МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕСРИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «КубГУ»)

Кафедра математического моделирования

КУРСОВАЯ РАБОТА

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В СИСТЕМЕ СРЕД: УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО – СЛОЙ ЖИДКОСТИ

Работу выполнила ____О.А. Бушуева

Факультет компьютерных технологий и прикладной математики 3 курс

Направление 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель,
канд. физ.- мат. наук, доц. ________________________________ С.Е. Рубцов

Нормоконтролер,
канд. физ.- мат. наук, доц. ________________________________ С.Е. Рубцов

Краснодар 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3
1 Постановка задачи 4
2 Решение задачи для слоя жидкости 7
3 Решение задачи для упругого полупространства 10
4 Стыковка решений 16
5 Построим обратное преобразование Фурье 17
6 Численный расчет 19
Заключение 21
Список использованных источников 22
Приложение А Теоретические сведения 23
Приложение Б Листинг программы 28

ВВЕДЕНИЕ

Курсовая работа посвящена решению задачи механики сплошной среды, связанной с изучением процессов распространения упругих волн в средах сплошной структуры.

Механика сплошных сред возникла из-за процессов практической деятельности человека, именно из разрешения, например, таких простейших вопросов, как закономерности истечения жидкостей и газов из сосудов, растяжения брусков, находящихся под нагрузкой, и т. д.

Стечением времени перед механикой сплошных сред возникали более сложные вопросы. Например, полета на аппаратах тяжелее воздуха, эксплуатации нефтяных месторождений и др.

Теоретическое решение тех или иных вопросов механики сплошных сред имеет большое практическое значение, ибо позволяет целесообразно проектировать механические конструкции (например, наземные сооружения, самолеты и т. д.) и заранее планировать эксплуатационные характеристики каких-либо объектов (например, прочность тех или иных сооружений и т. д.).

В этой работе рассматривается задача о колебаниях жидкого слоя под действием гармонического точечного источника.

Методом решения поставленной задачи является метод интегральных преобразований Фурье, который позволяет уменьшить размер задачи и, в конечном счете, определить амплитудно–частотные характеристики волнового поля.

1Постановка задачи

Рассматривается задача об установившихся колебаниях среды, состоящей из упругого полупространства и слоя идеальной жидкости. Колебания в упругой системе возбуждаются гармоническим точечным источником с координатами $\left(x_0;z_0\right)$, который расположен в слое идеальной жидкости (рисунок 1).

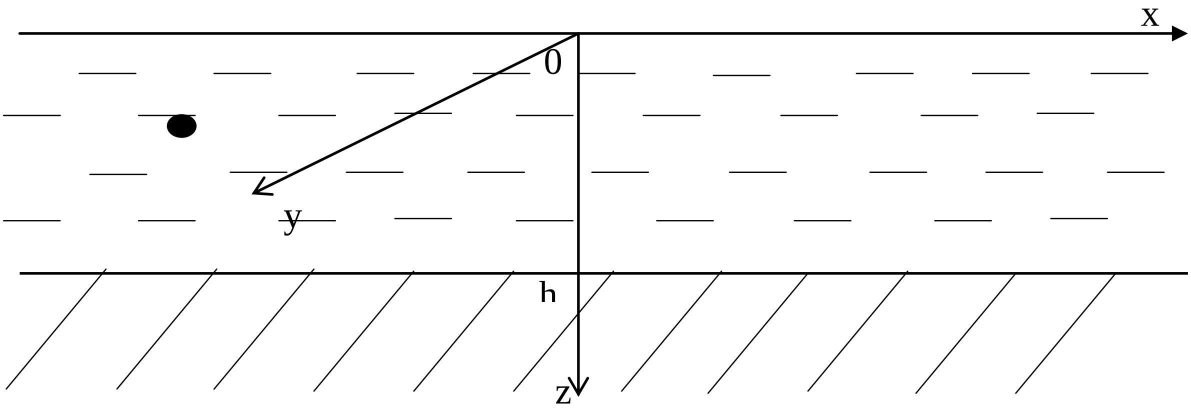

Рисунок 1 – Жидкое полупространство без покрытия

Колебание системы сред предполагается установившимся, т.е. зависимость всех неизвестных функций от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$.

Движение точек жидкости описываются потенциалом скоростей $\square S\left(x,y,z,t\right)=\varphi\left(x,z,t\right)e^{-i\omega t}$, который удовлетворяет волновому уравнению:

$$\square S\left(x,y,z,t\right)=\frac{1}{c^2}S_{tt}^{"}\left(x,y,z,t\right)+f\left(x,y,z,t\right), \qquad (1.1)$$

где c– скорость звука в жидкости, а функция $f\left(x,y,z,t\right)$ моделирует источник колебаний, который считается точечным и гармоническим, то есть

$$f\left(x,y,z,t\right)=A\delta\left(x-x_0;y-y_0;z-z_0\right)e^{-i\omega t}, \qquad (1.2)$$

где A – амплитуда колебаний.

Верхняя граница жидкости свободна:

$$\rho_0 \left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{z=0} = 0. \tag{1.3}$$

А на нижней границе жидкость подвержена воздействию со стороны упругого полупространства:

$$\rho_0 \left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{z=h} = q(x,y)e^{-i\omega t}, \tag{1.4}$$

где $q(x,y)$– неизвестное давление на границе раздела сред, а ρ_0 – плотность жидкости.

Движение точек упругого полупространства описывается вектором перемещений $\bar{r}(x,y,z,t)=(u,v,w)^T$,который удовлетворяет уравнению Ляме:

$$(\lambda+\mu)grad\left(div\bar{r}\right)+\mu\Delta\bar{r}-\rho_1\frac{\partial^2\bar{r}}{\partial t^2}=0.$$

Тензор напряжений упругого слоя удовлетворяет следующим условиям на нижней границе:

$$\begin{cases} \left.\tau_{zy}\right|_{z=h} = 0, \\ \left.\tau_{xz}\right|_{z=h} = 0, \\ \left.\sigma_z\right|_{z=h} = q(x,y)e^{-i\omega t}, \end{cases}$$

где τ_{zy}, τ_{xz} – касательная напряжения, а σ_z – нормальное напряжение:

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$\sigma_z = \lambda div\left(\bar{r}\right)+2\mu\frac{\partial w}{\partial y},$$

где λ, μ – упругие характеристики полупространства, а ρ_1– плотность полупространства.

Для упругого полупространства при

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty, \bar{r} \to 0$$

выполняется условие излучения типа Зоммерфельда.

Взаимодействие сред определяется равенством вертикальных составляющих скоростей точек жидкости и упругих сред в зоне контакта:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial s}{\partial z} \right)\Bigg|_{z=h} = 0.$$

Задача решается в плоской постановке, т.е. все неизвестные и заданные функции не зависят от координаты *y*.

2 Решение задачи для слоя жидкости

В плоской постановке с учетом установившегося режима колебаний, краевая задача (1.1) – (1.4) для жидкости может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x,z) = -\dfrac{\omega^2}{c^2}\varphi(x,z) + f(x,z,t), \\ \begin{cases} \varphi(x,z)\big|_{z=0} = 0, \\ \varphi(x,z)\big|_{z=h} = \dfrac{-i}{\omega\rho_0} q(x). \end{cases} \end{cases} \tag{2.1}$$

Применим к обеим частям неоднородного дифференциального уравнения экспоненциальное преобразование Фурье (свойства преобразований Фурье приведены в приложении) по переменнойx:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\dfrac{\omega^2}{c^2}\varphi(x,z) + f(x,z,t), \\ \begin{cases} \varphi(x,z)\big|_{z=0} = 0, \\ \varphi(x,z)\big|_{z=h} = \dfrac{-i}{\omega\rho_0} q(x), \end{cases} \end{cases}$$

$$-\alpha^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\Phi + f(x,z,t), \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} \Phi\big|_{z=0} = 0, \\ \Phi\big|_{z=h} = \dfrac{-i}{\omega\rho_0} Q(x). \end{cases} \tag{2.3}$$

Найдем решение соответствующего однородного дифференциального уравнения (2.2):

$$-\alpha^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\Phi, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Phi\left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right),$$

$$k^2 = \left(\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right),$$

$$k = \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}},$$

$$\Phi = C_1 e^{z\sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}} + C_2 e^{-z\sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}. \tag{2.5}$$

Сделаем для простоты замену

$$k = \pm \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}},$$
$$\pm k = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \tag{2.6}$$

и преобразуем (2.5):

$$\Phi = C_1 e^{zk} + C_2 e^{-zk}. \tag{2.7}$$

Найдем решение неоднородного дифференциального уравнения (2.2) методом вариации произвольных постоянных:

$$\begin{cases} C_1' e^{zk} + C_2' e^{-zk} = 0, \\ kC_1' e^{zk} - kC_2' e^{-zk} = f. \end{cases}$$

$$C_2' = -\frac{fe^{zk}}{2k}, C_1' = \frac{f}{2ke^{zk}},$$

$$C_2' = -\frac{1}{2k}\int fe^{zk}\partial z = -\frac{1}{2k^2} fe^{zk} + \frac{1}{2k^2}\int f e^{zk} dz = -\frac{1}{2k^2} fe^{zk} + \frac{1}{2k^2} e^{iz_0 k} + C_{3,}$$

$$C_1' = -\frac{1}{2k}\int fe^{-zk}\partial z = \frac{1}{2k^2} fe^{-zk} - \frac{1}{2k^2}\int f e^{-zk} dz = \frac{1}{2k^2} fe^{-zk} - \frac{1}{2k^2} e^{-iz_0 k} + C_4.$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.2):

$$\Phi = \left(\frac{1}{2k^2} fe^{-zk} - \frac{1}{2k^2} e^{-iz_0 k} + C_4 \right) e^{zk} + \left(-\frac{1}{2k^2} fe^{zk} + \frac{1}{2k^2} e^{iz_0 k} + C_3 \right) e^{-zk},$$

$$\varPhi = -\frac{1}{2k^2} e^{k(z-iz_0)} + C_4 e^{zk} + \frac{1}{2k^2} e^{-k(z-iz_0)} + C_3 e^{-zk}.$$

Решим краевую задачу (2.2) – (2.3):

$$\begin{cases} -\frac{1}{2k^2}\left(e^{-iz_0 k} + e^{iz_0 k}\right) + C_4 + C_3 = 0, \\ -\frac{1}{2k^2}\left(e^{(h-iz_0)k} + e^{-(h-iz_0)k}\right) + C_4 e^{hk} + C_3 e^{-hk} = \frac{-i}{\omega\rho_0} Q(x), \end{cases}$$

$$C_3 = \frac{1}{2k^2}\left(e^{-iz_0 k} + e^{iz_0 k}\right) - C_4,$$

$$C_4 = \frac{\frac{-i}{\omega\rho_0} Q(x) + \frac{1}{2k^2}\left(e^{k(h-iz_0)} - e^{-k(h+iz_0)}\right)}{\left(e^{hk} - e^{-hk}\right)},$$

$$\varPhi = \frac{\left(e^{k(z-iz_0)} - e^{-k(z-iz_0)}\right)}{2k^2} + \frac{iQ(x)\left(e^{-zk} - e^{zk}\right)}{\omega\rho_0\left(e^{hk} - e^{-hk}\right)} + \frac{1}{k^2\left(e^{hk} - e^{-hk}\right)},$$

$$\varPhi = \frac{sh\left(k\left(z - iz_0\right)\right)}{2k^2} - \frac{iQ(x)sh(zk)}{\omega\rho_0 sh(hk)} + \frac{1}{k^2 sh(hk)}. \qquad (2.8)$$

3 Решение задачи для упругого полупространства

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\Delta u+\rho\omega^2 u=0, \\ (\lambda-\mu)\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)+\mu\Delta w+\rho\omega^2 w=0. \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \mu\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\right|_{z=h}=0, \\ \left.\left(\lambda\dfrac{\partial u}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right|_{z=h}=q(x), \\ u\Big|_{\sqrt{x^2+z^2}\to\infty}\to 0, \\ w\Big|_{\sqrt{x^2+z^2}\to\infty}\to 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Преобразуем систему (3.1):

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\right)+\mu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho\omega^2 u=0, \\ (\lambda-\mu)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\mu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho\omega^2 w=0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Применим экспоненциальное преобразование Фурье (свойства преобразований Фурье приведены в приложении) по координате хдля (3.2) – (3.3):

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\left(-\alpha^2 U+\dfrac{\partial}{\partial z}(-i\alpha W)\right)+\mu\left(-\alpha^2 U+\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)+\rho\omega^2 U=0, \\ (\lambda+\mu)\left(\dfrac{\partial}{\partial z}(-i\alpha U)+\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)+\mu\left(-\alpha^2 W+\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)+\rho\omega^2 W=0. \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial U}{\partial z} - i\alpha W\right)\Big|_{z=h} = 0, \\ \left(-i\lambda\alpha U + (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial W}{\partial z}\right)\Big|_{z=h} = Q(x), \\ U\big|_{\sqrt{x^2+z^2}\to\infty} \to 0, \\ W\big|_{\sqrt{x^2+z^2}\to\infty} \to 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} -\alpha^2\lambda U - i\alpha\lambda\dfrac{\partial W}{\partial z} - 2\alpha^2\mu U - i\alpha\mu\dfrac{\partial W}{\partial z} + \mu\dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \rho\omega^2 U = 0, \\ -i\alpha\lambda\dfrac{\partial U}{\partial z} - i\alpha\mu\dfrac{\partial U}{\partial z} + \lambda\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \mu\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \alpha^2\mu W + \mu\dfrac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \rho\omega^2 W = 0. \end{cases}$$

Введем замену:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \varphi, \frac{\partial W}{\partial z} = \psi.$$

$$\begin{cases} -\alpha^2\lambda U - i\alpha\lambda\psi - 2\alpha^2\mu U - i\alpha\mu\psi + \mu\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \rho\omega^2 U = 0, \\ -i\alpha\lambda\varphi - i\alpha\mu\varphi + \lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial z} + 2\mu\dfrac{\partial\psi}{\partial z} - \alpha^2\mu W + \rho\omega^2 W = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \mu(\varphi - i\alpha W)\big|_{z=h} = 0, \\ \left(-i\lambda\alpha U + (\lambda+2\mu)\psi\right)\big|_{z=h} = Q(x), \\ U\big|_{\sqrt{x^2+z^2}\to\infty} \to 0, \\ W\big|_{\sqrt{x^2+z^2}\to\infty} \to 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Преобразуем систему (3.6) и решим ее.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial U}{\partial z} = \varphi, \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \psi \dfrac{i\alpha}{\mu}\left(\lambda + \mu\right) + U\left(\dfrac{\alpha^2}{\mu}\left(\lambda + 2\mu\right) - \dfrac{\rho\omega^2}{\mu}\right), \\
\dfrac{\partial W}{\partial z} = \psi, \\
\dfrac{\partial \psi}{\partial z} = \varphi \dfrac{i\alpha\left(\lambda + \mu\right)}{\lambda + 2\mu} + W\left(\dfrac{\alpha^2\mu - \rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}\right).
\end{cases}
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
\dfrac{\alpha^2\left(\lambda + 2\mu\right) - \rho\omega^2}{\mu} & 0 & 0 & \dfrac{i\alpha\left(\lambda + \mu\right)}{\mu} \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & \dfrac{i\alpha\left(\lambda + \mu\right)}{\lambda + 2\mu} & \dfrac{\alpha^2\mu - \rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix}
-\beta & 1 & 0 & 0 \\
\dfrac{\alpha^2\left(\lambda + 2\mu\right) - \rho\omega^2}{\mu} & -\beta & 0 & \dfrac{i\alpha\left(\lambda + \mu\right)}{\mu} \\
0 & 0 & -\beta & 1 \\
0 & \dfrac{i\alpha\left(\lambda + \mu\right)}{\lambda + 2\mu} & \dfrac{\alpha^2\mu - \rho\omega^2}{\lambda + 2\mu} & -\beta
\end{vmatrix} = 0.
$$

Введем для простоты замену:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{\alpha^2\left(\lambda + 2\mu\right) - \rho\omega^2}{\mu}, \\
b &= \frac{i\alpha\left(\lambda + \mu\right)}{\mu}, \\
c &= \frac{i\alpha\left(\lambda + \mu\right)}{\lambda + 2\mu}, \\
d &= \frac{\alpha^2\mu - \rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$-\beta\begin{vmatrix}-\beta & 0 & b\\ 0 & -\beta & 1\\ c & d & -\beta\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a & 0 & b\\ 0 & -\beta & 1\\ 0 & d & -\beta\end{vmatrix}=0,$$

$$\beta^4-\beta^2\left(c\cdot b+d+a\right)+a\cdot d=0.$$

$$\beta^4-\beta^2\left(2\alpha^2-\frac{\rho\omega^2\left(\lambda+3\mu\right)}{\mu\left(\lambda+2\mu\right)}\right)+\left(\alpha^4-\frac{\rho\omega^2\alpha^2}{\mu}-\frac{\rho\omega^2\left(\alpha^2\mu-\rho\omega^2\right)}{\mu\left(\lambda+2\mu\right)}\right)=0.$$

$$\beta^2=\eta,$$

$$\eta^2-\eta\left(2\alpha^2-\frac{\rho\omega^2\left(\lambda+3\mu\right)}{\mu\left(\lambda+2\mu\right)}\right)+\left(\alpha^4-\frac{\rho\omega^2\alpha^2}{\mu}-\frac{\rho\omega^2\left(\alpha^2\mu-\rho\omega^2\right)}{\mu\left(\lambda+2\mu\right)}\right)=0,$$

$$D=\frac{\rho^2\omega^4\left(\lambda+\mu\right)^2}{\mu^2\left(\lambda+2\mu\right)^2},$$

$$\eta_1=\alpha^2-\frac{\rho\omega^2}{\mu},$$
$$\eta_2=\alpha^2-\frac{\rho\omega^2}{\left(\lambda+2\mu\right)}.$$

Введем замену:

$$\kappa_1^2=\frac{\rho\omega^2}{\mu},\kappa_2^2=\frac{\rho\omega^2}{\left(\lambda+2\mu\right)}, \tag{3.9}$$

$$\eta_1=\alpha^2-\kappa_1^2,\eta_2=\alpha^2-\kappa_2^2.$$

$$\begin{aligned}\beta_1&=\sqrt{\eta_1},\beta_2=-\sqrt{\eta_1},\\ \beta_3&=\sqrt{\eta_2},\beta_4=-\sqrt{\eta_2},\end{aligned} \tag{3.10}$$

Найдем собственные вектора:

$$\beta_1=\sqrt{\eta_1}\to h^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ \beta_1\\ \dfrac{i\alpha}{\beta_1}\\ i\alpha\end{pmatrix},\beta_2=-\sqrt{\eta_1}\to h^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\ \beta_2\\ \dfrac{i\alpha}{\beta_2}\\ i\alpha\end{pmatrix},$$

$$\beta_3=\sqrt{\eta_2}\to h^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\ \beta_3\\ \dfrac{i\beta_3}{\alpha}\\ \dfrac{i\beta_3^2}{\alpha}\end{pmatrix},\beta_4=-\sqrt{\eta_2}\to h^{(4)}=\begin{pmatrix}1\\ \beta_4\\ \dfrac{i\beta_4}{\alpha}\\ \dfrac{i\beta_4^2}{\alpha}\end{pmatrix}.$$

Общее решение (3.1) имеет вид:

$$\begin{pmatrix}U\\ \varphi\\ W\\ \psi\end{pmatrix}=C_1e^{z\beta_1}\begin{pmatrix}1\\ \beta_1\\ \dfrac{i\alpha}{\beta_1}\\ i\alpha\end{pmatrix}+C_2e^{z\beta_2}\begin{pmatrix}1\\ \beta_2\\ \dfrac{i\alpha}{\beta_2}\\ i\alpha\end{pmatrix}+C_3e^{z\beta_3}\begin{pmatrix}1\\ \beta_3\\ \dfrac{i\beta_3}{\alpha}\\ \dfrac{i\beta_3^2}{\alpha}\end{pmatrix}+C_4e^{z\beta_4}\begin{pmatrix}1\\ \beta_4\\ \dfrac{i\beta_4}{\alpha}\\ \dfrac{i\beta_4^2}{\alpha}\end{pmatrix}.$$

По условию излучения типа Зоммерфельда (условия излучения типа Зоммерфельда приведены в приложении),общее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix}U\\ \varphi\\ W\\ \psi\end{pmatrix}=C_1e^{z\beta_1}\begin{pmatrix}1\\ \beta_1\\ \dfrac{i\alpha}{\beta_1}\\ i\alpha\end{pmatrix}+C_3e^{z\beta_3}\begin{pmatrix}1\\ \beta_3\\ \dfrac{i\beta_3}{\alpha}\\ \dfrac{i\beta_3^2}{\alpha}\end{pmatrix}.$$

Решим краевую задачу (3.6) – (3.7), учитывая (3.8) – (3.10):

$$\begin{cases}\mu\left[C_1e^{h\beta_1}\beta_1+C_3e^{h\beta_3}\beta_3-i\alpha\left(C_1e^{h\beta_1}\dfrac{i\alpha}{\beta_1}+C_3e^{h\beta_3}\dfrac{i\beta_3}{\alpha}\right)\right]=0,\\ -i\lambda\alpha\left(C_1e^{h\beta_1}+C_3e^{h\beta_3}\right)+\left(\lambda+2\mu\right)\left(C_1e^{h\beta_1}i\alpha+C_3e^{h\beta_3}\dfrac{i\beta_3^2}{\alpha}\right)=Q.\end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 e^{h\beta_1}\left(\beta_1^2+\alpha^2\right)+C_3 e^{h\beta_3}2\beta_3\beta_1=0, \\ C_1 e^{h\beta_1}2\mu i\alpha^2+C_3 e^{h\beta_3}i\left(-i\alpha^2\lambda+i\lambda\beta_3^2+2i\mu\beta_3^2\right)=Q\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_1 e^{h\beta_1}\left(\beta_1^2+\alpha^2\right)+C_3 e^{h\beta_3}2\beta_3\beta_1=0, \\ C_1 e^{h\beta_1}2\mu i\alpha^2-C_3 e^{h\beta_3}i\left(\rho\omega^2-2\mu\alpha^2\right)=Q\alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{-C_3 e^{h\beta_3}2\beta_3\beta_1}{e^{h\beta_1}\left(\beta_1^2+\alpha^2\right)}, \\ C_3=\dfrac{iQ\alpha\left(\beta_1^2+\alpha^2\right)}{e^{h\beta_3}\mu\left(-4\beta_3\beta_1\alpha^2+\left(\beta_1^2+\alpha^2\right)^2\right)}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{iQ\alpha 2\beta_3\beta_1}{e^{h\beta_1}\mu\left(-4\beta_3\beta_1\alpha^2+\left(\beta_1^2+\alpha^2\right)^2\right)}, \\ C_3=\dfrac{-iQ\alpha\left(\beta_1^2+\alpha^2\right)}{e^{h\beta_3}\mu\left(-4\beta_3\beta_1\alpha^2+\left(\beta_1^2+\alpha^2\right)^2\right)}. \end{cases}$$

Решение краевой задачи (3.6) – (3.7):

$$\begin{cases} U=\dfrac{-iQ\alpha}{4\mu\left(\beta_3\beta_1\alpha^2-\left(\alpha^2-\kappa_1^2/2\right)^2\right)}\left(\dfrac{2\beta_3\beta_1 e^{z\beta_1}}{e^{h\beta_1}}-\dfrac{\left(2\alpha^2-\kappa_1^2\right)e^{z\beta_3}}{e^{h\beta_3}}\right), \\ W=\dfrac{Q\beta_3}{4\mu\left(\beta_3\beta_1\alpha^2-\left(\alpha^2-\kappa_1^2/2\right)^2\right)}\left(\dfrac{2\alpha^2 e^{z\beta_1}}{e^{h\beta_1}}-\dfrac{\left(2\alpha^2-\kappa_1^2\right)e^{z\beta_3}}{e^{h\beta_3}}\right). \end{cases} \qquad (3.11)$$

4 Стыковка решений

Взаимодействие сред определяется равенством вертикальных составляющих скоростей точек жидкости и упругой среды в зоне контакта:

$$\left.\left(\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\right|_{z=h}=0.$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}=\frac{ch\left(k\left(z-iz_0\right)\right)}{2k}-\frac{iQ\left(x\right)\cdot k\cdot ch\left(hk\right)}{2\omega\rho_0\cdot sh\left(hk\right)},$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{i\omega Q\beta_3\kappa_1^2}{4\mu\left(\beta_3\beta_1\alpha^2-\left(\alpha^2-\kappa_1^2/2\right)^2\right)}.$$

$$\frac{ch\left(k\left(h-iz_0\right)\right)}{2k}-\frac{iQ\left(x\right)\cdot k\cdot ch\left(hk\right)}{2\omega\rho_0\cdot sh\left(hk\right)}-\frac{i\omega Q\beta_3\kappa_1^2}{4\mu\left(\beta_3\beta_1\alpha^2-\left(\alpha^2-\kappa_1^2/2\right)^2\right)}=0,$$

$$\frac{ch\left(k\left(h-iz_0\right)\right)}{2k}=iQ\left(x\right)\left[\frac{k\cdot ch\left(hk\right)}{2\omega\rho_0\cdot sh\left(hk\right)}+\frac{\omega\beta_3\kappa_1^2}{4\mu\left(\beta_3\beta_1\alpha^2-\left(\alpha^2-\kappa_1^2/2\right)^2\right)}\right],$$

$$Q\left(x\right)=\frac{-i2\mu\omega\rho_0\cdot ch\left(k\left(h-iz_0\right)\right)sh\left(hk\right)\left(\beta_3\beta_1\alpha^2-\left(\alpha^2-\kappa_1^2/2\right)^2\right)}{k\left[2\mu k\left(\beta_3\beta_1\alpha^2-\left(\alpha^2-\kappa_1^2/2\right)^2\right)ch\left(hk\right)+\omega^2\rho_0\beta_3\cdot sh\left(hk\right)\kappa_1^2\right]}.$$

5 Построим обратное преобразование Фурье

Для построения обратного преобразования Фурье найдем корни знаменателя решения задач для слоя жидкости и для упругого полупространства:

Найдем нули знаменателя решения для слоя жидкости:

$$\Phi = \frac{sh\left(k\left(z - iz_0\right)\right)}{2k^2} - \frac{iQ\left(x\right)sh\left(zk\right)}{\omega\rho_0 sh\left(hk\right)} + \frac{1}{k^2 sh\left(hk\right)},$$

$$\Phi = \frac{sh\left(hk\right)\omega\rho_0 sh\left(k\left(z - iz_0\right)\right) - i2k^2 Q\left(x\right)sh\left(zk\right) + 2\omega\rho_0}{2k^2\omega\rho_0 sh\left(hk\right)}.$$

$$2k^2\omega\rho_0 sh\left(hk\right) = 0,$$

$$k^2 sh\left(hk\right) = 0.$$

$$k^2 = 0 \text{ или } sh\left(hk\right) = 0.$$

Воспользуемся (2.6):

$$k^2 = 0,$$

$$\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0,\ \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

$$\alpha_{1,2} = \pm\frac{\omega}{c},\quad \alpha_1 = \frac{\omega}{c}.$$

$$sh\left(hk\right) = 0,$$

$$\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \geq 0,$$

$$h \cdot \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 0,\ \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = 0,$$

$$\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0,\ \alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

$$\alpha_{3,4} = \pm\frac{\omega}{c},\ \alpha_3 = \frac{\omega}{c}.$$

$$\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2} < 0,$$

$$sh\left(i \cdot h \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2}\right) = 0,$$

$$i \cdot \sin\left(h \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2}\right) = 0,$$

$$h \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2} = \pi n,\ n \in Z,$$

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2} = \frac{\pi n}{h},\ n \in Z,$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 = \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2,\ n \in Z,$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2,\ n \in Z,$$

$$\alpha_{4,5} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2},\ n \in Z,$$

$$\alpha_{4_n} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2},\ n \in Z,$$

$$\alpha_{4_0} = \frac{\omega}{c},\ n \in Z,\ \alpha_{4_n} = i\sqrt{\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}},\ n \in N.$$

6 Численный расчет

Для нахождения нулей уравнения была составлена программа в среде разработки VisualStudioC++, которая находит нули знаменателя решения задачи для упругого полупространства методом половинного деления.

Для этого метода существенно чтобы функция

$$W=\frac{Q\beta_3}{4\mu\left(\beta_3\beta_1\alpha^2-\left(\alpha^2-\kappa_1^2/2\right)^2\right)}\left(\frac{2\alpha^2e^{z\beta_1}}{e^{h\beta_1}}-\frac{\left(2\alpha^2-\kappa_1^2\right)e^{z\beta_3}}{e^{h\beta_3}}\right)$$

была непрерывна и ограничена в заданном интервале $\left[\kappa_1^2,2\kappa_1^2\right]$ внутри которого находится корень.

Рассмотрим интервал $\left[\kappa_1^2,2\kappa_1^2\right]$. Для нахождения корня уравнения делим этот отрезок пополам $c=\frac{\kappa_1^2+2\cdot\kappa_1^2}{2}$, и сравниваем значение функции на концах полученного интервала $\left[\kappa_1^2,c\right]$. Если условие $f\left(\kappa_1^2\right)\cdot f\left(c\right)<0$ выполнено, то на этом интервале существует корень $p=\frac{\kappa_1^2+c}{2}$. Если условие не выполнено, то корень расположен на $\left[c,2\cdot\kappa_1^2\right]$. В этом случае необходимо рассматривать интервал $\left[c,2\cdot\kappa_1^2\right]$. Повторим предыдущие действия для полученного интервала. Алгоритм будет выполняться до тех пор, пока не достигнем конца интервала или $\left|f\left(x\right)\right|<\varepsilon$.

Полученные результаты программы можно изобразить с помощью графика (рисунок 2). Для знаменателя функции был построен график с условиями, что $\rho=2{,}84$, $E=2030$, $v=0.3$, а λ и μ вычисляются по формулам:

$$\lambda=\frac{vE}{(1+v)(1-2v)},\mu=\frac{E}{2(1-v)}.$$

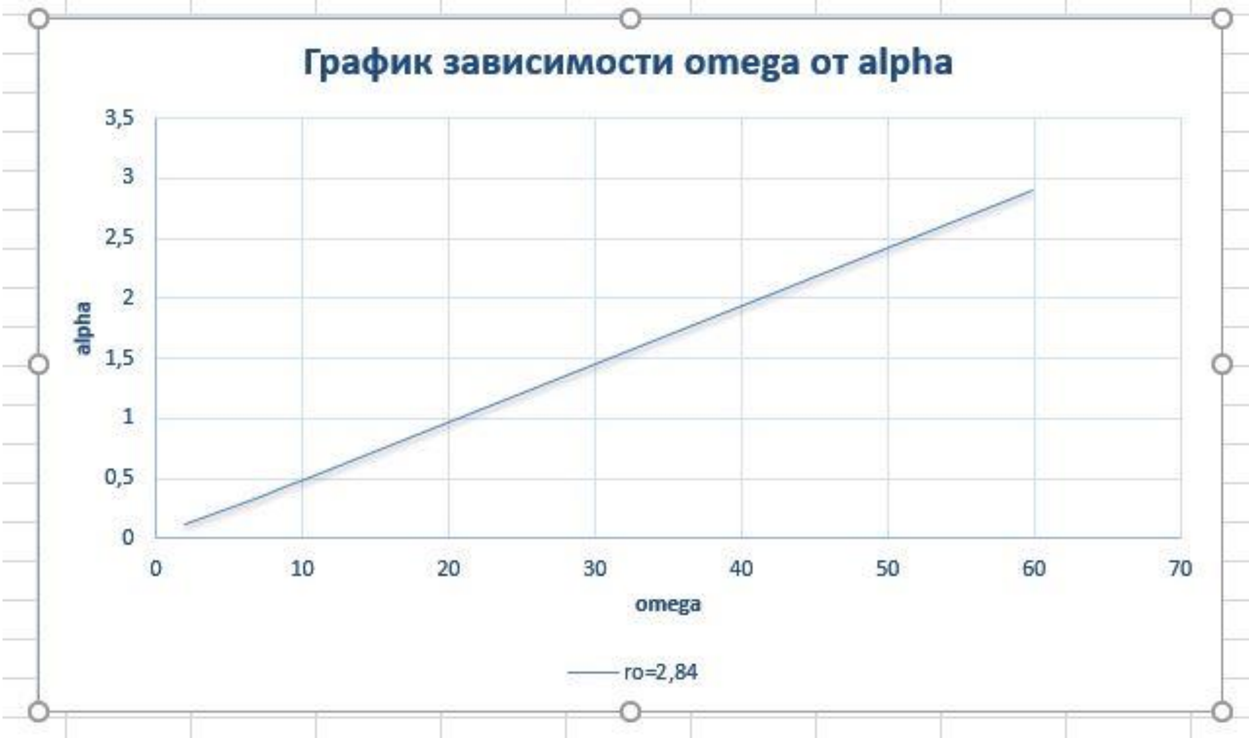

Рисунок 2 – график зависимости α от ω

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В курсовой работе поставлена задача о колебаниях жидкого слоя под действием гармонического точечного источника. К уравнениям и граничным условиям применено экспоненциальное преобразование Фурье, которое позволяет уменьшить размер задачи. Решение выполнено для слоя идеальной жидкости и для упругого полупространства, выполнена стыковка решений, найдены нули знаменателя для слоя идеальной жидкости, реализована программа в средеразработки VisualStudioC++, которая находит нули знаменателя решения задачи для упругого полупространства.

В дальнейшем планируется выполнить обратное преобразование Фурье, найти образ Фурье искомой функции Q на границе раздела сред.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Голубева, О.В. Курс механики сплошных сред / О. В. Голубева; Учеб. Пособие для педвузов. М. «Высшая школа», 1972. – 368 с. с илл.
2. Краснобаев, К.В. Лекции по основам механики сплошной среды / К.В. Краснобаев. Учеб. пособие для вузов. – М.: Издательство физико–математической литературы, 2005. – 108 с.
3. Снеддон, И. Преобразование Фурье / И. Снеддон – М.: ИЛ, 1955. – 668 с.
4. Диткин, В. А. «Операционное исчисление» / В. А. Диткин, А. П. Прудников. Итоги науки. Сер. Математика. Мат. ан. 1964, ВИНИТИ, М., 1966, 7 – 75.
5. Диткин, В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление/В.А. Диткин,А.П. Прудников – М.: Наука, 1974. – 323с.
6. Метод половинного деления. [Электронный ресурс] – URL: http://www.machinelearning.ru/wiki (Дата обращения – 1.04.2017).
7. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. – 741 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Теоретические сведения

Условие излучения типа Зоммерфельда

Один из возможных видов асимптотических условий (граничных условий на бесконечности), которые выделяют единственные решения краевых задач для уравнений, описывающих установившиеся колебания.

Уравнение Гельмгольца:

$$\Delta U + k^2 U = f$$

– имеет не единственное решение в классе (обобщённых) функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Чтобы выделить класс единственности решения (из соображений удобства выбрать конкретное решение) в неограниченных областях, необходимо потребовать дополнительных ограничений решения на бесконечности. Этими ограничениями и явились условия излучения Зоммерфельда:

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - iku(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \to \infty, \tag{1}$$

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + iku(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \to \infty, \tag{2}$$

Условия излучения (1) отвечают уходящим на бесконечность волнам, а условия (2) волнам, приходящим из бесконечности. Для гармонических функций $(k = 0)$ условия вытекают из единственного требования $u(\infty) = 0$. При $k > 0$ всякое решение однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее второму из условий (1) или (2), удовлетворяет и первому условию: $u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

Преобразование Фурье

Преобразование Фурье – операция, сопоставляющая одной функциивещественной переменной другую функцию вещественной переменной. Эта новая функция описывает коэффициенты («амплитуды») при разложении исходной функции на элементарные составляющие – гармонические колебания с разными частотами (подобно тому, как музыкальный аккорд может быть выражен в виде амплитуд нот, которые его составляют).

Преобразование Фурье функции f вещественной переменной является интегральным и задаётся следующей формулой:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Некоторые свойства преобразования Фурье:

1. Преобразование Фурье остается линейным оператором:

$$\left(\alpha f + \beta g\right) = \alpha f + \beta g.$$

2. Справедливо равенство Парсеваля: если $f \in L_1(R) \cap L_2(R)$, то преобразование Фурье сохраняет L_2 – норму:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) \right|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(\omega) \right|^2 d\omega.$$

Это свойство позволяет по непрерывности распространить определение преобразования Фурье на всё пространствоРавенство Парсеваля будет при этом справедливо для всех $f \in L_2(R)$.

3. Формула обращения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

справедлива, если интеграл в правой части имеет смысл. В частности, это верно, если функция f является достаточно гладкой. Если $f \in L_2(R)$, то формула также верна, поскольку равенство Парсеваля позволяет придать интегралу в правой части смысл с помощью предельного перехода.

Эта формула объясняет физический смысл преобразования Фурье: правая часть – (бесконечная) сумма гармонических колебаний $e^{i\omega x}$ с частотами ω, амплитудами $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|f(\omega)\right|$ и фазовыми сдвигами $\arg f(\omega)$ соответственно.

4. Преобразование Фурье и дифференцирование. Если $f, f^{'} \in L(R)$, то

$$\left(f^{'}\right) = i\omega f.$$

Из этой формулы легко выводится формула для производной порядка n:

$$\left(f^{(n)}\right) = (i\omega)^n \; f.$$

Формулы верны и в случае обобщенных функций.

5. Преобразование Фурье и сдвиг.

$$f\left(x - x_0\right) = e^{-i\omega x_0} \; f(\omega).$$

Эта и предыдущая формула являются частными случаями теоремы о сверстке, так как сдвиг по аргументы – это сверстка со сдвинутой дельта – функцией $\delta(x - x_0)$, а дифференцирование – сверстка с производной дельта – функцией.

Преобразование Фурье используется во многих областях науки – в физике, теории чисел, комбинаторике, обработке сигналов, теории вероятностей, статистике, криптографии, акустике, оптике и многих других. В обработке сигналов и связанных областях преобразование Фурье обычно рассматривается как декомпозиция сигнала на частоты и амплитуды, то есть обратимый переход от временного пространства в частотное пространство. Богатые возможности применения основываются на нескольких полезных свойствах преобразования:

1. Преобразования являются линейными операторами и, с соответствующей нормализацией, унитарными (свойство, известное как теорема Парсеваля).

2. Преобразования обратимы, причём обратное преобразование имеет практически такую же форму, как и прямое преобразование.

3. Синусоидальные базисные функции (вернее, комплексные экспоненты) являются собственными функциями дифференцирования, что означает, что данное представление превращает линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в обычные алгебраические. (Например, в линейной стационарной системе частота – консервативная величина, поэтому поведение на каждой частоте может решаться независимо).

4. По теореме о свёртке, преобразование Фурье превращает сложную операцию свёртки в простое умножение, что означает, что они обеспечивают эффективный способ вычисления основанных на свёртке операций, таких как умножение многочленов и умножение больших чисел.

5. Дискретная версия преобразования Фурье может быть быстро рассчитана на компьютерах с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Свойства дельта – функции

δ – функция, обобщённая функция, которая позволяет записать точечное воздействие, а также пространственную плотность физических величин (масса, заряд, интенсивность источника тепла, сила и т. п.), сосредоточенных или приложенных в одной точке.

δ – функция не является функцией в классическом смысле, а определяется как обобщённая функция: непрерывный линейный функционал на пространстве дифференцируемых функций.

Некоторые свойства δ – функции:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = \begin{cases} f(x_0), x_0 \in [a,b] \\ 0, x_0 \notin [a,b] \end{cases},$$

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x)$$

К δ – функции можно применить преобразование Фурье:

$$F\{\delta(x - x_0)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Листинг программы

```
#include "stdafx.h"
#include <math.h>
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <fstream>
#include <conio.h>
using namespace std;
const double epsilon = 0.00001;
double k1_2;
double k2_2;
double betta1;
double betta3;
double f(double alpha)
{
	/*betta1 = sqrt(alpha*alpha - k1_2);
	betta3 = sqrt(alpha*alpha - k2_2);*/
	betta3 = sqrt((alpha*alpha - k2_2)*(alpha*alpha - k1_2));
	//return  betta1*betta3*pow(alpha, 2) - pow(pow(alpha, 2) - k1_2 / 2,2);
	return betta3*pow(alpha,2)-pow(pow(alpha,2)-k1_2/2,2);
}
int main()
{
	setlocale(LC_ALL, "rus");
	ifstream fin;
	ofstream fout;
	fin.open("input.txt");
```

```
fout.open("output.txt");
if (!fin)
{
	cout << "Ошибка открытия файла!\n";
	_getch();
	exit(1);
}
if (!fout) ofstream fout("output.txt");

double a, b,x,y,p,k,h;
double i = 1, j = 0;
double ro, omega,E,v;

cout << "po="; cin >> ro;
cout << "Omega="; cin >> omega;
cout << "E="; cin >> E;
cout << "v="; cin >> v;

double m = E/(2*(1-v));
double l = v*E/((1+v)*(1-2*v));

for (i = omega; i < omega +50; i += 0.1)
{
	k1_2 = ro*pow(i, 2) / m;
	k2_2 = ro*pow(i, 2) / (l + 2 * m);
	cout << k1_2 << endl;
	cout << k2_2 << endl;
	cout << endl;

	a = sqrt(k1_2);
	b = sqrt(2 * k1_2);

	h = (b - a) / 100;
	x = a+h;
```

```
        k = 1;
        while (x<=b)
        {
            y = x + h;
            if (f(x)*f(y) < 0)
            {
                p = (x + y) / 2;
                k++;
            }
            x = y;
        }
        //printf("%8.6f %8.6f \n", i, p);
        fout << p << endl;
}
    system("pause");
}
```