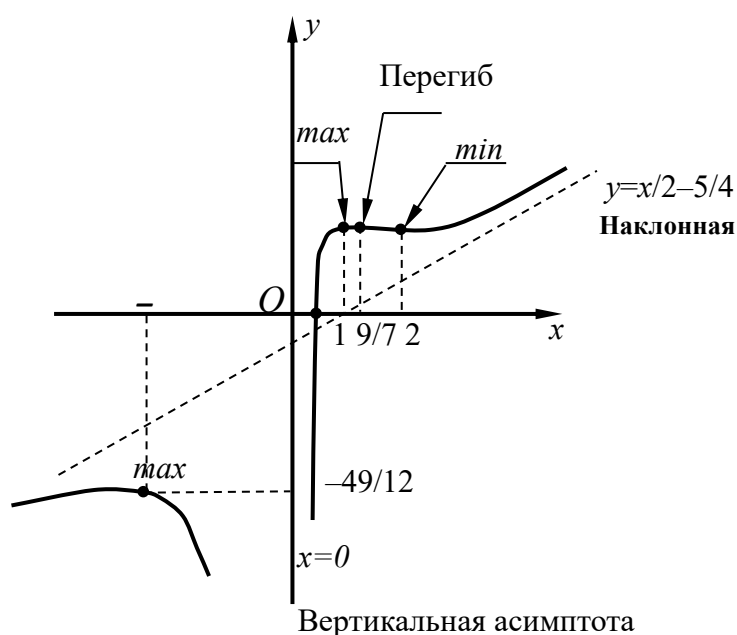


Рис. 11.6

## Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Провести полное исследование функций и построить их графики.

1.  $y = (x^3 + 4)/x^2$ .

2.  $y = (x^2 - x + 1)/(x - 1)$ .

3.  $y = 2/(x^2 + 2x)$ .

4.  $y = 4x^2/(3 + x^2)$ .

5.  $y = 12x/(9 + x^2)$ .

6.  $y = (x^2 - 3x + 3)/(x - 1)$ .

7.  $y = (4 - x^3)/x^2$ .

8.  $y = (x^2 - 4x + 1)/(x - 4)$ .

9.  $y = (2x^3 + 1)/x^2$ .

10.  $y = (x - 1)^2/x^2$ .

11.  $y = (x^3 - 4)/x^2$ .

12.  $y = (1 + 1/x)^2$ .

13.  $y = (12 - 3x^2)/(x^2 + 12)$ .

14.  $y = \frac{9 + 6x - 3x^2}{x^2 - 2x + 13}$ .

15.  $y = -8x/(x^2 + 4)$ .

16.  $y = ((x - 1)/(x + 1))^2$ .

17.  $y = (3x^4 + 1)/x^3$ .

18.  $y = 4x/(x + 1)^2$ .

19.  $y = 8(x - 1)/(x + 1)^2$ .

20.  $y = (1 - 2x^3)/x^2$ .

21.  $y = 4/(x^2 + 2x - 3)$ .

22.  $y = 4/(3 + 2x - x^2)$ .

23.  $y = (x^2 + 2x - 7)/(x^2 + 2x - 3)$ .

24.  $y = 1/(x^4 - 1)$ .

25.  $y = -(x/(x + 2))^2$ .

26.  $y = (x^3 - 32)/x^2$ .

$$27. y = 4(x+1)^2 / (x^2 + 2x + 4).$$

$$28. y = (3x - 2) / x^3.$$

$$29. y = (x^2 - 6x + 9) / (x - 1)^2.$$

$$30. y = (x^3 - 27x + 54) / x^3.$$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Как определить область определения функции?
2. Приведите пример функции, имеющей точку разрыва, и классифицируйте его.
3. Как свойство четности или нечетности функции может упростить ее исследование?
4. Как найти вертикальные и наклонные (или горизонтальные) асимптоты графика функции?
5. Что такое критические точки первого рода (точки возможного экстремума)? Опишите алгоритм их нахождения с помощью первой производной.
6. Как по знаку первой производной определить интервалы возрастания и убывания функции?
7. Сформулируйте необходимый и достаточный признаки существования экстремума.
8. Что такое точка перегиба?
9. Как с помощью второй производной определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции?
10. Составьте общий план исследования функции и построения ее графика с использованием первой и второй производных. Перечислите все пункты, которые необходимо выполнить.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемое издание отражает ключевые моменты дисциплины «Дифференциальное исчисление», входящей в более общий курс высшей математики «Математический анализ».

В пособии отражены основные понятия и определения теории множеств, введены операции на множествах, особое внимание уделено числовым множествам и их свойствам.

Как продолжение теории числовых множеств рассмотрены вопросы определения и исследования числовых последовательностей, приведена теория пределов числовых последовательностей, включая основные утверждения с доказательствами.

Рассматривая числовую последовательность как наипростейший случай зависимости значений элементов последовательности от их порядкового номера, авторы осуществили переход к определению функции и различным способам ее задания.

Исследование функции одной действительной переменной предлагается проводить исходя из математически выверенных методов определения ее поведения, доказанных утверждений о качествах функций (монотонности, непрерывности, наличии точек разрыва 1-го и 2-го рода) с применением определений и свойств пределов функции в точке и на бесконечности.

Для аналитически заданных функций, обладающих заранее заданными качествами, рассмотрены важнейшие методы исследования с применением аппарата дифференциального исчисления.

Учебное пособие содержит достаточное количество задач для самостоятельного решения с целью овладения как теоретическими, так и практическими навыками решения задач математического анализа в объеме определенных тем.

В приложениях собраны необходимые справочные материалы.

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Математический анализ: учеб. для вузов: в 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. 3-е изд.; М.: Юрайт, 2023. Ч. 2.
2. Математический анализ: учеб. для вузов: в 2 ч. Ч. 1: в 2 кн. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2023. Кн. 2.
3. Введение в алгебру и математический анализ: учеб. пособие / Е. А. Павлов, О. И. Рудницкий, А. И. Фурменко, Т. М. Шамилев. СПб.: Лань, 2023.
4. Множества и отображения. Интенсивное введение в математический анализ для студентов технических вузов: учеб. пособие / Н. В. Филимоненкова, П. А. Бакусов. СПб.: Лань, 2022.
5. Математический анализ. Сборник задач: учеб. пособие для вузов / А. А. Никитин. М.: Юрайт, 2022.
6. Математический анализ: учеб. и практикум для вузов: в 2 ч. / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин; отв. ред. Н. Ш. Кремер. М.: Юрайт, 2022. Ч. 2.
7. Математический анализ: учеб. и практикум для вузов: в 2 ч. / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин; отв. ред. Н. Ш. Кремер. М.: Юрайт, 2022. Ч. 1.
8. Курс математического анализа: учеб. для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2014. Т. 1.
9. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. М.: АСТ: Астрель, 2010.
10. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов: учеб. пособие для студентов вузов / под ред. Б. П. Демидовича; Г. С. Бараненков и др. М.: АСТ: Астрель, 2010; Владимир: ВКТ, 2010.
11. Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 2000.
12. Соминский И. С. Метод математической индукции. М.: Наука, 1974.
13. Шипачев В. С. Курс высшей математики: учеб. для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Проспект, 2005.
14. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая

математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. М.: Высшая школа, 2007. Ч.1.

15. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч: учеб. пособие для втузов. 5-е изд., испр. М.: Высшая школа, 2007. Ч. 2.

16. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа. 4-е изд. М.: Наука, 2006. Ч. 1.

17. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа. 4-е изд. М.: Наука, 2006. Ч. 2.

18. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: в 2 т. СПб.: Лань, 2007. Т. 1.

19. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: в 2 т. СПб.: Лань, 2007. Т. 2.

20. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Интеграл-Пресс, 2004. Т. 1.

21. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Интеграл-Пресс, 2004. Т. 2.

22. Шипачев В. С. Высшая математика: учеб. для вузов. 7-е изд., стер. М.: Высшая школа. 2005.

23. Владимирский Б. К., Горстко А. Б., Ерусалимский Я. М. Математика. Общий курс. СПб.: Издательство Лань, 2005.

24. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для вузов. 4-е изд., стер. М.: Высш. школа, 2004.

25. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ФАЗИС, 1997.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

### ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

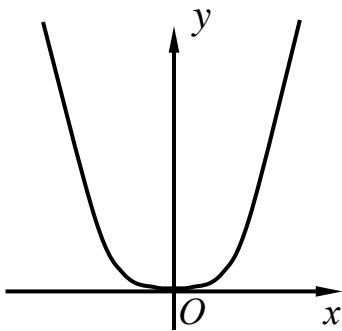
Степенная функция  $y = x^\alpha$ .

1.  $\alpha$  – целое положительное число.

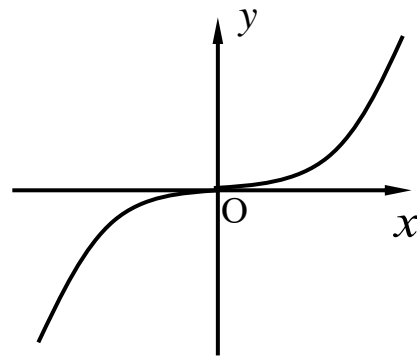
Область определения:  $-\infty < x < \infty$ .

Примеры:

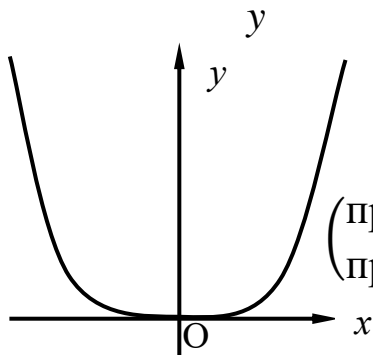
$y = x^2$  (парабола)



$y = x^3$



$y = x^4$

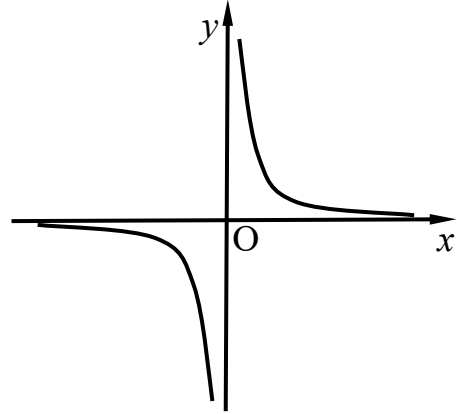
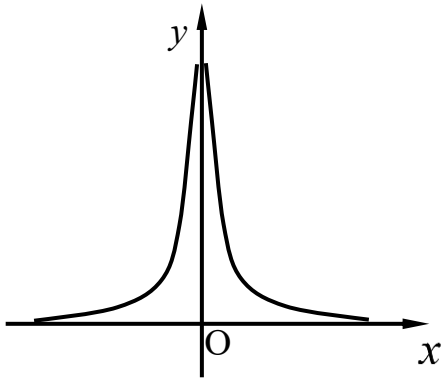


(при  $|x| < 1$  график более пологий,  
при  $|x| > 1$  – более крутой, чем парабола.)

2.  $\alpha$  – целое отрицательное число. Область определения:  
 $x \neq 0$ .

$$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

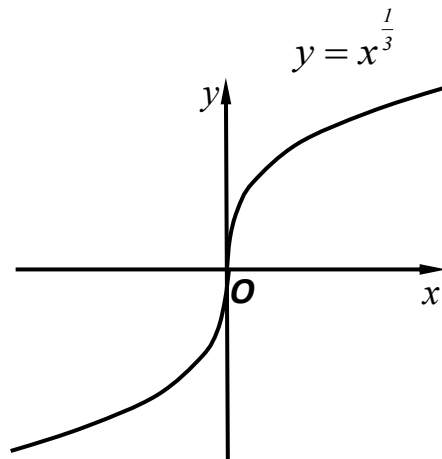
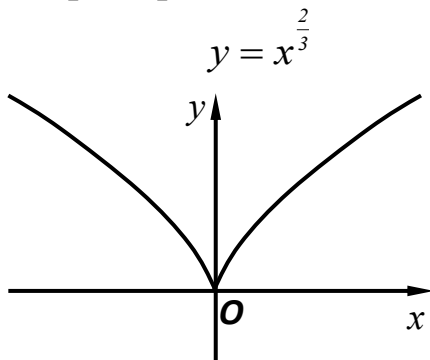
$$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$



3. Если  $\alpha = \frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  – натуральные числа, то:

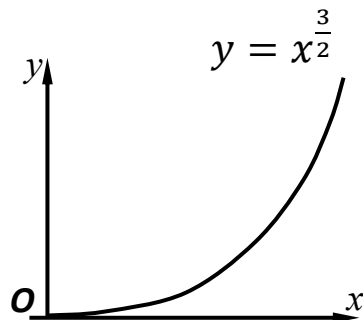
а) Если  $q$  – нечетное, то область определения:  $-\infty < x < \infty$ .

*Примеры:*



б) Если  $q$  – четное, то область определения:  $0 \leq x < \infty$ .

*Пример:*

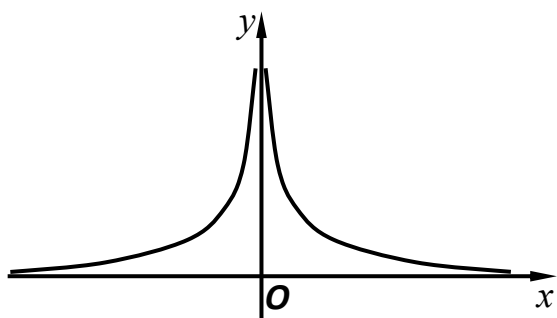


4. Если  $\alpha = -\frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  – натуральные числа, то:

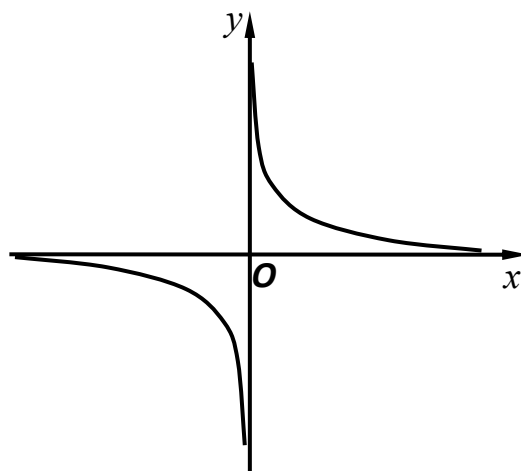
а) Если  $q$  – нечетное, то область определения:  $x \neq 0$ .

Примеры:

$$y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$



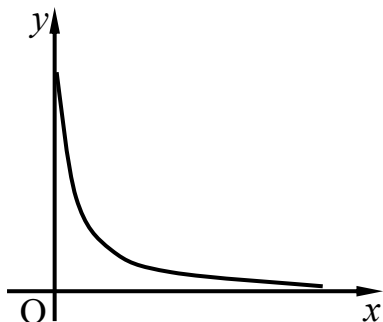
$$y = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$



б) Если  $q$  – четное, то область определения:  $x > 0$ .

Пример:

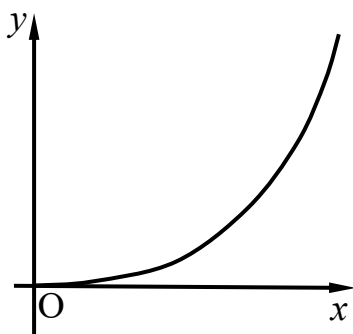
$$y = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$



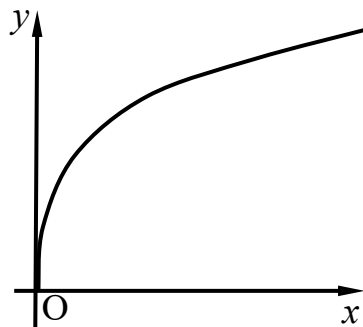
5. Если  $\alpha$  – положительное иррациональное число, то область определения  $0 \leq x < \infty$ .

Примеры:

$$y = x^\pi$$



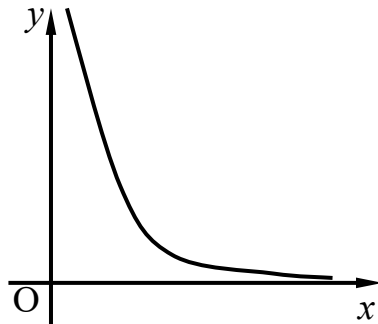
$$y = x^{\frac{1}{\pi}}$$



6. Если  $\alpha$  – отрицательное иррациональное число, то область определения  $x > 0$ .

Пример:

$$y = x^{-\pi} = \frac{1}{x^\pi}$$

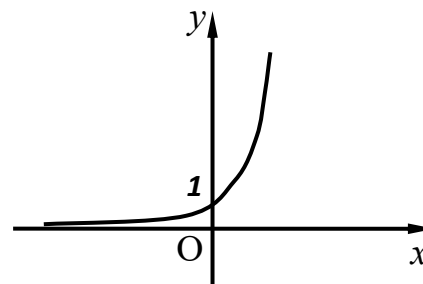
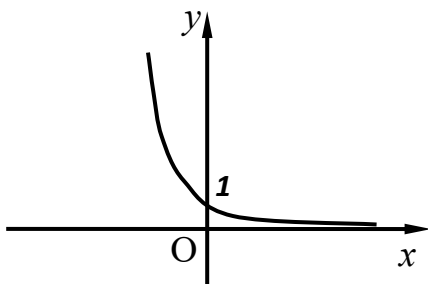


Показательная функция  $y = a^x$ . Напомню, что  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Область определения:  $-\infty < x < \infty$ .

а)  $0 < a < 1$

б)  $a > 1$

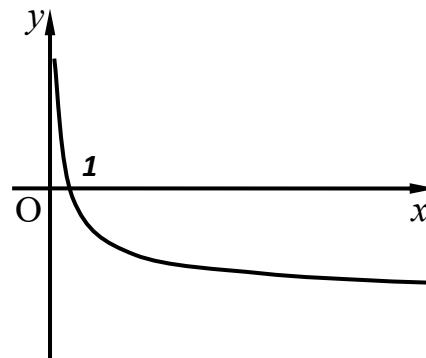
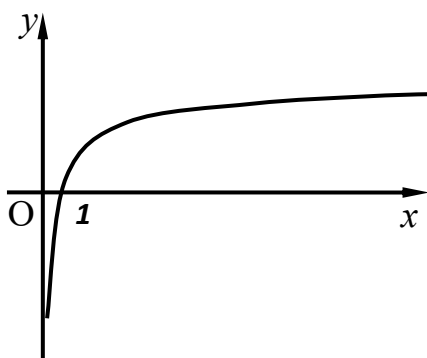


Логарифмическая функция  $y = \log_a x$ . Здесь  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Область определения  $x > 0$ .

а)  $a > 1$

б)  $0 < a < 1$

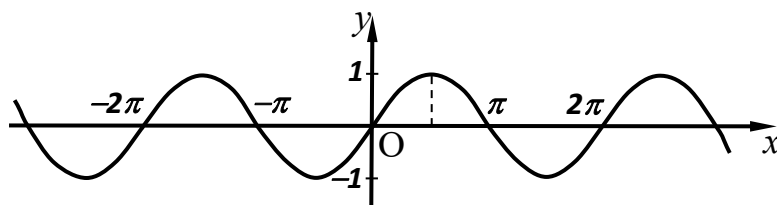


*Тригонометрические функции*

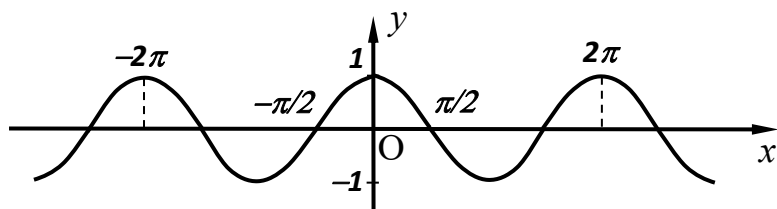
Аргумент  $x$  в тригонометрических функциях  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  и т.д. выражается в радианах. Углу в  $360^\circ$  соответствует  $2\pi$  радиан.

Все тригонометрические функции – периодические. Напомню, что период функций  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  период  $T = 2\pi$ , а для функций  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$  период  $T = \pi$ .

Функция  $y = \sin x$  определена при всех  $x$ . Ее график имеет вид:

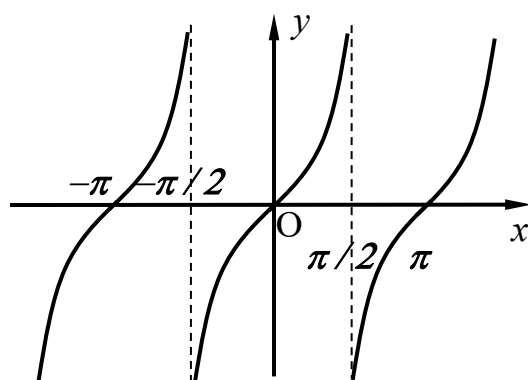


Функция  $y = \cos x$  также определена при всех  $x$ , а график ее изображен ниже:



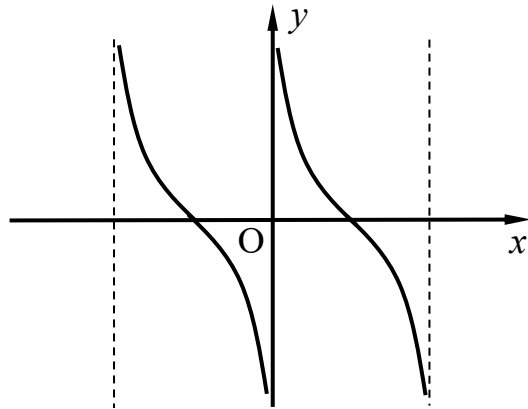
Функция  $y = \operatorname{tg} x$  определена при всех  $x$ , кроме точек  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\mathbb{Z}$  – множество всех целых чисел.

График имеет вид:



Функция  $y = \operatorname{ctg} x$  определена при всех  $x$ , за исключением  $x = \pi k$ .

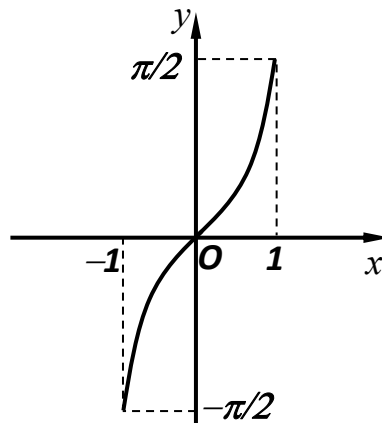
График имеет вид:



*Обратные тригонометрические функции*

Функция  $y = \arcsin x$ ; область определения:  $-1 \leq x \leq 1$ .

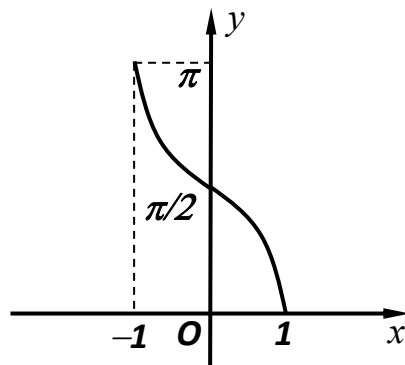
График имеет вид:



Значения функции заполняют отрезок  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

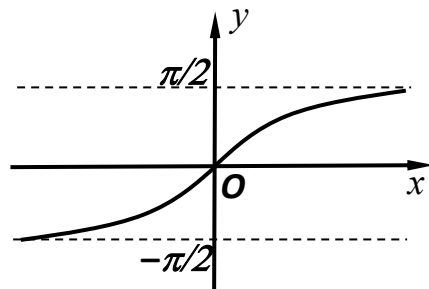
Функция  $y = \arccos x$ ; область определения:  $-1 \leq x \leq 1$ .

График имеет вид:



Значения функции находятся на отрезке  $0 \leq y \leq \pi$ .

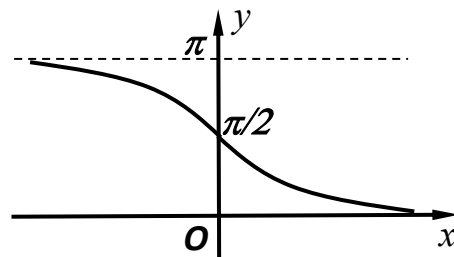
Функция  $y = \operatorname{arctg}x$ ; область определения:  $-\infty < x < +\infty$ .  
График имеет вид:



Значения функции заполняют интервал  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ .

Функция  $y = \operatorname{arcctg}x$  определена при всех  $x$ .

График имеет вид:



Значения функции находятся в интервале  $0 < y < \pi$ .

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1.  $(c)'=0$ , где  $c$  – постоянное число;
2.  $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ ,  $\alpha \in R$ , в частности,  
 $x'=1$ ,  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ,  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ;
3.  $(a^x)'=a^x \ln a$ ,  $(e^x)'=e^x$ ;
4.  $(\log_a x)'=\frac{1}{x \ln a}$ ,  $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ ;
5.  $(\sin x)'=\cos x$ ;
6.  $(\cos x)'=-\sin x$ ;
7.  $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$ ;
8.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ;
9.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
10.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;
11.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ;
12.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ .

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
Условные обозначения .....	5
1. Множества и операции над ними. Числовые множества .....	7
1.1. Множества и операции над ними .....	7
1.2. Числовые множества .....	16
Задания для самостоятельной работы .....	26
Вопросы для самоподготовки .....	28
2. Математическая индукция .....	30
2.1. Множества и операции над ними .....	30
2.2. Примеры решения задач .....	31
Задания для самостоятельной работы .....	39
Вопросы для самоподготовки .....	41
3. Бином Ньютона и специальные числа математики .....	42
3.1. Бином Ньютона .....	42
3.2. Применение формулы бинома Ньютона к приближенным вычислениям .....	45
3.3. Суммы натуральных чисел .....	45
3.4. Фигурные числа .....	50
Задания для самостоятельной работы .....	51
Вопросы для самоподготовки .....	51
4. Понятие отображения .....	52
4.1. Отображение .....	52
Задания для самостоятельной работы .....	61
Вопросы для самоподготовки .....	62
5. Последовательности .....	63
5.1. Определение последовательности .....	63
5.2. Ограниченные и неограниченные последовательности .....	66
5.3. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности .....	68
Задания для самостоятельной работы .....	73

Вопросы для самоподготовки .....	74
6. Предел последовательности .....	75
6.1. Определение предела последовательности .....	75
6.2. Частичные пределы, верхний и нижний пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса .....	80
6.3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства .....	85
6.4. Фундаментальные последовательности и критерий Коши .....	89
Задания для самостоятельной работы .....	93
Вопросы и задания для самоподготовки .....	94
7. Способы представления функций .....	96
7.1. Представление функции в виде таблицы и графика .....	96
7.2. Основные характеристики поведения функции.....	99
7.3. Правила преобразования графиков функций .....	104
Задания для самостоятельной работы .....	110
Вопросы и задания для самоподготовки .....	111
8. Предел функции .....	113
8.1. Определение предела функции по Коши и по Гейне ...	113
8.2. Критерий Коши существования предела функции .....	115
8.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции ....	117
8.4. Замечательные пределы.....	118
8.5. Способы нахождения пределов .....	120
Задания для самостоятельной работы .....	127
Вопросы и задания для самоподготовки .....	132
9. Непрерывность функции .....	133
9.1. Формальное определение непрерывности функции в точке .....	133
9.2. Непрерывность функции на интервале и на отрезке ....	138
9.3. Точки разрыва .....	143
Задания для самостоятельной работы .....	149

Вопросы и задания для самоподготовки .....	150
10. Производная и дифференциал функции одной переменной	151
10.1. Определение производной .....	151
10.2. Основные правила и формулы дифференцирования ....	156
10.3. Дифференцируемость функции .....	158
10.4. Дифференциал функции. Его геометрический смысл и инвариантность первой формы.....	165
10.5. Производные и дифференциалы высших порядков .....	168
10.6. Основные теоремы дифференциального исчисления ..	172
10.7. Разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена.....	176
10.8. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталю .....	178
Задания для самостоятельной работы .....	181
Вопросы и задания для самоподготовки .....	183
11. Исследование графика функции.....	185
11.1. Асимптоты .....	185
11.2. Экстремумы функции .....	186
11.3. Выпуклость(вогнутость) и точки перегиба .....	191
11.4. Общая схема исследования графика функции .....	193
Задания для самостоятельной работы .....	196
Вопросы и задания для самоподготовки .....	197
Заключение .....	198
Рекомендуемая литература .....	199
Приложения.....	201

*Учебное издание*

ВАСИЛЕНКО Вера Викторовна  
КРАМАРЕНКО Андрей Александрович  
РУДЕНКО Ольга Валентиновна

## ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

---

Подписано в печать 21.11.2025. Выход в свет 00.00.2025.  
Формат 60×84 1/16. Печать цифровая. Уч.-изд. л. 13,3.  
Тираж 500 экз. Заказ №

Кубанский государственный университет  
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

Издательско-полиграфический центр  
Кубанского государственного университета  
350040, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.