МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**(ФГБОУ ВО «КубГУ»)**
**Факультет компьютерных технологий и прикладной математики**
**Кафедра прикладной математики**

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

# МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ SH-ВОЛН В МНОГОСЛОЙНЫХ УПРУГИХ МАТЕРИАЛАХ С ТОНКИМИ ПРОСЛОЙКАМИ

Работу выполнил ______________________ О.Т. Кан

Направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность Математическое моделирование в естествознаниях и технологиях

Научный руководитель
канд. физ-мат. наук, доц. ______________________ А.А. Еремин

Нормоконтролер
преподаватель ______________________ Е.В. Горбачева

Краснодар
2024

## РЕФЕРАТ

Курсовая работа 22 с., 8 рис., 10 источн.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, МНОГОСЛОЙНЫЙ ВОЛНОВОД, SH-ВОЛНЫ, АНТИПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ, FORTRAN, MATLAB

Объектом исследований являются установившиеся антиплоские колебания многослойного упругого волновода с мягкой прослойкой, лежащего на жёстком недеформируемом основании.

Целью работы является изучение и компьютерная реализация математических моделей, описывающих данные волновые процессы.

В качестве метода исследований используется полуаналитический интегральный подход, а для описания колебаний мягкой прослойки применяется как модель тонкого упругого слоя, так и модель эффективных граничных условий пружинного типа.

На основе разработанных компьютерных моделей проведён параметрический анализ влияния толщины и жёсткости мягкой прослойки, а также коэффициента жёсткости пружины на дисперсионные характеристики рассматриваемого многослойного волновода.

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Исследование распространения волн в многослойных упругих волноводах с мягкой прослойкой имеет важное значение для решения задач сейсмологии [1] и инженерной геофизики [2]. В условиях природных и техногенных сейсмических воздействий многослойные структуры, включающие мягкие прослойки, играют ключевую роль в процессах распространения и диссипации упругих волн. Понимание механизмов антиплоских колебаний в таких системах позволяет более точно прогнозировать поведение грунтовых и инженерных конструкций при сейсмических нагрузках, а также разрабатывать методы защиты сооружений от разрушительных последствий землетрясений.

Актуальность исследования обусловлена потребностью в более точных математических моделях задач сейсмологии. Традиционные подходы зачастую оказываются недостаточными для адекватного описания влияния геометрических и механических параметров на дисперсионные свойства системы. Разработка и компьютерная реализация математических моделей на основе полуаналитических методов позволяет преодолеть эти ограничения и получить более детальные данные о поведении волн в таких структурах.

Целью исследования является изучение и компьютерная реализация математических моделей, описывающих антиплоские колебания многослойного волновода с мягкой прослойкой, а также анализ влияния ключевых параметров на дисперсионные свойства системы.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

– решена задача об установившихся гармонических колебаний многослойного волновода с поверхностной нагрузкой, лежащего на недеформируемом основании, при помощи преобразования Фурье и численных методов;

– разработана и компьютерно реализована математическая модель, описывающая антиплоские колебания трёхслойного волновода с мягкой прослойкой;

– проведён параметрический анализ влияния толщины и жёсткости мягкой прослойки на дисперсионные характеристики трёхслойного волновода;

– исследовано влияние коэффициента жёсткости пружины на дисперсионные характеристики двухслойного волновода при использовании модели граничных условий пружинного типа.

# 1 Многослойный волновод

## 1.1 Постановка задачи

Рассматривается задача об установившихся антиплоских колебаниях $M$-слойного упругого волновода, занимающего область $W = \{(x, z) \mid x \in \mathbb{R}, -H \leq z < 0\}$. К верхней границе волновода приложена поверхностная нагрузка $q(x)$:

$$q(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases},$$

где $a \in (0; +\infty)$ – const.

Нижняя граница волновода находится в контакте с жёстким недеформируемым основанием, поэтому смещения на этой границе можно считать нулевыми, кроме того, предполагается, что слои идеально контактируют друг с другом. На рисунке 1 схематично представлена постановка задачи:

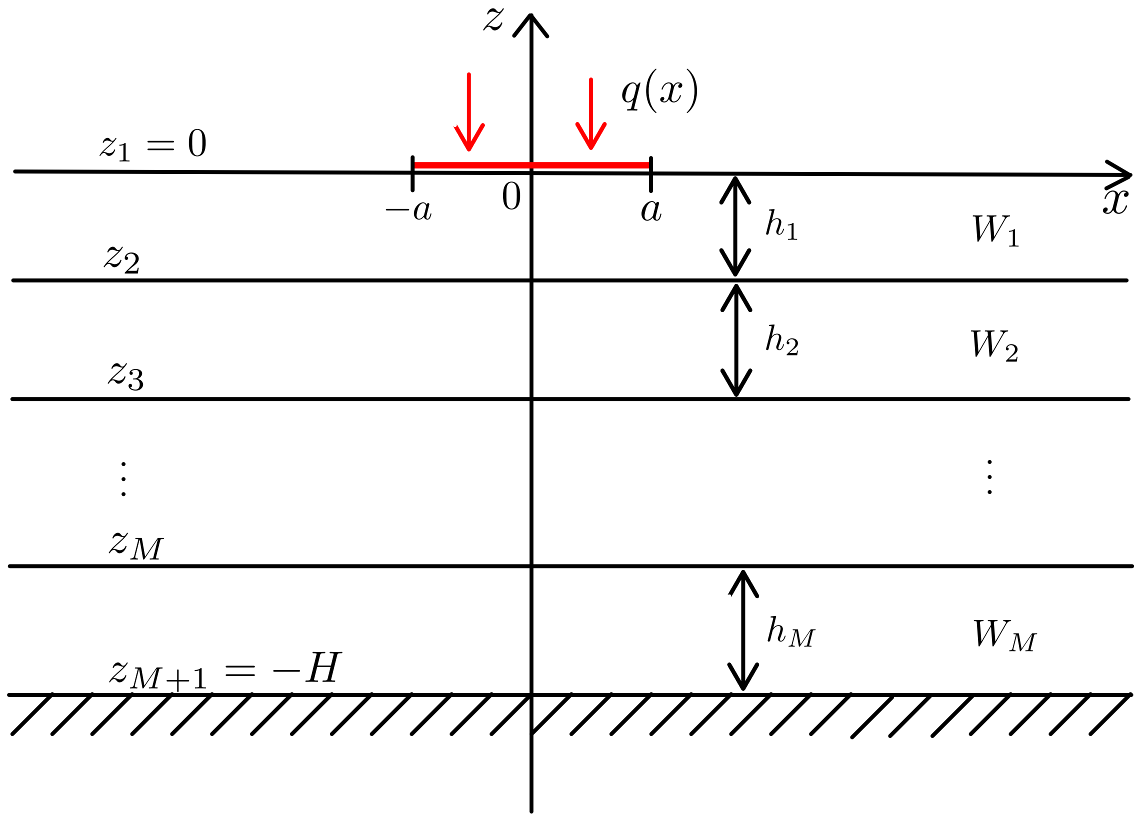


Рисунок 1 – Схематичное представление задачи

Данный волновой процесс описывается системой однородных уравнений Гельмгольца:

$$\forall m = \overline{1, M}: \quad \Delta u_m(x,z) + \kappa_m^2 u_m(x,z) = 0, \ (x,z) \in W_m \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_1}{\partial z}\Big|_{z=z_1} = q(x), \\ u_M\Big|_{z=z_{M+1}} = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

$m = \overline{1, M-1}:$

$$\begin{gathered} u_m\Big|_{z=z_{m+1}} = u_{m+1}\Big|_{z=z_{m+1}}, \\ \frac{\partial u_m}{\partial z}\Big|_{z=z_{m+1}} = \frac{\partial u_{m+1}}{\partial z}\Big|_{z=z_{m+1}}, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$W_m = \{(x,z) \mid x \in \mathbb{R}, \ z_{m+1} \le z < z_m\}$ – слой волновода с номером $m$,

$u_m(x,z)$ – комплексная амплитуда смещений в $W_m$,

$\kappa_m = \omega_m / c_m$ – волновое число волны в $W_m$,

$\omega_m$ – безразмерная круговая частота волны в $W_m$,

$c_m$ – фазовая скорость волны в $W_m$,

$h_m = z_m - z_{m+1}$ – толщина слоя $W_m$ при $m = \overline{1, M}$,

причём $W = \bigcup\limits_{m=1}^{M} W_m$ и $H = \sum\limits_{m=1}^{M} h_m$.

Наряду с граничными условиями идеального контакта соседних слоёв (3) рассматриваются граничные условия пружинного типа, которые записываются следующим образом:

$m = \overline{1, M-1}:$

$$\begin{gathered} (u_m - u_{m+1})\Big|_{z=z_{m+1}} = \varkappa_m \frac{\partial u_m}{\partial z}\Big|_{z=z_{m+1}}, \\ \frac{\partial u_m}{\partial z}\Big|_{z=z_{m+1}} = \frac{\partial u_{m+1}}{\partial z}\Big|_{z=z_{m+1}}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\varkappa_m$ – жёсткость пружины между слоями $W_m$ и $W_{m+1}$.

Комплексную амплитуду смещений во всём волноводе можно представить в виде:

$$u(x,z) = \begin{cases} u_1(x,z), & (x,z) \in W_1 \\ u_2(x,z), & (x,z) \in W_2 \\ \vdots \\ u_M(x,z), & (x,z) \in W_M \end{cases}.$$

## 1.2 Схема решения

Геометрия задачи позволяет применить преобразование Фурье по пространственной переменной $x$ к уравнениям системы (1) и к граничным условиям (2), (3), что приводит к системе обыкновенных дифференциальнных уравнений относительно $z$:

$$\forall m = \overline{1, M}: \quad \frac{\partial^2 U_m(\alpha, z)}{\partial z^2} + \sigma_m^2 U_m(\alpha, z) = 0$$

с граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial z}\right|_{z=z_1} = Q(\alpha),$$

$$U_M\big|_{z=z_{M+1}} = 0,$$

$m = \overline{1, M-1}$ :

$$U_m\big|_{z=z_{m+1}} = U_{m+1}\big|_{z=z_{m+1}},$$

$$\left.\frac{\partial U_m}{\partial z}\right|_{z=z_{m+1}} = \left.\frac{\partial U_{m+1}}{\partial z}\right|_{z=z_{m+1}},$$

где

$U_m(\alpha, z) = \mathcal{F}[u_m(x,z)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_m(x,z) e^{i\alpha x}\, dx$ – прямое преобразование Фурье функции $u_m(x,z)$ по переменной $x$,

$Q(\alpha) = \mathcal{F}[q(x)] = \dfrac{2\sin(a\alpha)}{\alpha},$
$\sigma_m^2 = \alpha^2 - \kappa_m^2.$

Из [3] известно, что решение задачи (1–3) можно представить в виде:

$$u_m(x,z) = k_m(x,z) * q(x), \tag{5}$$

где $*$ – операция свёртки функции по переменной $x$:

$$(k_m(x,z) * q(x))(x,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k_m(x-\xi, z) q(\xi)\, d\xi.$$

Соотношение (5) отражает тот факт, что возмущения, вызванные источником, выражаются в виде свёртки функции Грина $k_m(x)$, описывающей реакцию среды на элементарное сосредоточенное воздействие, и функции $q(x)$, задающей плотность распределения рассматриваемого воздействия.

Воспользовавшись свойством прямого пребразования Фурье от свёртки функций [4]:

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g],$$

можно получить:

$$\forall m = \overline{1, M}: \quad U_m(\alpha, z) = K_m(\alpha, z) Q(\alpha),$$

где $K_m(\alpha, z) = \mathcal{F}[k_m(x,z)]$ — Фурье-символы функции Грина, которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\forall m = \overline{1, M}: \quad \frac{\partial^2 K_m(\alpha, z)}{\partial z^2} + \sigma_m^2 K_m(\alpha, z) = 0 \tag{6}$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial K_1}{\partial z}\Big|_{z=z_1} = 1, \\ &K_M\Big|_{z=z_{M+1}} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$\forall m = \overline{1, M-1}:$

$$\begin{gathered} K_m\Big|_{z=z_{m+1}} = K_{m+1}\Big|_{z=z_{m+1}}, \\ \frac{\partial K_m}{\partial z}\Big|_{z=z_{m+1}} = \frac{\partial K_{m+1}}{\partial z}\Big|_{z=z_{m+1}}. \end{gathered} \tag{8}$$

Общее решение каждого уравнения системы (6) можно представить в виде:

$$\forall m = \overline{1, M}: \quad K_m(\alpha, z) = C_{m1} e^{\sigma_m (z - z_m)} + C_{m2} e^{-\sigma_m (z - z_{m+1})},$$

после подстановки которых в граничные условия (7), (8), получается следующая СЛАУ относительно $2M$ неизвестных:

$$\begin{cases} C_{11}\sigma_1 e^{\sigma_1(z_1 - z_1)} - C_{12}\sigma_1 e^{-\sigma_1(z_1 - z_2)} = 1 \\ C_{m1} e^{\sigma_m(z_{m+1} - z_m)} + C_{m2} e^{-\sigma_m(z_{m+1} - z_{m+1})} = \\ \qquad = C_{m+1,1} e^{\sigma_{m+1}(z_{m+1} - z_{m+1})} + C_{m+1,2} e^{-\sigma_{m+1}(z_{m+1} - z_{m+2})} \\ C_{m1}\sigma_m e^{\sigma_{m1}(z_{m+1} - z_m)} - C_{m2}\sigma_m e^{-\sigma_m(z_{m+1} - z_{m+1})} = \\ \qquad = C_{m+1,1}\sigma_{m+1} e^{\sigma_{m+1}(z_{m+1} - z_{m+1})} - C_{m+1,2}\sigma_{m+1} e^{-\sigma_{m+1}(z_{m+1} - z_{m+2})} \\ C_{M1} e^{\sigma_M(z_{M+1} - z_M)} + C_{M2} e^{-\sigma_M(z_{M+1} - z_{M+1})} = 0 \end{cases}, \tag{9}$$

при $m = \overline{1, M-1}$.

Умножая в системе (9) второе уравнение на $\sigma_m$ и прибавляя к третьему, можно получить:

$$\begin{cases} \sigma_1 C_{11} - \sigma_1 e^{-\sigma_1 h_1} C_{12} = 1 \\ e^{-\sigma_m h_m} C_{m1} + C_{m2} - C_{m+1,1} - e^{-\sigma_{m+1} h_{m+1}} C_{m+1,2} = 0 \\ 2\sigma_m e^{-\sigma_m h_m} C_{m1} - \left(\sigma_{m+1} + \sigma_m\right) C_{m+1,1} + \\ \qquad + \left(\sigma_{m+1} - \sigma_m\right) e^{-\sigma_{m+1} h_{m+1}} C_{m+1,2} = 0 \\ e^{-\sigma_M h_M} C_{M1} + C_{M2} = 0 \end{cases}, \tag{10}$$

при $m = \overline{1, M-1}$.

После этого численно находятся вещественные нули определителя матрицы системы (10), которые являются простыми полюсами функций $K_m(\alpha, z)$ и число которых конечно, а также находится решение системы (10).

Применяя обратное преобразование Фурье, можно получить решение задачи (1–3) в виде:

$$\forall m = \overline{1, M} : u_m(x, z) = \mathcal{F}^{-1}[U_m(\alpha, z)] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} K_m(\alpha, z) Q(\alpha) e^{-i\alpha x}\, d\alpha, \quad (11)$$

где контур интегрирования Г выбирается согласно принципу излучения Зоммерфельда [5], то есть так, чтобы в решении остались только составляющие, описывающие уходящие от источника на бесконечность волны.

Схематично обход полюсов изображён на рисунке 2:

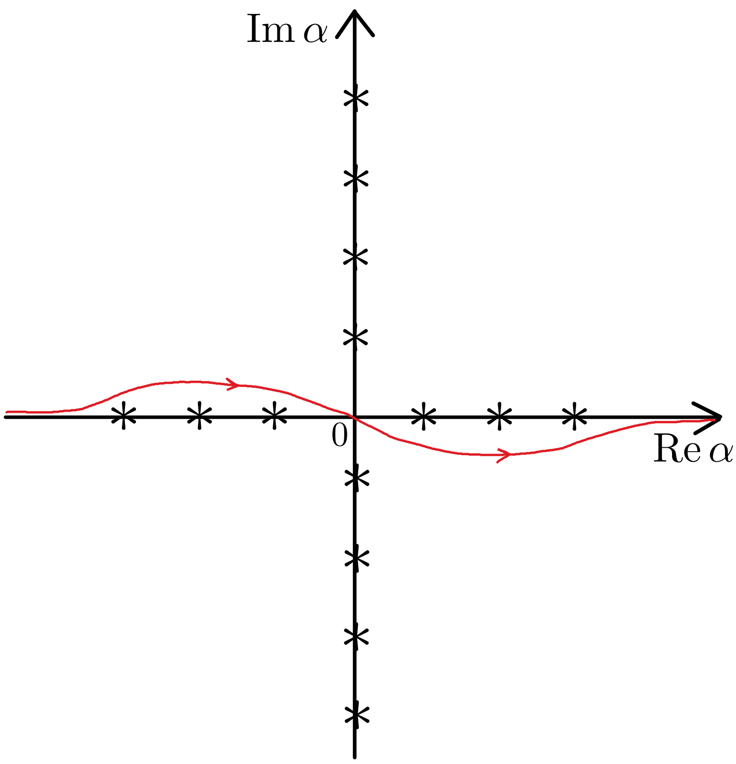


Рисунок 2 – Схематичное изображение контура интегрирования Г, где $*$ – полюса

Причём, пользуясь чётностью функций $K_m(\alpha, z)$ и $Q(\alpha)$ по переменной $\alpha$, интеграл (11) можно преобразовать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_m(\alpha,z)Q(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} K_m(\alpha,z)Q(\alpha)e^{-i\alpha x}\ \,d\alpha\ + \right.\\
&\left. + \int\limits_{0}^{+\infty} K_m(\alpha,z)Q(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha\right) = \left|\begin{array}{c} \alpha\to-\alpha \\ d\alpha\to-d\alpha \end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(-\int\limits_{+\infty}^{0} K_m(-\alpha,z)Q(-\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha + \int\limits_{0}^{+\infty} K_m(\alpha,z)Q(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{+\infty} K_m(\alpha,z)Q(\alpha)e^{i\alpha x}\,d\alpha + \int\limits_{0}^{+\infty} K_m(\alpha,z)Q(\alpha)e^{-i\alpha x}\,d\alpha\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} K_m(\alpha,z)Q(\alpha)\left(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}\right)\,d\alpha = \left|\ \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ \right| =
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} K_m(\alpha,z)Q(\alpha)\cos(\alpha x)\ d\alpha. \tag{12}
$$

## 2 Компьютерная реализация

Программная реализация была разработана на языке программирования Fortran. Для решения системы (10) и вычисления определителя её матрицы использовался модифицированный метод ортогонализации Грама-Шмидта [6], для нахождения полюсов был использован метод дихотомии (половинного деления) [7], а для вычисления интеграла (12) применялась формула Симпсона [8]. Для визуализации численных результатов применялся пакет прикладных программ MATLAB [9].

### 2.1 Структура программы

Программа включает в себя 8 основных компонентов:

1) Основная программа OnlyDinn: инициализация переменных, вызов основных процедур, запись результатов в текстовые файлы;

2) Модуль GLOBAL: объявление глобальных переменных и следующих функций:

а) Функция create_matrix_A: заполняет и возвращает квадратную комплексную матрицу соответствующей системы в зависимости от переданного на вход размера матрицы,

б) Функция get_det_A: возвращает для заполненной матрицы функцией create_matrix_A его определитель вызовом процедуры DSTAR при определённом значении входного параметра $\alpha$;

3) Процедура FUNC: вычисляет подынтегральную функцию при всех переданных массивом значениях $x$, вызывая процедуру K_alpha_z;

4) Процедура K_alpha_z: вызывая функцию create_matrix и процедуру STAR5, находит коэффициенты Фурье-символа функции Грина и возвращает её значение при переданном аргументе $z$;

5) Процедура DSTAR: модифицированным методом ортогонализации Грама-Шмидта находит определитель переданной на вход комплексной матрицы;

6) Процедура STAR5: модифицированным методом ортогонализации Грама-Шмидта находит решение СЛАУ с переданными на вход матрицей системы и матрицей из столбцов правых частей;

7) Процедура Halfc: методом дихотомии находит все вещественные нули переданной комплексно-значной функции на заданном отрезке с указанной точностью;

8) Процедура Dinn5: по формуле Симпсона находит интеграл от переданной комплексно-значной функции по полубесконечному контуру с возможностью отклонения вверх и вниз от вещественной оси на заданных отрезках на указанное расстояние.

## 3 Параметрический анализ

### 3.1 Трёхслойный волновод с мягкой прослойкой

Для частного случая при $M = 3$ был проведён параметрический анализ влияния толщины и жёсткости второго слоя, играющего роль мягкой прослойки, на дисперсионные характеристики рассматриваемого трёхслойного волновода, а так же были построены поверхности $|u(x,z)|$. Параметры для первого и третьего слоёв были выбраны следующим образом:

$$h_1 = 1,\ c_1 = 1,\ h_3 = 3,\ c_3 = 2. \tag{13}$$

Дисперсионные кривые при разных параметрах мягкой прослойки изображены на рисунках 3 и 4:

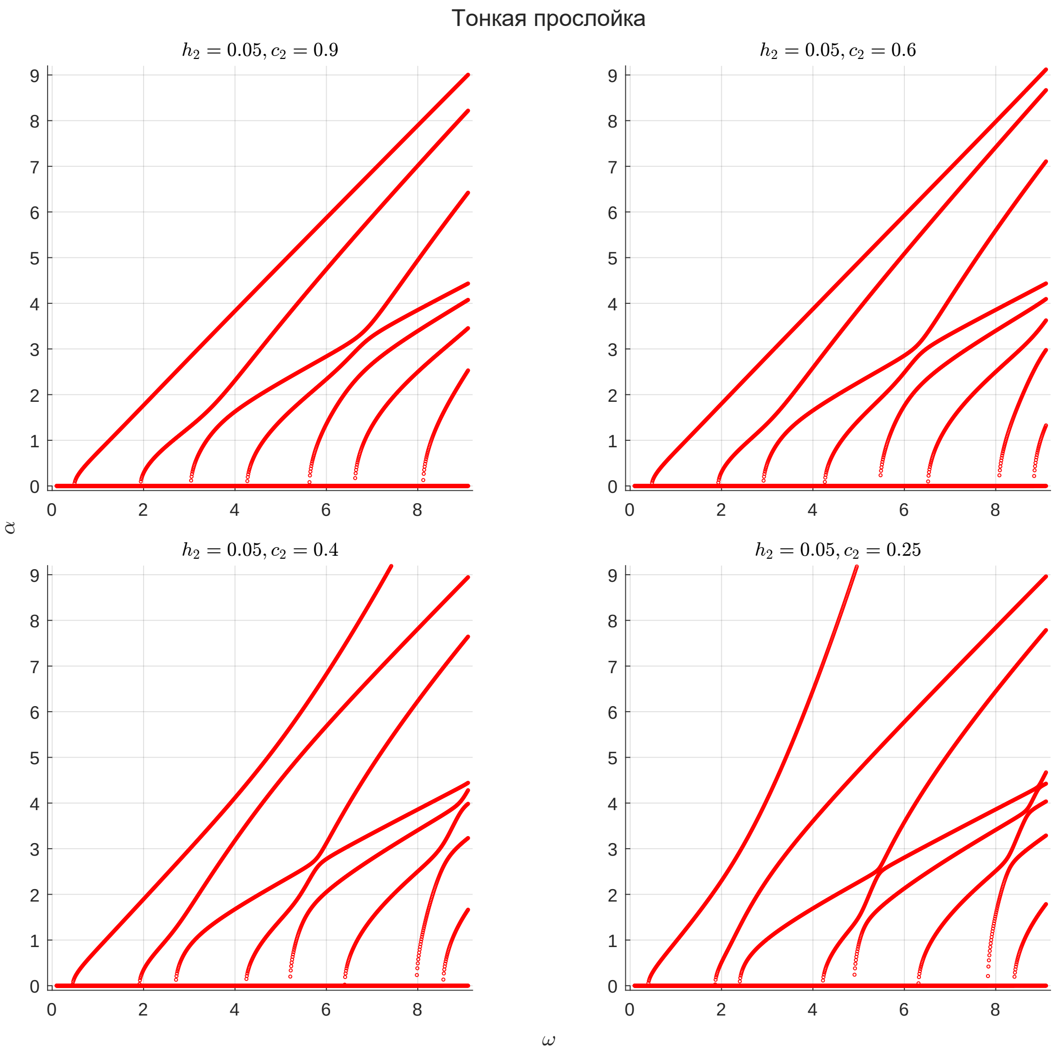


Рисунок 3 – Дисперсионные кривые

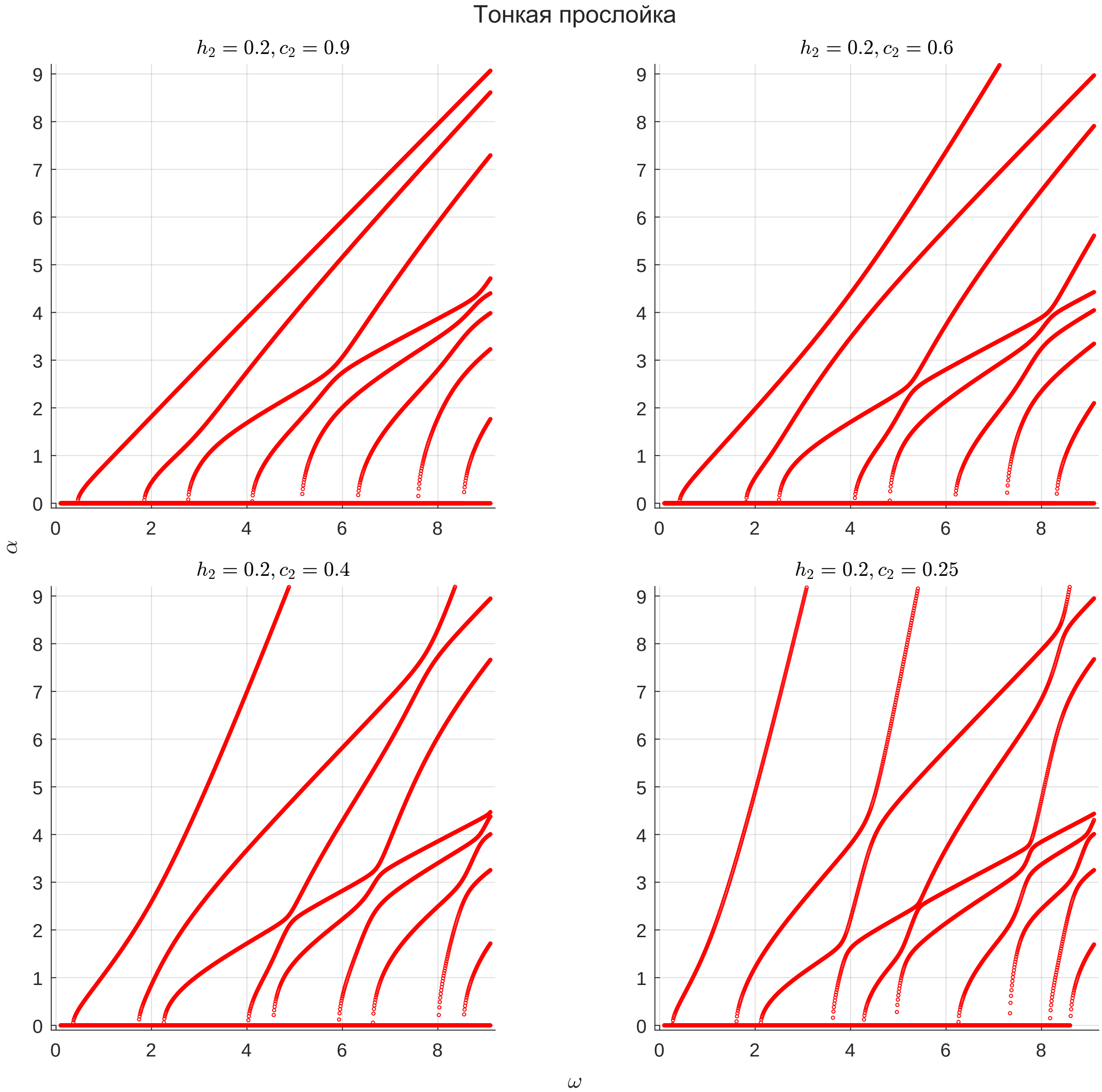


Рисунок 4 – Дисперсионные кривые

График поверхности $|u(x,z)|$ при $a = 3, h_2 = 0.05, c_2 = 0.9, \omega = 5$ приведён на рисунке 5:

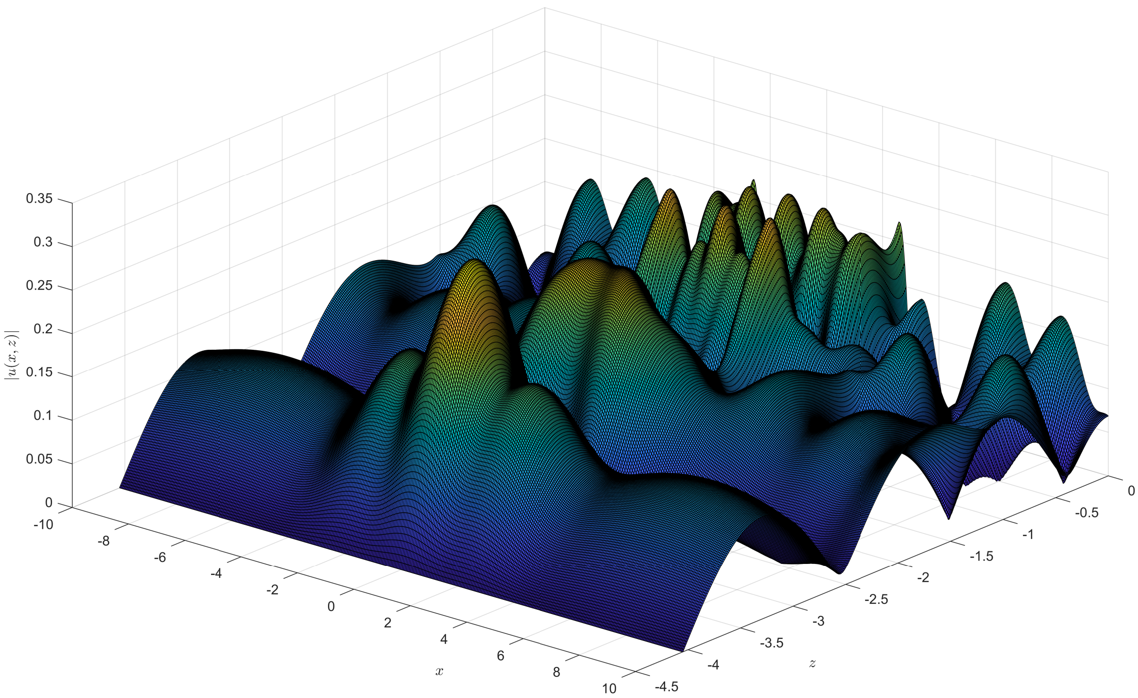


Рисунок 5 – Поверхность $|u(x,z)|$

### 3.2 Двухслойный волновод с граничным условием пружинного типа

В статье [10] предложили заменять тонкую прослойку граничным условием пружинного типа на границе между первым и третьим слоями, то есть рассматривать вместо предыдущей задачи о трёхслойном волноводе с мягкой прослойкой задачу (1), (2), (4) при $M = 2$. На рисунке 6 схематично представлена постановка задачи:

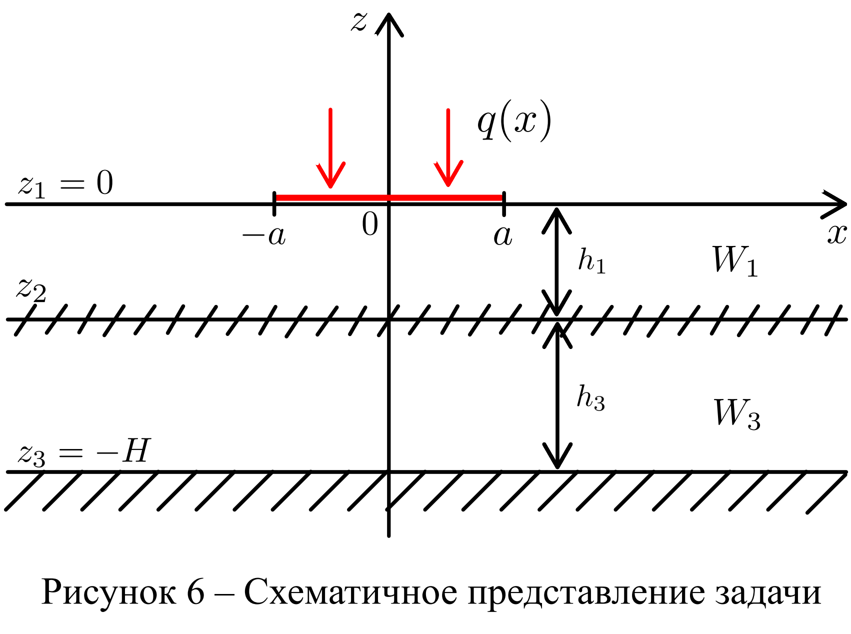


Рисунок 6 – Схематичное представление задачи

Схема решения аналогичная, в результате получится следующая система:

$$\begin{cases} \sigma_1 C_{11} - \sigma_1 e^{-\sigma_1 h_1} C_{12} = 1 \\ \sigma_1 e^{-\sigma_1 h_1} C_{11} - \sigma_1 C_{12} - \sigma_3 C_{31} + \sigma_3 e^{-\sigma_3 h_3} C_{32} = 0 \\ (1 - \varkappa \sigma_1)\, e^{-\sigma_1 h_1} C_{11} + (1 + \varkappa \sigma_1)\, C_{12} - C_{31} - e^{-\sigma_3 h_3} C_{32} = 0 \\ e^{-\sigma_3 h_3} C_{31} + C_{32} = 0 \end{cases}$$

При тех же параметрах первого и третьего слоёв (13) был проведён параметрический анализ влияния жёсткости пружины $\varkappa$ на дисперсионные характеристики рассматриваемого двухслойного волновода, а так же были построены поверхности $|u(x,z)|$. Дисперсионные кривые при разных $\varkappa$ изображены на рисунке 7:

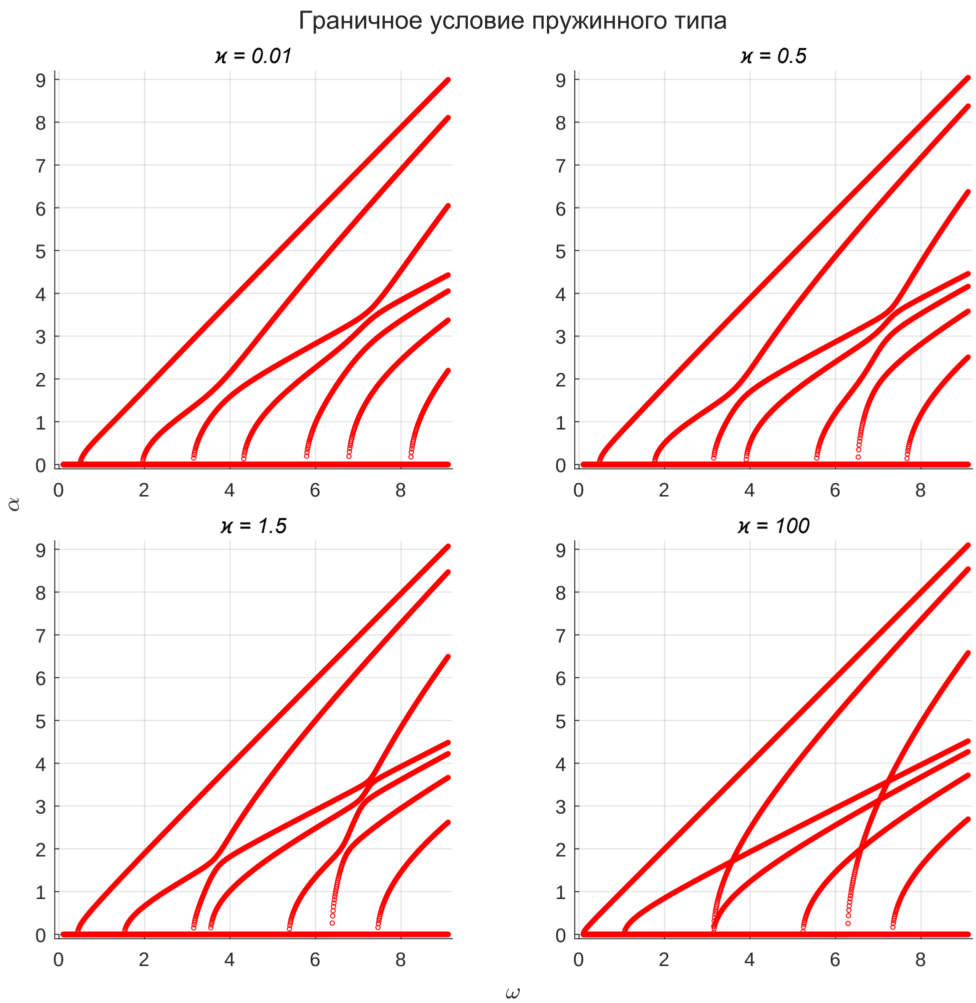


Рисунок 7 – Дисперсионные кривые

По рисункам 3 и 7 можно заметить, что дисперсионные кривые при $h_2 = 0.05, c_2 = 0.9$ и при $\varkappa = 0.5$ отличаются незначительно.

График поверхности $|u(x, z)|$ при $a = 3, \varkappa = 0.5, \omega = 5$ приведён на рисунке 8:

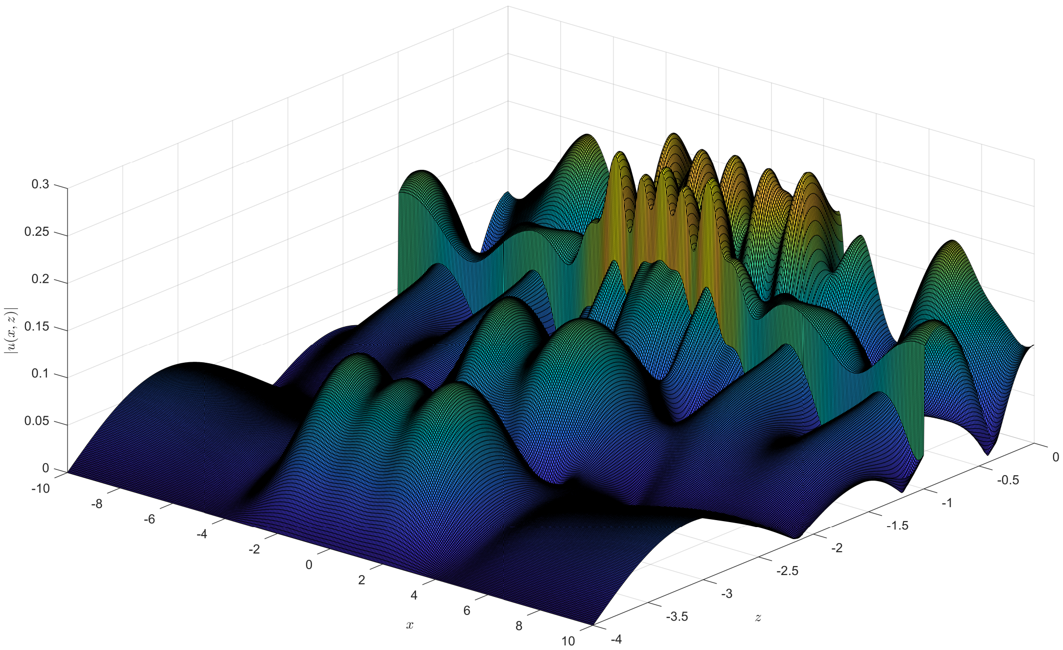


Рисунок 8 – Поверхность $|u(x, z)|$

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе разработана компьютерная модель, которая позволяет описывать установившиеся гармонические антиплоские колебания многослойного упругого волновода, покоящегося на недеформируемом основании. Реализована возможность учёта как идеального контакта между слоями, так и граничных условий пружинного типа.

Для случая трёхслойного волновода исследовано влияние жёсткости и толщины мягкой прослойки на дисперсионные характеристики, для случая двухслойного волновода с граничным условием пружинного типа проанализировано влияние жёсткости пружины на дисперсионные кривые. Построены поверхности модулей комплексных амплитуд смещений.

Также было получено, что при определённых значениях жёсткости пружины $\varkappa$ качественно вид дисперсионных кривых соответствует случаю трёхслойного волновода с мягкой прослойкой, что можно использовать для оптимизации, уменьшая количество хранимых данных и количества уравнений в системе.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Ратникова, Л. И. Методы расчета сейсмических волн в тонкослоистых средах / Л. И. Ратникова. — Москва : Наука, 1973. — 121 с. — (УДК 550.344.62.001.24:550.347).

2. Магницкий, В. А. Общая геофизика / В. А. Магницкий. — Москва : Московский государственный университет, 1995. — 317 с. — ISBN 5-211-03083-4.

3. Глушков, Е. В. Интегральные преобразования и волновые процессы : Монография / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова. — Краснодар : Кубанский государственный университет, 2017. — 201 с. — ISBN 978-5-8209-1392-1.

4. Глушков, Е. В. Интегральные преобразования в задачах теории упругости : Учебное пособие / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова. — Краснодар : Кубанский государственный университет, 1990. — 72 с. — ISBN 5-230-07696-8.

5. Тихонов, А. Н. О принципе излучения / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1948. — Т. 18, № 2. — URL: http://samarskii.ru/articles/1948/1948_003ocr.pdf ; (дата обращения: 18.11.2024).

6. Воронцов, К. В. Модифицированная ортогонализация Грама-Шмидта / К. В. Воронцов. — 2010. — URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%9C%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D1%84%D0%B8%D1%86%D0%B8%D1%80%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BE%D1%80%D1%82%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%B7%D0%B0%D1%86%D0%B8%D1%8F_%D0%93%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B0-%D0%A8%D0%BC%D0%B8%D0%B4%D1%82%D0%B0&oldid=11818 ; (дата обращения: 30.10.2024).

7. Вержбицкий, В. М. Численные методы (линейная алгебра и нелинейные уравнения) : Учебное издание / В. М. Вержбицкий. — Москва : Высшая школа, 2000. — 266 с. — ISBN 5-06-003654-5.

8. Самарский, А. А. Численные методы : Учебное пособие / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — Москва : Наука, 1989. — 432 с. — ISBN 5-02-013996-3.

9. Margrave, G. F. Numerical Methods of Exploration Seismology: With Algorithms in MATLAB / G. F. Margrave, M. P. Lamoureux. — Cambridge : Cambridge University Press, 2019. — ISBN 978-1-1071-7014-8. — URL: https://www.mathworks.com/academia/books/numerical-methods-of-exploration-seismology-margrave.html.

10. Koodalil, D. Quantifying adhesive thickness and adhesion parameters using higher-order SH guided waves / D. Koodalil, P. Rajagopal, K. Balasubramaniam // Ultrasonics. — 2021. — Т. 114. — DOI: 10.1016/j.ultras.2021.106429. — URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0041624X21000688 ; (дата обращения: 20.11.2024).