МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

**«КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**(ФГБОУ ВО «КубГУ»)**

**Кафедра вычислительной математики и информатики**

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

**БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ 2X2**

Работу выполнил \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Т. Р. Назаров

Факультет математики и компьютерных наук курс 3

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные наук

Научный руководитель

канд. физ.-мат. наук,

доцент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Д. Г. Сокол

Нормоконтролер

преподаватель\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А. А. Цыбенко

Краснодар 2018

**СОДЕРЖАНИЕ**

Введение………………………………………………………………………...3

1 Теория игр как дисциплина………………………………………………….4

2 Биматричные игры…………………………………………………………...6

3 Равновесие по Нэшу………………………………………………………….8

4 Оптимальность по Парето…………………………………………………..10

5 Биматричных игры 2x2……………………………………………………...11

5.1 «Борьба за рынки»..…………………………………………….............14

5.2 «Дилемма заключенного»……………………………………………...16

5.3 «Ястреб — Голубь»..……………………………………………...........20

Заключение…………………………………………………………………….24

Список использованных источников………………………………………...25

**ВВЕДЕНИЕ**

Цель этой работы состоит в том, чтобы научиться решать биматричные игры и разработать соответствующее программное обеспечение. Для этого мы рассмотрим один из разделов теории игр «Биматричные игры», разберем главные понятия этой темы и научимся применять эти знания на практике.

Стоит отметить, что данная тема является актуальной, поскольку в современных условиях из-за столкновения интересов нередко приходится искать выгодные для себя стратегии. В таких ситуациях теория игр, имеющая в запасе достаточное количество методов решения биматричных игр, позволяет эффективно решать такие задачи несколькими методами и из их множества выбирать наиболее эффективные.

**1 Теория игр как дисциплина**

Теория игр как научная дисциплина изучает решение конфликтов между игроками и оптимальность их стратегий. Вместе с традиционными играми, эта дисциплина изучает такие важнейшие отношения как дипломатические переговоры, политическая конкуренция, гонка вооружений и так далее. В теории игр эти отношения называют играми, в которых результат зависит от выбранных стратегий всех участников.

В экономике теория игр изучает функционирование экономических систем в условиях «несовершенного рынка. Применение игрового подхода в экономике позволяет эффективно строить различные игровые модели. Например, аукционы и олигополии. Важным достижением теории игр является также решение проблемы асимметричной информированности в экономике.

Сегодня вряд ли возможно дать простое формальное определение игры, которое бы включало все игровые модели. В общем случае, игра — это модель конфликтной ситуации, в которой 1) участвует n игроков, 2) заданы правила игры (способ принятия решений каждым из игроков), 3) определены правила осуществления платежей между игроками. Обычно игры классифицируют следующим образом.

По количеству игроков: игры 1, 2, n игроков.

По количеству стратегий: конечные и бесконечные игры. Если у всех игроков конечное число стратегий, то такая игра конечная, иначе — игра бесконечная.

По характеру взаимоотношений между игроками: бескоалиционные и кооперативные игры. Игра называется бескоалиционной, если игроки не заключают между собой никаких соглашений. Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется биматричной игрой. В кооперативной игре игроки имеют право заключать соглашения между собой с целью увеличить свои выигрыши.

По количеству ходов: одноходовые и многоходовые. Среди многоходовых игр особое место занимают позиционные игры, в которых несколько игроков последовательно делают ходы; выигрыши игроков будут зависеть от стратегии выбора ходов (примерами могут быть шахматы, покер, игровые автоматы и многое другое).

По свойствам функций выигрышей игры бывают непрерывные, сепарабельные, выпуклые и другие. Если сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю, то это — игра с нулевой суммой. Игра двух игроков c нулевой суммой называется антагонистической. В такой игре один игрок выигрывает за счет другого. Конечная антагонистическая игра называется матричной игрой. В играх с ненулевой суммой все игроки получают меньше их суммарного взноса. В лотерее, например, ее организаторы всегда в выигрыше, а сумма выигрышей участников всегда меньше их суммарного взноса.

По информированности игроков существуют игры с совершенной и несовершенной информацией. В играх с совершенной информацией игрокам известен каждый шаг, который был ими сделан ранее (например, шашки и шахматы). В игре с несовершенной информацией игроки могут не знать, в какой позиции они находятся (это многие стохастические игры, в частности, карточные игры).

**2 Биматричные игры**

Частным случаем неантагонистической игры является игра, в которой принимают участие два игрока, каждый из которых имеет конечное число стратегий. Такие игры можно описать с помощью двух матриц, поэтому они называются *биматричными*.

Пусть первый игрок A имеет стратегий, а игрок B – стратегий. Количество исходов равно . Если игрок A выбрал -ю стратегию А1, а игрок В — -ю стра­тегию Bk, то выигрыш игрока А равен числу , а выигрыш игрока В числу . Тогда получаем две платежные матрицы, где A — платежная матрица игрока А, а B — платежная матрица игрока В.

*,* .

Игру можно также описать с помощью таблицы.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *B1* | *…* | *Bk* | *…* | *Bn* |  |  | *B1* | *…* | *Bk* | *…* | *Bn* |
| *A1* | *a11* | *…* | *a1k* | *…* | *a1n* |  | *A1* | *b11* | *…* | *b1k* | *…* | *b1n* |
| *…* | *…* | *….* | *…* | *…* | *…* |  | *…* | *…* | *….* | *…* | *…* | *…* |
| *Ai* | *ai1* | *…* | *aik* | *…* | *ain* |  | *Ai* | *bi1* | *…* | *bik* | *…* | *bin* |
| *…* | *…* | *…* | *…* | *…* | *…* |  | *…* | *…* | *…* | *…* | *…* | *…* |
| *Am* | *am1* | *…* | *amk* | *…* | *amn* |  | *Am* | *bm1* | *…* | *bmk* | *…* | *bmn* |

Если участник А выбрал -ю стратегию, а участник В — -ю, то их выигрыши находятся в матрицах выплат на пересечении -x строк и -х столбцов. В матрице А это элемент , а в матрице В — элемент .

Матричную игру можно считать частным случаем биматричной игры, когда матрица выплат участнику B противоположна матрице выплат игроку A:

.

В общем случае биматричная игра – это игра с ненулевой суммой.

**3 Равновесие по Нэшу**

Пусть игрок имеет стратегий ( =1,…,m ), а игрок B – стратегий ( = 1,…,n ).

Ситуация (*i*\*, *j*\*) биматричной игры называется ситуацией равновесия (равновесной по Нэшу) в чистых стратегиях, если

≤ для любых =1,…,m и ≤ для любых = 1,…,n. (1)

Для того чтобы найти ситуацию равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, необходимо найти в каждом столбце матрицы выигрышей игрока A максимальный элемент. Также в каждой строке матрицы выигрышей игрока B найдем максимальный элемент. Если мы найдем эти элементы, стоящие на одном и том же месте, то их положение и определит ситуацию равновесия в игре. В биматричной игре (в отличие от матричной) выигрыши игроков, могут различаться при наличии нескольких равновесных ситуаций.

Рассмотрим теперь случай, когда игра не имеет ситуаций равновесия в чистых стратегиях. Кроме равновесия в чистых стратегиях существует еще равновесие Нэша в смешанных стратегиях. Смысл смешанной стратегии для биматричной игры будем определять так же, как и для матричных игр:

* для игрока A: *x* = () его смешанная стратегия, где

 , ≥0 , =1,…,m

* для игрока B: *y* = () его смешанная стратегия, где

 , ≥0 , =1,…,n

В биматричных играх также можно перейти к смешанному расширению игры, предполагая, что каждая игра может быть повторена в неизменных условиях. При этом средние выигрыши игроков A и B определяются по их платежным матрицам A и B:

( =  , ( = . (2)

Ситуация (*x*\*, *y*\*) называется ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях биматричной игры, если для любых *x* и *y* выполняются неравенства:

(≤ , ( ≤ (). (3)

Вопрос существования равновесия по Нэшу решается следующей теоремой, доказанной Дж. Нэшем.

**Теорема** (Джон Нэш, 1950). В любой биматричной игре существует, по крайней мере, одно равновесие Нэша.

**4 Оптимальность по Парето**

Рассмотрим и другой подход к определению оптимальности в биматричных играх, который основан на принципе оптимальности по Парето.

Ситуация () в биматричной игре двух лиц A и B называется оптимальной по Парето, если из того, что

() ≤ () , () ≤ () (4)

следуют равенства: , , то есть не существует ситуации (), для которой имеют место неравенства (4). Среди этих неравенств по крайней мере одно должно быть строгим.

В оптимальной по Парето ситуации, все игроки, если действуют совместно, не могут увеличить выигрыш каждого, не уменьшив при этом выигрыш одного из них. В отличие от этого, в ситуации равновесия по Нэшу ни один из игроков, действуя в одиночку, не может увеличить своего собственного выигрыша.

**5 Биматричные игры 2х2**

Рассмотрим 2x2-биматричную игру с матрицами выигрышей

(5)

соответственно игроков A и B.

Обозначим: , , , , где 0 ≤ ≤ 1. Тогда из формул (2) получим:

( = + + + , (6)

( = + + + (7)

Теперь найдем пару чисел (), 0 ≤≤ 1, для которой выполняются неравенства

() ≤ () , () ≤ (). (8)

Величины *p* и *q* могут принимать любые значения. Поэтому выполнение указанных неравенств равносильно выполнению неравенств:

(9)

Таким образом, чтобы определить равновесную ситуацию достаточно проверить неравенства (8) для двух чистых стратегий игроков A и B.

Запишем средние выигрыши игроков в более удобной форме:

() = () + () + () + (10)

() = () + () + () + (11)

Положим:

*α* = (12)

β = (13)

Используя эти обозначения, из формул (6), (7) получим:

() = (14)

() = (15)

Из формул (12), (13) и неравенств (9) получим:

(16)

Из неравенств (14) для игрока A получаем три случая:

1) если , то для всех имеем: ;

2) если , то для всех имеем: ;

3) если , то для всех имеем: .

Если , то решением будет весь единичный квадрат

, так как условия 1) – 3) выполняются при всех и .

Если , , то решением является либо , либо

Если , то решения будут следующие:

1) если , то;

2) если , то ;

3) если , то .

Если , то решения будут следующие:

1) если , то;

2) если , то ;

3) если , то .

Аналогично для игрока B:

Если , то решением будет весь единичный квадрат

, т.к. условия 1) – 3) выполняются при всех и .

Если , , то решением является либо , либо

Если , то решения будут следующие:

1) если , то;

2) если , то ;

3) если , то .

Если , то решения будут следующие:

1) если , то;

2) если , то ;

3) если , то .

5.1 «**Борьба за рынки**»

Фирма A собирается сбыть крупную партию товара на одном из двух рынков, которые контролируются другой более крупной фирмой B. Для этого фирма B может предпринять на одном из рынков соответствующие действия (например, развернуть рекламную кампанию). Господствующая на рынках фирма B может помешать конкуренту, предприняв на одном из двух рынков предупредительные меры. Первый игрок, не встретивший на рынке препятствий, захватывает его; встретившись с сопротивлением – терпит поражение. Будем считать, что проникновение фирмы А на первый рынок более выгодно для нее, нежели на второй. Будем также считать, что борьба за первый рынок потребует вложения больших средств. Выборы фирмами рынков являются их чистыми стратегиями.

Матрицами выигрышей игроков являются:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 1 рынок | 2 рынок |
| 1 рынок | -10; 5 | 2; -2 |
| 2 рынок | 1; -1 | -1; 1 |

Рисунок 1 Матрицы выигрышей игроков

Используя формулы (12) − (13) получим множества приемлемых для игроков ситуаций, которые определяются следующими параметрами:

, ,

,

Так как , то решения для игрока A будут следующие:

1) если , то ;

2) если , то ;

3) если 0 < < 1, то .

Так как , то решения для игрока B будут следующие:

1) если , то ;

2) если , то ;

3) если 0 < < 1, то .

Изобразим на графике полученные решения.

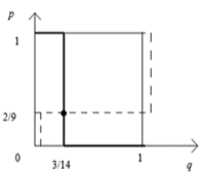


Рисунок 2 Полученные решения для игроков

Мы видим, что зигзаги для *A* и *B* пересекаются только в одной точке: ()(). Тогда оптимальной смешанной стратегией игрока A будет , а у игрока B: . Вычисляем средние выигрыши игроков:

() =

() =

В биматричных играх принцип равновесия по Нэшу не всегда приводит к выгодной для обоих игроков ситуации. Рассмотрим этот случай на примере "дилемма заключенного".

5.2 «**Дилемма заключенного**»

Игроки А и В - заключенные, находящиеся в предварительном заключении по подозрению в тяжком преступлении.

Если оба заключенных будут молчать, то полиция отправит каждого из них в тюрьму по мягкой статье на 1 год.

Если один заключенный выдаст второго, а второй будет молчать, то тот, против кого дали показания, отправится в тюрьму на 9 лет, а другой пойдет на свободу.

Если оба заключенных пойдут на сделку со следствием, то полиция сможет обвинить обоих в совершении ограбления, но каждому из них уменьшат срок до 6 лет.

В этой игре каждый игрок имеет две стратегии признаваться или нет. Матрицами выигрышей игроков являются:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Молчать | Предать |
| Молчать | -1; -1 | -9; 0 |
| Предать | 0; -9 | -6; -6 |

Рисунок 3 Матрицы выигрышей игроков

Используя формулы (12) − (13) получим множества приемлемых для игроков ситуаций, которые определяются следующими параметрами:

, ,

, .

Так как , то решения для игрока A будут следующие:

1) если , то ;

2) если , то ;

3) если 0 < < 1, то .

Так как , то решения для игрока B будут следующие:

1) если , то ;

2) если , то ;

3) если 0 < < 1, то .

Изобразим на графике полученные решения.

*q*

*A*

3/2

1

*B p*

0 1 3/2

Рисунок 4 Полученные решения для игроков

Мы видим, что зигзаги для *A* и *B* пересекаются только в одной точке: (0,0). Это и есть ситуация равновесия, в которой каждый из игроков выбирает стратегию “пойти на сделку со следствием” и теряют по 6 лет, то есть () = () = 6

Отклонение от ситуации равновесия одного из игроков не дает ему никаких преимуществ.

При одновременном отклонении каждый из игроков может получить больший выигрыш, чем в ситуации равновесия. Поэтому два игрока, выбирая стратегию “молчать” (ситуация (1,1)), сокращают себе срок до 1 года. Однако эта ситуация не устойчива, поскольку любой из игроков может увеличить свой выигрыш, то есть избежать наказания.

Таким образом, в биматричной игре ситуация равновесия обоих игроков определяется не столько стремлением увеличить собственный выигрыш, сколько стремлением минимизировать выигрыш другого игрока.

Теперь решим эту задачу иным способом, то есть построим множество Парето и найдем оптимальную точку. По формулам (10) -(11) получим:

() =

() =

Найдем границы множества точек, которые удовлетворяют данным формулам:

1) если то: поэтому

2) если то: поэтому

3) если то: поэтому

4) если то: поэтому

V

-9 -6 -1 0 U

L K -1

M -6

N -9

Рисунок 5 Полученные решения для игроков

Точки с координатами ( вычисленными по приведенным формулам, на плоскости (заполняют четырехугольник с вершинами KL MN. Граница Парето этого множестваломаная NKL. Каждый из игроков заинтересован в наибольшем значении своего среднего выигрыша

(), ().

Следовательно

, .

Таким образом, точкой утопии в этом случае будет начальная точка O. Ближайшая к ней точка множества Парето K

Точка Kточка с наибольшими выигрышами для каждого из игроков оказывается лучше, чем равновесная точка Mи ей соответствуют чистые стратегии обоих игроков

5.3 «**Ястреб — Голубь**»

Допустим, что два вида птиц соперничают между собой и могут применить только две стратегии – стратегию Ястреба и стратегию Голубя. Ястребы – боевые птицы, которые всегда рвутся в бой и не отступают. Голуби не наносят друг другу физических повреждений и ограничиваются лишь угрозами, а также бегут от Ястребов в случаях нападения. Если Ястреб сталкивается с Ястребом, то противостояние будет продолжаться до тех пор, пока один из них не умрет. Если Голубь сталкивается с Ястребом, то первый убегает и остается невредимым. Если Голубь встречается с Голубем, то они просто угрожают друг другу пока кто-то из них не сдастся и никто при этом не страдает. Предположим, что птица не знает кому она будет противостоять и какую из двух стратегий она применит к сопернику (стратегию Ястреба или Голубя). Будем считать, что выигрыш приносит 50 очков (+50), проигрыш — 0 очков (0), при серьезном ущербе потеря 100 очков (-100), а затраты времени в бою составляют потерю 10 очков (-10).

1. Рассмотрим поединок одних Голубей. В их поединках пострадавших не бывает. Проигрыш считается если один из соперников отступает. Победитель получает 50 очков, но он платит штраф — 10 очков за потерянное время в бою. Поэтому его выигрыш составит 40 очков: 50 - 10 = 40.

Побежденный также платит штраф в размере 10 очков за потерянное время. Каждый Голубь в среднем в половине боев победит и в половине проиграет. Поэтому его средний выигрыш за один турнир будет равен среднему арифметическому между (+40) и (-10):

(40 - 10) /2 = 15 (+15).

2. Рассмотрим поединок Ястреба и Голубя. Так как Ястребы всегда побеждают Голубей, то он будет получать 50 очков за каждый поединок и его средний выигрыш составит (+50). Штрафа за потраченное время в этом случае нет, так как мирные переговоры между этими птицами не происходят. В поединке Ястреба с Ястребом один из них получает серьезные   повреждения, из-за чего теряет 100 очков (-100), а выигрыш победителя составляет +50. Поэтому его средняя сценка за один бой равна среднему арифметическому между (+50) и (-100): (50-100)/2 = -25 (-25).

3. Если среди Ястребов появился один Голубь, то он окажется побежденным во всех поединках, но при этом будет оставаться невредимым. Поэтому его средний выигрыш среди Ястребов равен 0.

Матрицами выигрышей игроков являются:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Ястреб | Голубь |
| Ястреб | -25; -25 | 50; 0 |
| Голубь | 0; 50 | 15; 15 |

Рисунок 6 Матрицы выигрышей игроков

Используя формулы (12) − (13) получим множества приемлемых для игроков ситуаций, которые определяются следующими параметрами:

, ,

, .

Так как , то решения для игрока A будут следующие:

1) если , то ;

2) если , то ;

3) если 0 < < 1, то .

Так как , то решения для игрока B будут следующие:

1) если , то ;

2) если , то ;

3) если 0 < < 1, то .

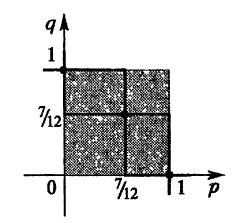


Рисунок 7 Полученные решения для игроков

В данной игре существуют три точки равновесия, две из которых отвечают чистым стратегиям игроков. В данном случае нам нужна смешанная стратегия, которая характеризуется следующими величинами:

() ()

1. Разумной стратегией здесь будет смешивание стратегии Ястреба и стратегии Голубя в отношении 7 к 5 при их многочисленном участии. При этом всякий раз выбор стратегии должен быть непредсказуем для противника, чтобы он не смог этим воспользоваться в каждом турнире. Например, неразумно выступать в роли Ястреба семь раз подряд, а затем пять раз подряд в роли Голубя. При случайном выборе стратегии Ястреба с вероятностью 7/12 и стратегии Голубя с вероятностью 5/12 птица имеет средний выигрыш в турнире, равный 6,25. Изменение этого соотношения может только уменьшить выигрыш.

2. Если каждая из двух видов птиц выбрала одну из двух заданных стратегий в качестве единственной для себя, состоящую из Ястребов и Голубей, найденные числа можно объяснить следующим образом. Для используемой нами системы очков стабильное соотношение между   Ястребами и Голубями в составляет 7:5, и при этом средний выигрыш Ястреба оказывается равным среднему выигрышу Голубя (+6,25).  Если число Ястребов начнет возрастать так, что их станет выше 7/12, то Голуби получат дополнительное преимущество и соотношение вернется к исходному состоянию. Если будет меняться соотношение Голубей, то и Ястребы смогут вернуть соотношение к стабильному. Но 6,25 гораздо меньше среднего выигрыша для Голубя в популяции из одних Голубей (+15). Проблема состоит в том, что любой выгодный для всех сговор не защищен от злоупотреблений, то есть можно оказаться в группе из Голубей единственным Ястребом, что собственно хорошо (+50), поскольку их появление ничем не остановить.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данной работе были разобраны важные понятия раздела Теории игр «Биматричные игры», рассмотрены основные способы решения биматричных игр, в частности биматричных игр 2x2, и показано их применение на практике.

Таким образом, мы убедились в актуальности данной темы в современных условиях. Рассмотрев несколько методов решения биматричных игр, мы можем эффективно решать подобные задачи несколькими методами и выбирать наиболее эффективные для себя стратегии в жизни.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1 Писарук Н.Н. Введение в теорию игр. Минск : БГУ, 2015. 256 c.

2 Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М: «Наука», 1985. – 272 с.

3 Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971. – 230 с.

4 Колобашкина Л.В. Основы теории игр. М.: БИНОМ. 2014

5 Невежин В.П. Теория Игр. Примеры и задачи. М.: Форум, 2012

6 Демин Д.Б. Учебно-методическое пособие по дисциплине Теория игр для студентов-заочников 2 курса (направление 080100), семестр 4. М.: МТУСИ 2014

7 Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. − М.; Наука, 1981

8 Мандель М.Д. Кластерный анализ, М.: Финансы и статистика, 1988.

9 Петросян Л. А. Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина Теория игр: Учеб. пособие для университетов. - М., Книжный дом «Университет», 1998

10 Скаржинская Е.М., Илюхина А.С., Метелькова К.С. Теория игр для экономистов. – Кострома. 2008. – 90 с.