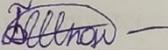


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

Факультет компьютерных технологий и прикладной математики
Кафедра прикладной математики

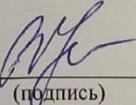
КУРСОВАЯ РАБОТА

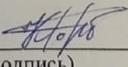
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ В КАНАЛАХ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Работу выполнил _____  _____ Б.В. Шпонарский
(подпись)

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика
курс 3

Направленность (профиль) Математическое и информационное обеспечение
экономической деятельности

Научный руководитель
д-р хим. наук, проф. _____  _____ В.В. Никоненко
(подпись)

Нормоконтролер
преподаватель _____  _____ Е.В. Горбачева
(подпись)

Краснодар
2023

РЕФЕРАТ

Курсовая работа 25 с., 13 рис., 8 источн.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС, КАНАЛ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ, COMSOL MULTIPHYSICS, УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА.

Объектом исследования курсовой работы является гидродинамический процесс, протекающий в канале сложной структуры.

Целью работы является математическое моделирование гидродинамических процессов в каналах сложной структуры, содержащих спейсеры, в программной среде COMSOL Multiphysics.

В процессе работы проводилось моделирование каналов, содержащих спейсеры.

В курсовой работе были изучены понятия вихря, вязкой жидкости, канала со спейсерами, а также уравнения движения жидкости для моделирования гидродинамического процесса.

Методом исследования является математическое моделирование.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Математическое моделирование.....	6
1.1 Основные понятия и этапы.....	6
1.2 Классификация моделей.....	8
1.3 Моделирование гидродинамических процессов.....	11
1.3.1 Основы гидродинамики.....	11
1.3.2 Уравнения Навье-Стокса.....	13
1.4 Средства моделирования.....	14
2 Моделирование в среде COMSOL Multiphysics.....	16
2.1 Создание геометрии канала.....	16
2.2 Создание математической модели.....	18
2.3 Результаты моделирования.....	22
Заключение.....	24
Список использованных источников.....	25

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамические процессы играют важную роль в различных областях науки и техники, таких как инженерия, химия и физика [1,2]. Изучение и понимание этих процессов является неотъемлемой частью разработки таких систем, как каналы, реки и даже кровеносные сосуды. Однако при анализе гидродинамических процессов в каналах сложной структуры могут возникать трудности, связанные с неоднородностью границ канала и наличием препятствий, которые влияют на течение жидкости. Эти препятствия, способствующие формированию вихрей, называются спейсерами. Аналитическое решение таких задач часто оказывается сложным или невозможным.

В связи с этим, неотъемлемой частью для изучения гидродинамических процессов является математическое моделирование. К математическому моделированию прибегают в тех случаях, когда объект или явление таковы, что их натурное исследование невозможно, а реальное исследование дорого и трудоемко. В таком случае реальному объекту ставится в соответствие некоторый математический объект, который называется математической моделью. Математические модели позволяют описать физические явления, происходящие в системе, с помощью уравнений и алгоритмов, а также получить характеристики этого реального объекта. Эти модели позволяют прогнозировать и оптимизировать поведение системы в различных условиях. Во многих случаях с помощью методов математического моделирования можно получить значительно больше нужной информации о поведении системы, чем этого можно достичь в реальном эксперименте.

Одним из основных преимуществ математического моделирования гидродинамических процессов является возможность исследования физико-химических процессов, которые сопровождают поток жидкости. Например, моделирование гидродинамики в реках может помочь прогнозировать распространение загрязнений или оптимизировать условия для рыбоводства,

а изучение процессов мембранной электрохимии требует учета гидродинамических закономерностей.

Объектом исследования является гидродинамический процесс, протекающий в канале сложной структуры.

Целью работы является математическое моделирование гидродинамических процессов в каналах сложной структуры, содержащих спейсеры, в программной среде COMSOL Multiphysics.

Методом исследования является математическое моделирование.

1 Математическое моделирование

1.1 Основные понятия и этапы

Под моделью понимают материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе изучения явления замещает объект-оригинал, сохраняя его характерные для исследования особенности [3], а под математическим моделированием – процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта и исследование этой модели, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта [4]. При построении математической модели можно придерживаться следующих правил:

- создание модели начинается со словесного описания объекта или процесса. Кроме сведений общего характера о природе объекта и целях исследования можно также допустить некоторые предположения (например, в процессе исследования световых лучей предположить, что они распространяются прямолинейно),

- в процессе завершения идеализации объекта отбрасываются все факторы и эффекты, которые представляются не самыми существенными для его поведения (например, при радиоактивном распаде дефект масс можно не учитывать в случае его малости). По возможности идеализирующие предположения следует записывать в математической форме, чтобы их справедливость поддавалась количественному контролю,

- при выборе или формулировке закона, которому подчиняется объект, при необходимости используются дополнительные сведения об объекте, которые также записываются математически, как и сам закон. Также следует иметь в виду, что в случае даже простых, на первый взгляд, объектов выбор соответствующего закона может оказаться непростой задачей,

- для завершения формулировки модели необходимо задать сведения о начальном состоянии объекта (параметры в момент времени $t = 0$) или

другие характеристики (например, постоянные величины), без знания которых невозможно определить поведение объекта. Далее формулируется цель исследования модели (например, найти закон преломления света).

Построенная модель изучается всеми доступными методами, в том числе с проверкой различных подходов. При этом множество моделей не поддаются чисто теоретическому анализу, поэтому следует использовать вычислительные методы. Это, в первую очередь, важно при изучении нелинейных объектов, так как качественное поведение этих объектов заранее неизвестно. В результате исследования модели, помимо достижения цели должна быть установлена адекватность модели – соответствие объекту и сформулированным предположениям, так как неадекватная модель может дать результат, который сколь угодно отличается от истинного, и должна быть либо отброшена, либо модифицирована.

Математическое моделирование можно условно разбить на три этапа: модель – алгоритм – программа (смотреть рисунок 1) [5].

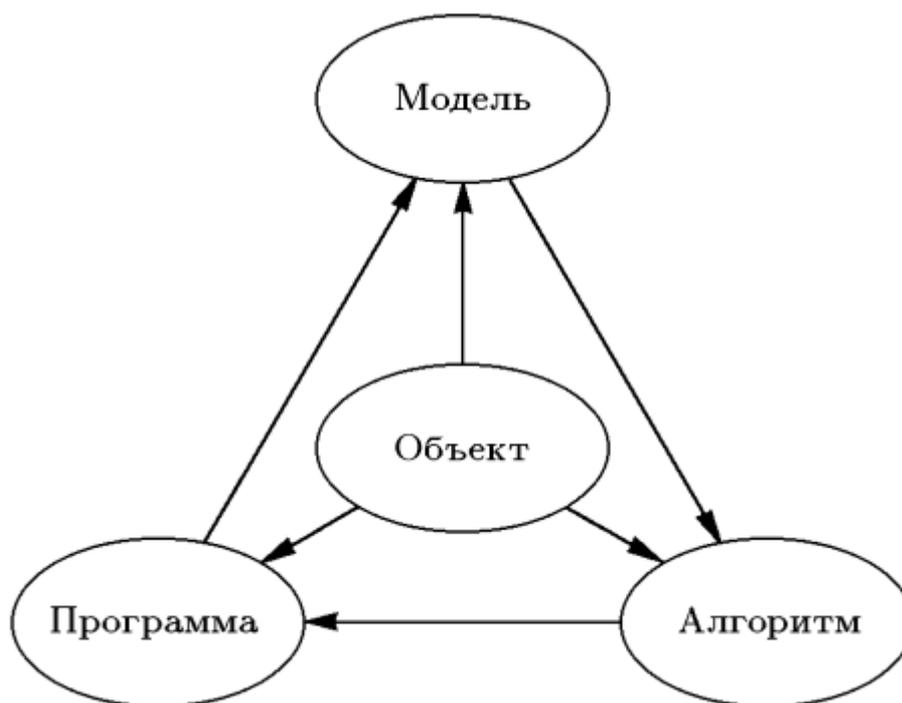


Рисунок 1 – Схема «модель – алгоритм – программа»

На первом этапе выбирается «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме его свойства – законы, которым он подчиняется, а также связи, которые присущи его составляющим, и т.д. Математическая модель исследуется теоретическими методами, что позволяет получить предварительные знания об объекте.

На втором этапе выбирается или разрабатывается алгоритм для реализации модели на компьютере. Модель при этом представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность логических и вычислительных операций, которые нужно произвести, чтобы искомые величины были найдены с заданной погрешностью. Кроме того, вычислительные алгоритмы должны не искажать основные свойства модели и исходного объекта, быть адаптирующимися к особенностям решаемых задач и используемых компьютеров.

На третьем этапе создаются программы, которые «переводят» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык. К ним также требуется адаптивность. Их можно назвать «электронным» эквивалентом изучаемого объекта, уже пригодным для испытания на «экспериментальной установке» – компьютере.

Создав триаду «модель – алгоритм – программа», исследователь получает универсальный инструмент, который сначала отлаживается, а потом тестируется в вычислительных экспериментах. После того как адекватность триады исходному объекту удовлетворена, над моделью проводятся подробные «опыты», которые дают все нужные качественные характеристики объекта. Процесс математического моделирования сопровождается улучшением и уточнением всех звеньев триады.

1.2 Классификация моделей

Важнейшими признаками моделей, по которым их можно классифицировать, являются следующие [6]:

- закон функционирования и характерные особенности выражения свойств и отношений оригинала,

- основания для преобразования свойств и отношений модели в свойства и отношения оригинала.

По первому признаку модели можно разделить на:

- логические,
- материальные.

Логические модели делятся на:

- образные,
- знаковые,
- образно-знаковые.

Материальные модели делятся на:

- функциональные,
- геометрические,
- функционально-геометрические.

Логические модели функционируют по законам логики, а материальные – по объективным законам природы.

Образные модели выражают свойства оригинала с помощью наглядных образов, которые имеют прообраз среди элементов оригинала или объектов материального мира.

Знаковые модели выражают свойства оригинала с помощью условных знаков и символов (формулы, уравнения).

Образно-знаковые модели обладают признаками образных и знаковых моделей (схемы, графы, графики).

Функциональные модели отражают только функциональные свойства оригинала.

Геометрические модели отражают только пространственные свойства оригинала.

Функционально-геометрические модели отражают и функциональные и пространственные свойства оригинала.

В зависимости от физической однородности с оригиналом функциональные и функционально-геометрические модели можно разделить на физические и формальные. По второму признаку различают:

- условные модели,
- аналогичные модели,
- математические модели.

Условные модели выражают свойства и отношения оригинала на основании принятого условия или соглашения. Сходство с оригиналом при этом может совершенно отсутствовать. К условным моделям относят все знаковые и образно-знаковые модели.

Аналогичные модели обладают сходством с оригиналом, достаточным для перехода к оригиналу на основании умозаключения по аналогии.

Математические модели обеспечивают переход к оригиналу, фиксацию и исследование его свойств с помощью математических методов. Эти модели делят на:

- расчетные,
- соответственные.

Расчетные модели выражают свойства оригинала с помощью математических представлений.

В соответственных моделях переменные величины связаны с соответствующими величинами оригинала определенными математическими зависимостями.

Математические модели имеют признаки условных моделей и могут обладать признаками аналогичных.

Важнейшей разновидностью соответственных моделей являются подобные модели, в которых переменные величины пропорциональны соответствующим переменным оригинала. Они могут быть как логическими, так и материальными.

Подобные материальные модели разделяются на:

- аналоговые (непрерывные),

- цифровые (дискретные),
- аналогово-цифровые.

Одним из признаков математических моделей является их определенность. По этому признаку модели делят на:

- детерминированные – модели, в которых имеет место взаимно-однозначное соответствие между переменными, характеризующими рассматриваемые объекты, процессы и явления,
- стохастические – модели, в которых связь между переменными носит случайный характер.

1.3 Моделирование гидродинамических процессов

1.3.1 Основы гидродинамики

Гидродинамика – раздел механики, в котором изучается движение и равновесие практически несжимаемых жидкостей, причем огромную роль играет движение вязкой жидкости, так как все действительные жидкости в той или иной мере являются вязкими, то есть обладают свойством внутреннего трения.

Жидкость называется вязкой, если поверхностные силы, приложенные к элементам поверхности любого объема жидкости, имеют кроме нормальных, еще и касательные составляющие.

Происхождение сил вязкости следует искать в молекулярной природе строения материи. Отдельные молекулы жидкости при своих собственных движениях переносят вместе с собой из одного места пространства в другое определенные количества материи, энергии, количества движения. Те величины, с которыми имеет дело гидродинамика, представляют собой средние величины, получающиеся в результате суммарного учета, относящегося к большому количеству молекул. При этом собственное движение молекул способствует выравниванию в соседних слоях значений

этих средних величин. В случае наличия вязкости имеем дело с процессом переноса молекулами своего собственного количества движения. Этот процесс приводит к выравниванию скоростей соседних слоев жидкости.

Силами вязкости нельзя пренебрегать вблизи твердых стенок даже в случае маловязких жидкостей, поскольку вблизи твердых стенок образуется тонкий пограничный слой, внутри которого необходимо учитывать влияние сил вязкости; вне этого слоя влиянием вязкости можно пренебречь. Теория пограничного слоя позволила разъяснить ряд вопросов, не поддающихся решению в рамках теории идеальной жидкости.

Жидкость называется несжимаемой, если ее плотность не меняется при изменении давления. Состояние движущейся несжимаемой жидкости полностью характеризуется заданием в каждой точке пространства в каждый момент времени значения четырех величин – трех компонент вектора скорости жидкости \mathbf{u} и давления p . Тогда в силу определения, из уравнения неразрывности скорость \mathbf{v} удовлетворяет формуле (1.1) [7]:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.1)$$

где

u_x, u_y, u_z – проекции \mathbf{u} на координатные оси x, y, z соответственно.

Движение вязкой жидкости может быть как безвихревым, так и вихревым. Вихрь – течение, при котором поток совершает вращение вокруг некоторой оси. Безвихревые движения в некоторых случаях не дают решений задач гидродинамики, поскольку не удовлетворяют пограничным условиям. Это означает, что завихренность движений вязкой жидкости обуславливается наличием граничных условий, то есть существованием прилипания жидкости к стенкам. Поэтому в движении вязкой жидкости следует, вообще говоря, ожидать наличия большой завихренности в областях вблизи стенок, в то время как в областях, далеких от стенок, движение может приближаться к потенциальному.

1.3.2 Уравнения Навье-Стокса

Движение вязкой жидкости моделируется уравнениями Навье-Стокса, которые для несжимаемой жидкости могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u_x, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta u_y, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z, \quad (1.4)$$

где

X, Y, Z – проекции вектора массовых сил \mathbf{F} на оси координат;

ρ – плотность жидкости;

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематический коэффициент вязкости, μ – коэффициент внутреннего трения или коэффициент вязкости.

Эти три уравнения можно переписать в векторной форме [8]:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathit{grad} p + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (1.5)$$

Система уравнений (1.2) – (1.4) дополняется следующим граничным условием: на всех твердых поверхностях, с которыми граничит движущаяся жидкость, выполняется условие:

$$\mathbf{u} = 0. \quad (1.6)$$

При этом на единицу поверхности твердого тела со стороны жидкости действует сила, равная потоку импульса, проходящему через эту поверхность.

Уравнения (1.2) – (1.4) имеют сложный вид, поэтому их точное интегрирование удастся только в редких случаях. Однако в ряде случаев получается хорошее совпадение результатов экспериментов с результатами вычислений, основанных на их использовании. Это показывает, что уравнения (1.2) – (1.4) с большой степенью точности описывают движения действительных жидкостей. Можно поэтому сказать, что построение теории движения вязких жидкостей сводится к всестороннему исследованию этих уравнений.

1.4 Средства моделирования

Для компьютерного моделирования в настоящее время распространены следующие продукты: Autodesk 3dsMax, AutoCAD, ANSYS Workbench, Advanced Simulation Library, COMSOL Multiphysics, Rhinoceros. В качестве средства моделирования был выбран COMSOL Multiphysics, так как он обладает широкими возможностями для мультифизического моделирования, а также на него имеется лицензия в ФГБОУ ВО «КубГУ».

COMSOL Multiphysics – это программное обеспечение, диалоговая среда, которая предназначена для моделирования широкого круга проблем, основанных на системах уравнений с частными производными, которая использует метод конечных элементов. COMSOL Multiphysics содержит набор модулей с пользовательскими интерфейсами для различных областей физики (электромагнетизма, гидродинамики, теплопереноса, акустики и др.), позволяет создавать приложения с пользовательским интерфейсом, которые позволяют избежать подробностей расчета модели с точки зрения конечного пользователя. Представленный пакет дает возможность решить задачу как в математической постановке в виде системы уравнений, так и в физической, путем выбора физической модели. Так или иначе решается система уравнений, и различие состоит лишь в возможности использовать физические системы единиц и физическую терминологию. В физическом

режиме работы можно использовать заранее определенные уравнения для большинства явлений, имеющих место в науке и технике, таких как перенос тепла, теория упругости, распространение волн и т.д.

COMSOL Multiphysics содержит различные решатели, которые помогают быстро справляться со сложными задачами, а довольно простая структура приложения обеспечивает гибкость использования. Сильной стороной программы является ее возможность одновременно учитывать различные виды физических взаимодействий.

COMSOL Multiphysics содержит следующие основные группы физических интерфейсов:

- AC/DC – интерфейсы в области электромагнетизма,
- Acoustics – интерфейсы акустики,
- Electrochemistry – физические интерфейсы для электрохимии и моделирования электрохимических компонентов,
- Chemical Species Transport – перенос химических соединений (например, диффузия),
- Heat Transfer – интерфейсы теплопереноса в твердых жидкостях и телах,
- Optics – оптика,
- Plasma – интерфейсы моделирования физики плазмы,
- Radio Frequency – интерфейсы моделирования высокочастотного электромагнитного поля.

Для моделирования гидродинамики предназначен физический интерфейс Fluid Flow, который охватывает широкий диапазон потоков, например уравнения переноса импульса для ламинарного и турбулентного потоков, ньютоновских и неньютоновских потоков, многофазных потоков и потоков в пористых средах. Интерфейс ламинарного потока, который будет использоваться, содержит уравнения, граничные условия и объемные силы для моделирования жидкостей с помощью уравнений Навье-Стокса, решаемых для поля скорости и давления.

2 Моделирование в среде COMSOL Multiphysics

2.1 Создание геометрии канала

Гидродинамический процесс будем рассматривать в прямоугольном канале, вдоль одной из границ которого располагается система каверн, а вдоль другой треугольные спейсеры. Для создания геометрии канала с помощью инструмента *Rectangle* нарисуем прямоугольник со следующими размерами: $H = 7$ мм, $L = 20$ мм. Далее добавляем два прямоугольника, два треугольника и квадрат, и с помощью инструментов *Union* и *Difference* получаем цельную область, расположенную на рисунке 2. Параметры для соответствующих фигур расположены на рисунках 3,4,5,6.

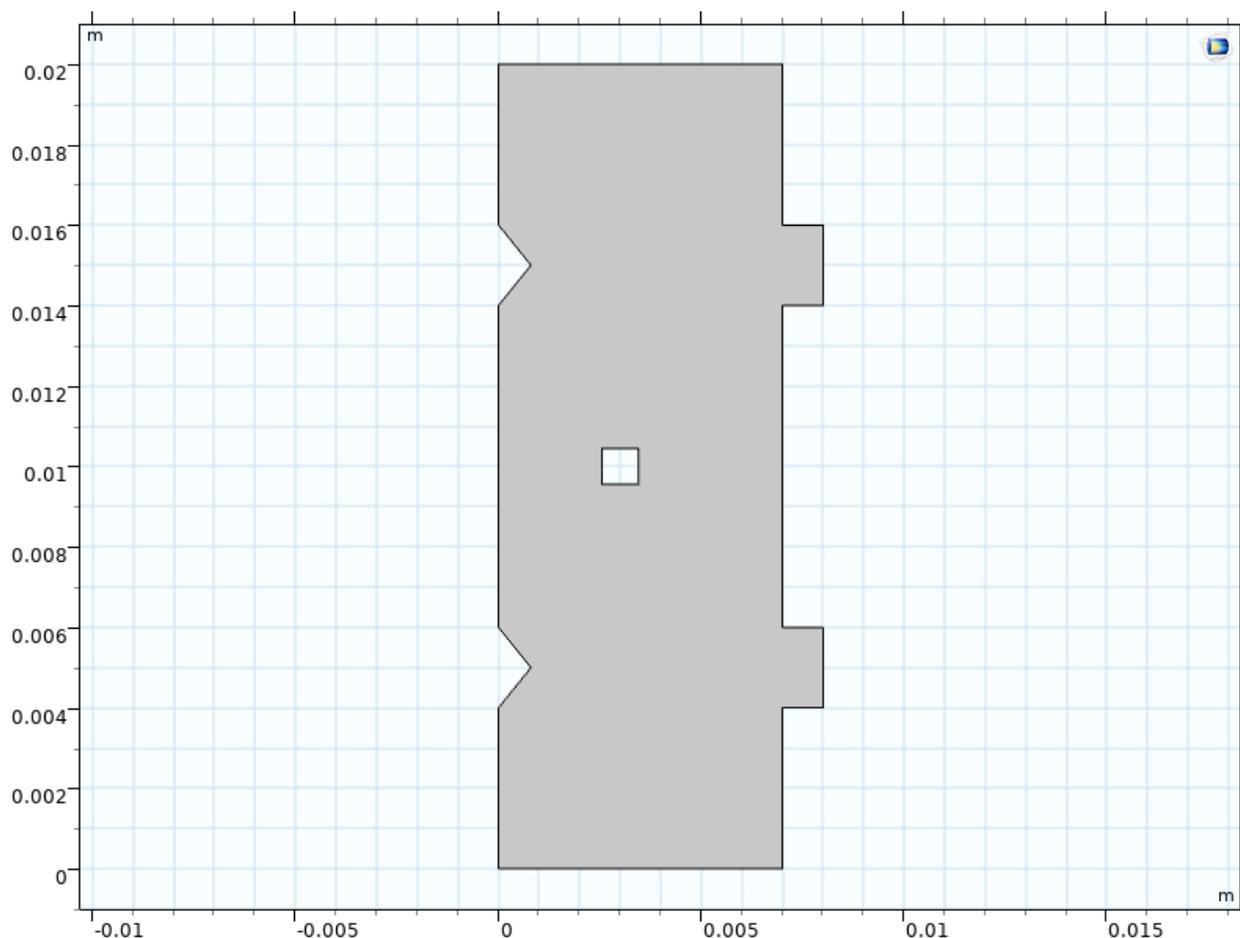


Рисунок 2 – Геометрия канала

Label: 

▼ Object Type

Type:

▼ Size and Shape

Width: m

Height: m

▼ Position

Base:

x: m

y: m

▼ Rotation Angle

Rotation: deg

Рисунок 3 – Параметры для прямоугольного канала

Label: 

▼ Object Type

Type:

▼ Size and Shape

Width: m

Height: m

▼ Position

Base:

x: m

y: m

▼ Rotation Angle

Rotation: deg

Рисунок 4 – Параметры для одного прямоугольника

Label:

▼ Object Type

Type:

▼ Coordinates

Data source:

x (m)	y (m)
0	0.016
0	0.014
0.0008	0.015

Рисунок 5 – Параметры для одного треугольника

Label:

▼ Object Type

Type:

▼ Size

Side length: m

▼ Position

Base:

x: m

y: m

▼ Rotation Angle

Rotation: deg

Рисунок 6 – Параметры для квадрата

2.2 Создание математической модели

Разрешим уравнения Навье-Стокса для канала, описание которого представлено в пункте 3.1, с условием прилипания на границе канала, со следующими входными параметрами:

- Ширина канала $H = 7$ мм,

- Длина канала $L = 20$ мм,
- Начальная скорость $V_0 = 100$ мм/с,
- Начальная температура $T_0 = 293.15$ К,
- Плотность $\rho = 1002$ кг/м³,
- Кинематическая вязкость $\nu = 1.006 \cdot 10^{-6}$.

Установим параметры в установленной области: указываем, что жидкость является несжимаемой, а параметры жидкости зададим с помощью узла Fluid Properties (рисунок 7) и начальные условия – Initial Values (рисунок 8).

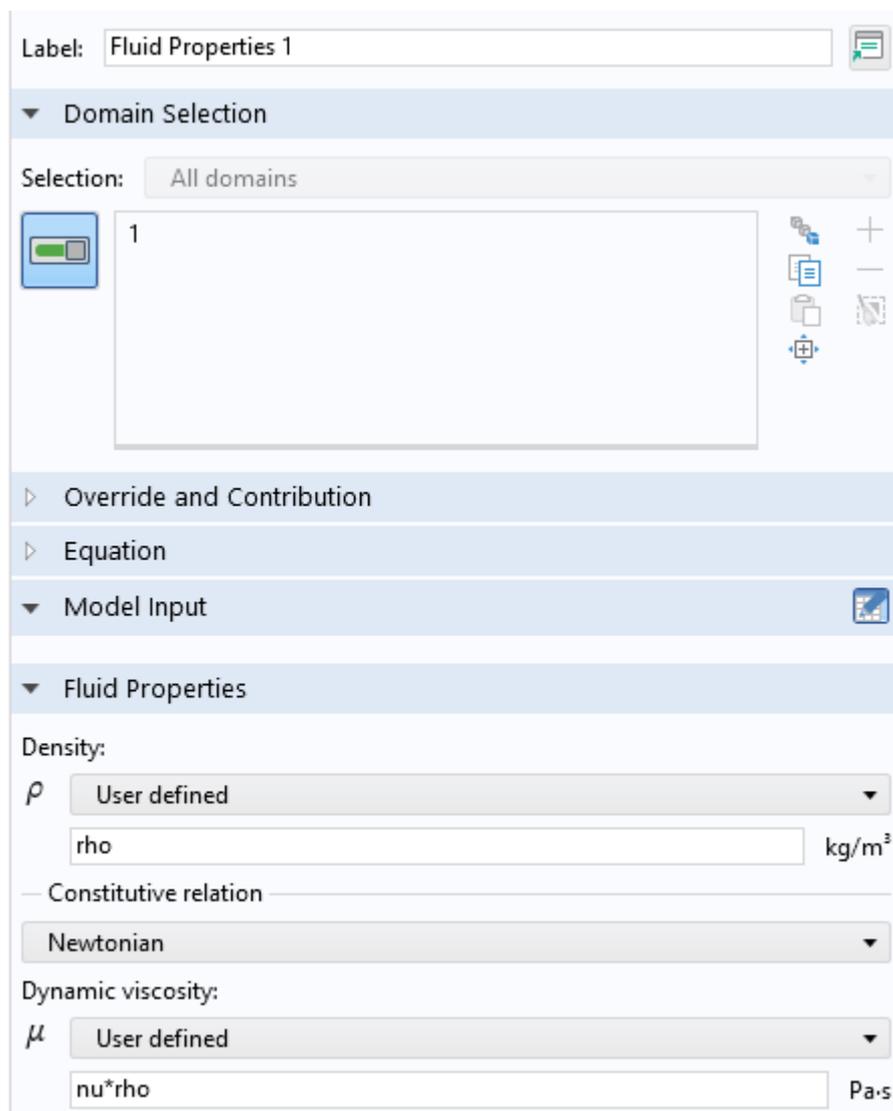


Рисунок 7 – Установка параметров жидкости

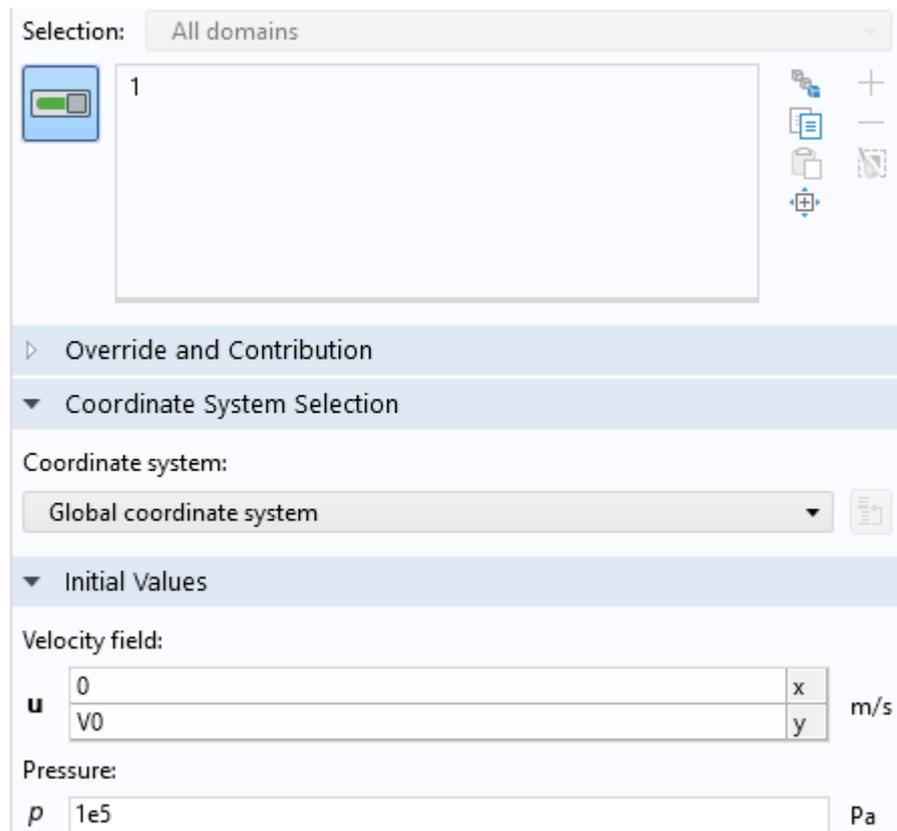


Рисунок 8 – Установка начальных условий

Для установки граничных условий примем условие прилипания вдоль всех границ, исключая выход и вход. Граничные условия для входа и выхода представлены на рисунках 9,10.

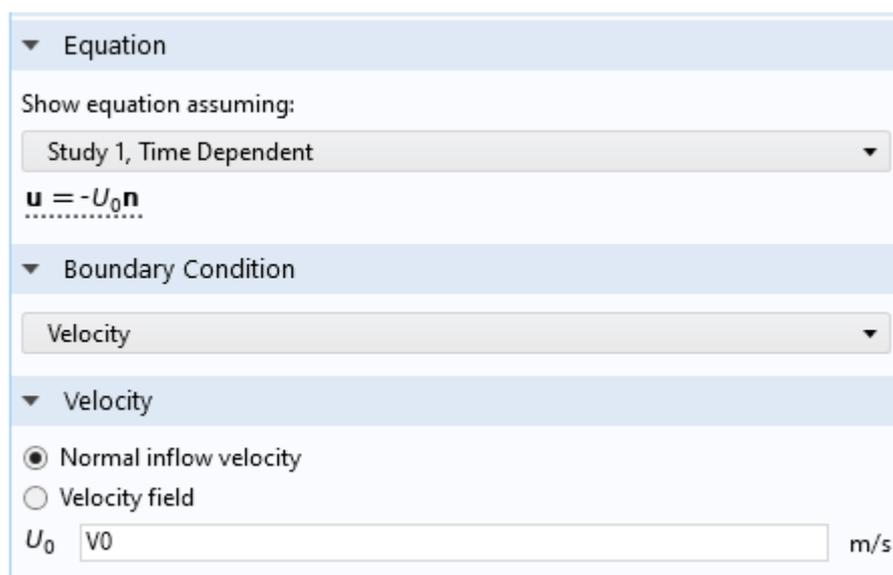


Рисунок 9 – Установка граничного условия для входа

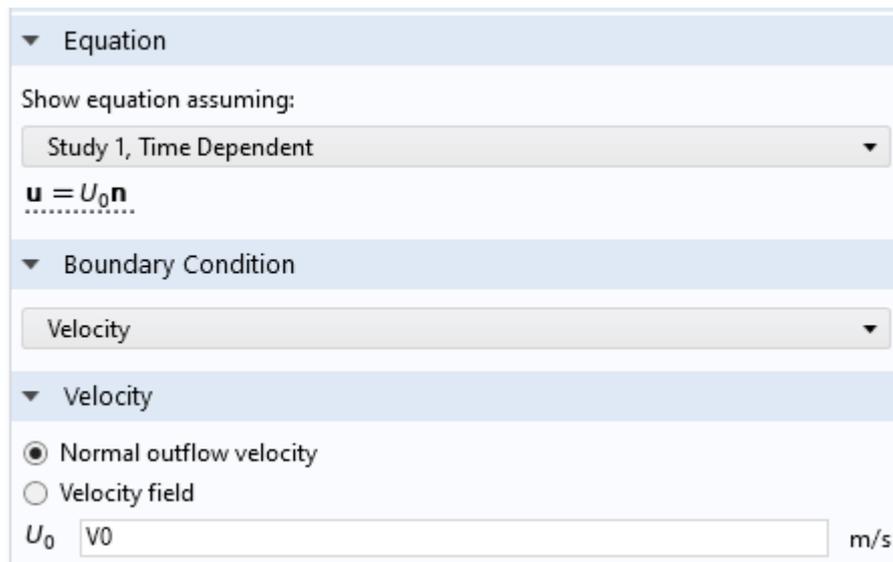


Рисунок 10 – Установка граничного условия для выхода

Для дискретизации области была построена сетка, изображенная на рисунке 11.

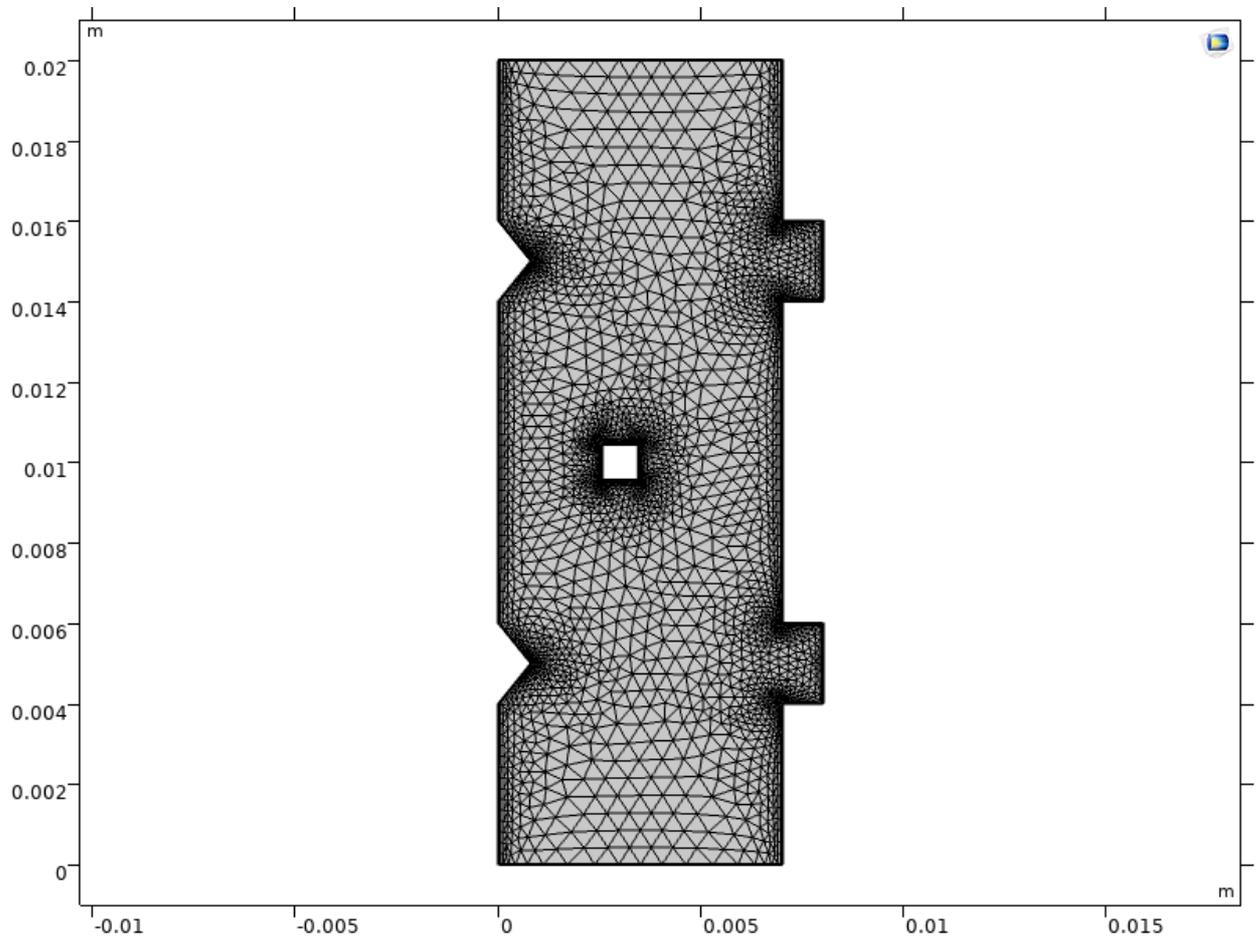


Рисунок 11 – Сетка

2.3 Результаты моделирования

В результате моделирования были построены графики скорости и давления (рисунки 12,13), для визуализации течения использовались линии тока. Наличие спейсеров привело к искривлению линий течения и образования вихрей за ними.

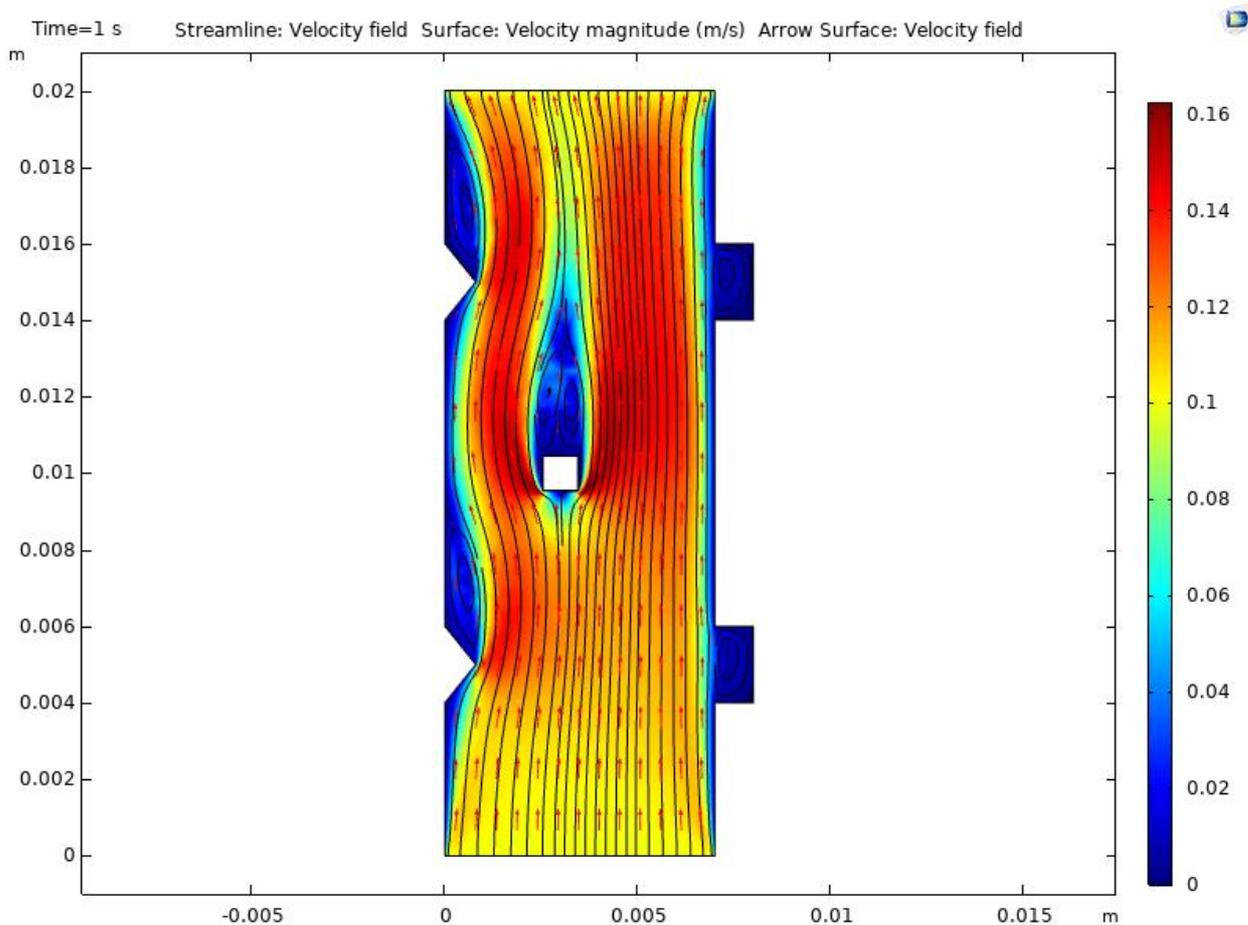


Рисунок 12 – Линии тока жидкости

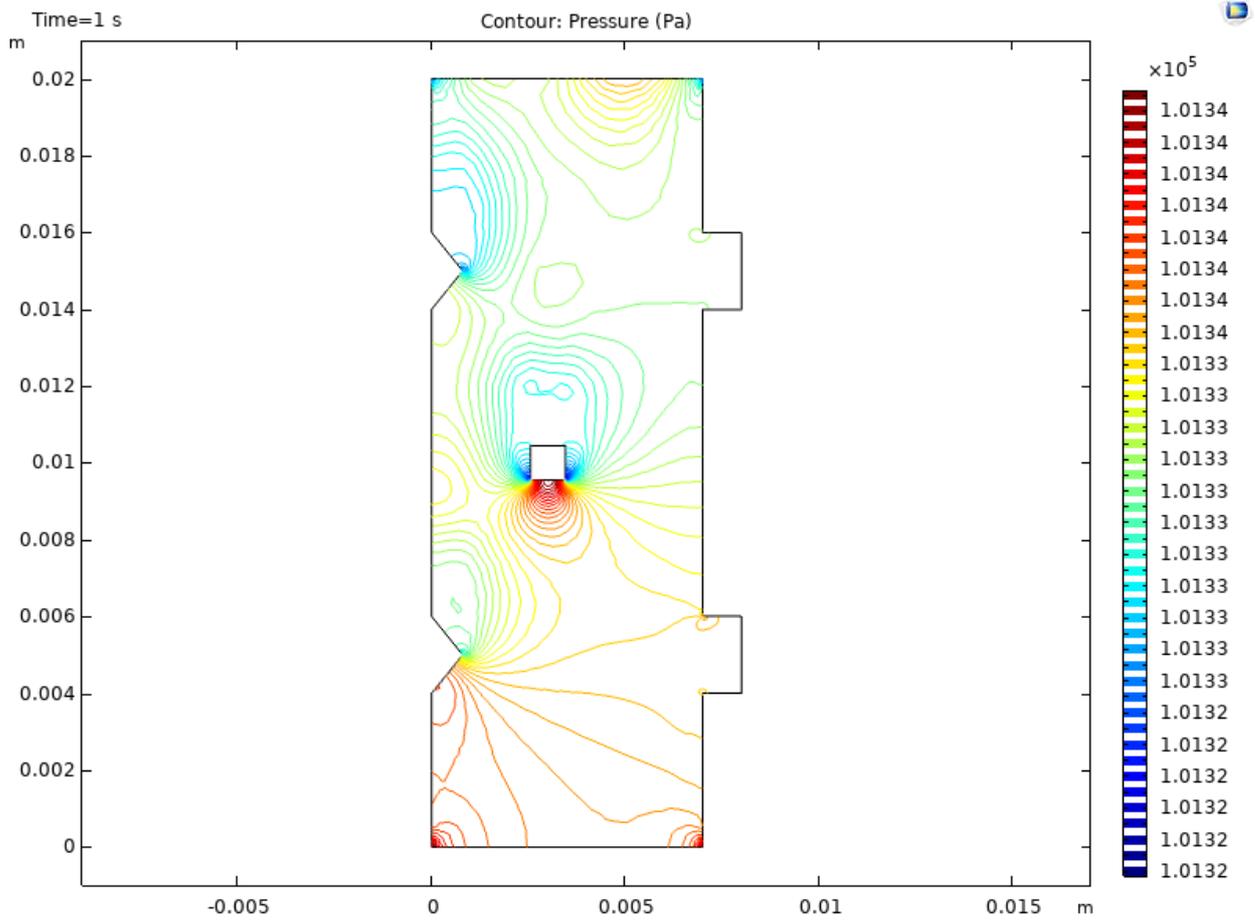


Рисунок 13 – Линии контура для давления

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате данной курсовой работы было проведено исследование гидродинамических процессов в канале сложной структуры, содержащем спейсеры, в среде COMSOL Multiphysics. Для достижения поставленной цели использовалось математическое моделирование. В процессе работы проводилось моделирование каналов, содержащих спейсеры.

В работе были изучены понятия вихря, вязкой жидкости, канала со спейсерами, а также уравнения движения жидкости для моделирования гидродинамических процессов (уравнения Навье-Стокса). Также были изучены основные понятия математического моделирования, разобрано, на какие этапы оно подразделяется, описана классификация моделей. В ходе работы исследовано влияние спейсеров на формирование вихрей, а также влияние наличия вязкости на граничные условия. Дальнейшие исследования в исследуемой области могут включать учет дополнительных факторов, таких как теплообмен и массоперенос, для более полного понимания гидродинамических процессов в каналах сложной структуры.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях: Монография / И. В. Кудинов [и др.]; под ред. Э. М. Карташова. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 208 с. – ISBN 978-5-8114-1837-4.
2. Бубнов, В. А. Гидродинамика: Механика частицы жидкости / В. А. Бубнов. – М.: Ленанд, 2018. – 304 с. – ISBN 978-5-9710-4497-0.
3. Советов, Б. Я. Моделирование систем: Учеб. для вузов / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 2001. – 343 с. – ISBN 5-06-003860-2.
4. Математическое моделирование физико-химических процессов в среде COMSOL Multiphysics 5.2: учебное пособие для вузов / А. В. Коваленко, А. М. Узденова, М. Х. Уртенев, В. В. Никоненко. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 228 с. – ISBN 978-5-507-46002-1.
5. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с. – ISBN 5-9221-0120-X.
6. Горлач, Б. А. Математическое моделирование. Построение моделей и численная реализация: учебное пособие для вузов / Б. А. Горлач, В. Г. Шахов. – 5-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2023. – 292 с. – ISBN 978-5-507-46275-9.
7. Павловский, В. А. Вычислительная гидродинамика. Теоретические основы: Учебное пособие / В. А. Павловский, Д. В. Никущенко. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 368 с. – ISBN 978-5-8114-2924-0.
8. Левич, В. Г. Физико-химическая гидродинамика / В. Г. Левич. – 3-е изд., испр. и доп. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. – 708 с. – ISBN 978-5-4344-0386-3.